

Magnetic Spectrograph

坂口治隆

平成 16 年 4 月

P4の課題研究では大型磁気スペクトロメーターを使用するので、その原理、設計法、使用方法について簡単に紹介しよう。この部分は通常の実験学の教科書では説明がなされず、秘伝に類するものであったが、この際公開しようと思います。このテキストはP4用に作ったものですが、ゼミで使用してきていろいろ間違いがあることが判明しています。御自分の頭でひとつひとつ内容を確認しながら読んで行ってください。間違いあるいは問題点等に気付いた場合は気楽に坂口まで口頭あるいはemailで教えてください。修正したいと思います。

原子核、素粒子の実験では、粒子ビームを曲げたり、収束させて、試料、標的を設置してある場所に導いてきたり、あるいは散乱、反応後生成した粒子の運動量を測定するの必要に迫られることがある。こういった場合に電場あるいは磁場を用いて、荷電粒子に力を及ぼし、それによる粒子軌道の変化を利用して、その目的を達成することができる。それでは電場と磁場のどちらを使ったらよいであろうか？電場、磁場が荷電粒子へ及ぼす力、ローレンツ力 \vec{F} は、

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

と書かれ、現在実現できる電場の最大は $\varepsilon \sim 3 \times 10^6$ V/m(電場のおおよその限界)、また磁場の最大は $B \simeq 2 \text{Wb/m}^2 (= 2\text{T}$ 常電導の磁石の限界) なので $\beta = \frac{v}{c}$ とすると、

$$\frac{|\vec{v} \times \vec{B}|}{|\vec{E}|} = \frac{\beta c \cdot 2 \text{Wb/m}^2}{3 \times 10^6 \text{V/m}} = \beta \cdot \frac{3 \times 10^8 \times 2}{3 \times 10^6} = 200 \cdot \beta \quad (2)$$

すなわち $\beta = 1/200$ 程度で磁場による力と電場による力が同じになる。 β がこれより大きいときは磁場によるほうがよく曲がる。

($\frac{mv^2}{2} \equiv T$ とすれば $\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2T}{mc^2}}$ となる。 $\beta = \frac{1}{200}$ のときの運動エネルギー T は、 $\frac{2T}{mc^2} = \frac{1}{40000}$ より)

したがって、荷電粒子が陽子の場合は $mc^2 = 938.3 \text{MeV}$ なので

$$T = \frac{1}{80} \text{MeV} = 0.0125 \text{MeV} \quad (3)$$

すなわち、低いエネルギーでは電場を用いた方が高電圧電源と電極だけで済むので簡単であるが、粒子のエネルギーが高くなり、例えば 0.01 MeV 以上の陽子では磁場の力の方が粒子の軌道を変えやすく有利である。

もちろん正確に計算ができる電場の方が良い場合もあるし、ウィーンフィルターのように磁場と電場の両方を用いて粒子の軌道は変えずにスピンの方向だけを回転させる装置もあるが、大部分の場合は磁場が用いられる。以下では磁場だけの場合を考えていこう。

練習問題 1

電磁石に流す電流と、発生する磁場との関係を知るために、皆さんが使用する Raiden の D 1 magnet(最初の Dipole Magnet なのでこう呼ぶ場合が多い) を例に取って磁場を計算してみよう。D 1 磁石はポールギャップが 8 cm で、電流を流すためのコイルは 64 ターンのもので上下についている。合計 128 ターンのコイルに最大 540 A の流すように作られている。このときポール間にはどのくらいの磁場を発生するか？



練習問題 2

運動エネルギー 43.6 MeV の重陽子を D1 磁石で曲げたい。回転半径は 1.5 m である。何テスラの磁場が必要か？

相対論を考慮した場合でも、磁場と運動量と回転半径の関係は $P(\text{GeV}/c) = 0.3B(\text{T})\rho(\text{m})$ と書けることを示せ。 0.0969 T

練習問題 3

Wien Filter とはどのような装置か？簡単に図示せよ。

練習問題 4

磁場中では荷電粒子はその軌道を変えるが、もし粒子がスピンを持っている場合は磁場の方向を軸にしてスピンも回転する。荷電粒子の軌道が磁場で θ だけ曲がったとき磁場と直角方向を向いていたスピンの方向はどれだけ回転するか？陽子や中性子の場合は異常磁気能率を考慮しなければならないし、粒子の速度が光速に近付くと相対論の効果を考える必要がある。

1 180° Spectrograph

まず一様な磁場中での荷電粒子の運動を考えよう。いま図 1 に示すように紙面に垂直方向に磁場がかかっているとす。線源 S より、水平方向（紙面の方向）に、ある運動量を持った粒子が飛び出すと円軌道を描いて運動をする。この半径を R_0 としよう。つぎに運動量は同じだが、前の軌道に対して微小角 θ だけ角度を持って水平方向に線源 S より飛び出した粒子はやはり同じ半径 R_0 の円軌道上を運動する。その回転中心を O_2 としよう。

最初の軌道の中心 O_1 から最初の軌道上の点 P_1 に直線 O_1P_1 を引き、この直線の延長線と θ だけ角度を持って飛び出した粒子の軌道（その中心は O_2 ）との交点を P_2 としよう。

今ここでこれらの軌道が収束するかを考えよう。二つの円軌道が交差する点、すなわち $\overline{P_1P_2} \equiv R_0\theta$ が 0 となる点が収束点である。そしてその点が θ の一次によらなければ収束

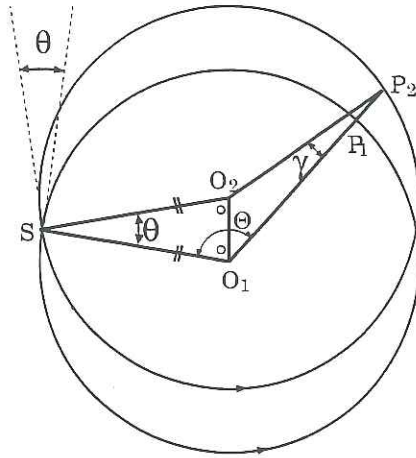


図 1: 180° Spectrograph 一様な磁場が紙面に垂直方向にかかっているとする。

していることなる (1 次収束)。

$$\angle O_1 S O_2 = \theta \quad (4)$$

$$\overline{O_1 O_2} = 2R_0 \sin \frac{\theta}{2} \quad (5)$$

$$\angle S O_1 P_1 \equiv \Theta \quad (6)$$

$$\angle O_1 P_2 O_2 \equiv \gamma \quad (7)$$

とすると、 $\triangle O_1 O_2 P_2$ での正弦定理より

$$\frac{\overline{O_1 O_2}}{\sin \gamma} = \frac{R_0}{\sin (\Theta - (\frac{\pi - \theta}{2}))} \quad (8)$$

$$= \angle O_2 O_1 P_1 \quad (9)$$

$$(5) \text{ 式を使って } \sin \gamma = -2 \sin \frac{\theta}{2} \cos (\Theta + \frac{\theta}{2}) \quad (10)$$

$$\text{そこで } \overline{P_1 P_2} \equiv R_0 x \quad (11)$$

$$= \overline{O_1 P_2} - \overline{O_1 P_1} \quad (12)$$

$$\triangle O_1 O_2 P_2 \text{ で } \overline{O_1 P_2} - \overline{O_1 P_1} = \overline{O_2 P_2} \cos \gamma + \overline{O_2 O_1} \cos (\Theta - \frac{\pi - \theta}{2}) - R_0 \quad (13)$$

$$= R_0 \cos \gamma + 2R_0 \sin \frac{\theta}{2} \sin (\Theta + \frac{\theta}{2}) - R_0 \quad (14)$$

したがって

$$x = \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 (\Theta + \frac{\theta}{2})} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \sin (\Theta + \frac{\theta}{2}) - 1 \quad (15)$$

$\theta \ll 1$ とすると

$$x = 2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \dots\right)(\sin \Theta + \cos \Theta \cdot \frac{\theta}{2} + \dots \theta^2 + \dots) + \sqrt{1 - 4\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \cos^2 \Theta} - 1 \quad (16)$$

$$= \theta \sin \Theta + \frac{1}{2} \cos \Theta \cdot \theta^2 + \dots + 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \cos^2 \Theta + \dots - 1 \quad (17)$$

$$= \theta \sin \Theta + \frac{\theta^2}{2} \cos \Theta (1 - \cos \Theta) + \dots \quad (18)$$

$\Theta = \pi$ とすると

$$x = \frac{\theta^2}{2} (-1) \cdot (2) = -\theta^2 + \dots \quad (19)$$

となり、一次収束することがわかる。すなわち一様磁場では粒子の軌道は180度まわって収束する。この収束する場所に位置を測定できる検出器例えばSSDとかMWDC等を置いて飛び込んできた粒子の横方向の位置を測定して、粒子の運動量を測定することができる。これを180度スペクトログラフと呼ぶ。180度スペクトログラフの場合はカウンタを磁石のポールギャップの中に入れねばならず、場所的な制約の多いものとなる。

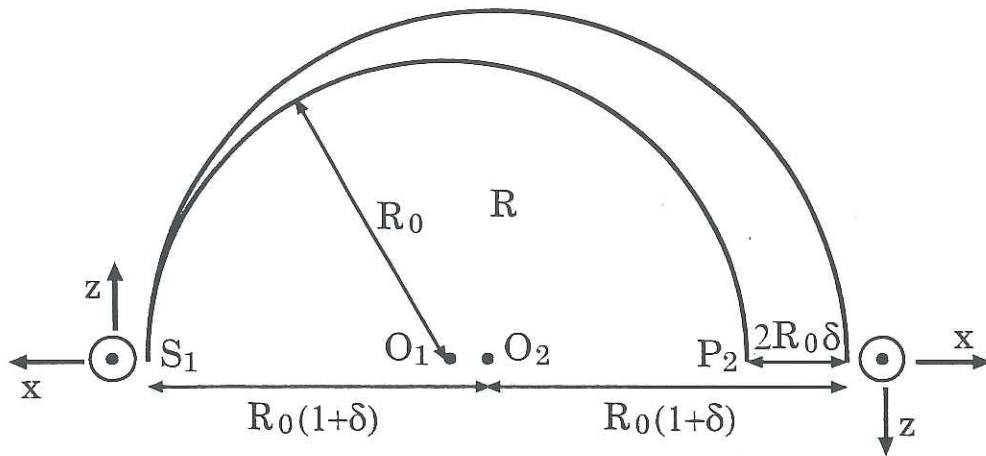


図 2: 180° Spectrograph2

2 倍率、分散、収束性、分解能

180° Spectrograph の場合線源 S_1 にソースを置いた場合、あるいは S_1 にターゲットを置いて散乱が起き、 S_1 からあるエネルギーの飛び出したとしよう。すると、 S_1 で基準の軌道から $\Delta\theta$ だけずれて飛び出した粒子は180°まわって P_2 の所に重なることがわかった。すなわち収束することが判明した。

この場合線源が R_0x_0 の線巾を持った場合の像は

$$Rx^* = -R_0x_0 \quad (20)$$

となる。像の大きさはどうなったかを示す指標が倍率であるが、

$$\text{倍率} = \frac{Rx^*}{R_0x_0} = -1 \quad (21)$$

となる。又 S_1 から異なる運動量の粒子が出た場合は ($P_0\delta$ だけずれた場合)

$$P = P_0(1 + \delta) \quad (22)$$

$$R = \frac{P}{eB} = \frac{P(\text{MeV})}{300 \cdot B(\text{T})} \quad (23)$$

だから ($R_0 = \frac{P_0}{cB}$)

$$R = R_0(1 + \delta) \quad (24)$$

となる。すなわち $2\delta R_0$ だけずれた位置に像を結ぶ。これまでの像点と物点との位置関係をまとめると

$M_x \approx 1$

$\theta = 2$

$$x = \frac{M_x \cdot x_0}{-1} + \frac{M_\theta \cdot \theta}{= 0} + D\delta \quad (25)$$

$$= -1 \quad = 0 \quad (26)$$

$$\text{Magnification} \quad \text{収束性} \quad \text{Dispersion(分散)} \quad (27)$$

運動量が 100% 異なるとき、
どれだけずれるか

スペクトログラフメーターの分解能

$$\text{分解能} = \frac{M_x x_0 R_0}{DR_0} : \text{物点の像に相当する運動量の違いはどの程度かを示す} \quad (28)$$

3 Barber の定理

180度スペクトログラフは線源Sも位置検出器を置く収束点も磁石の中にあり使いにくい。そこでこれらを磁石の外に置いた場合に収束の状況はどうなるかを調べる必要がある。そのために便利な定理を紹介しよう。まず Section 1 で紹介した 180° 型スペクトログ

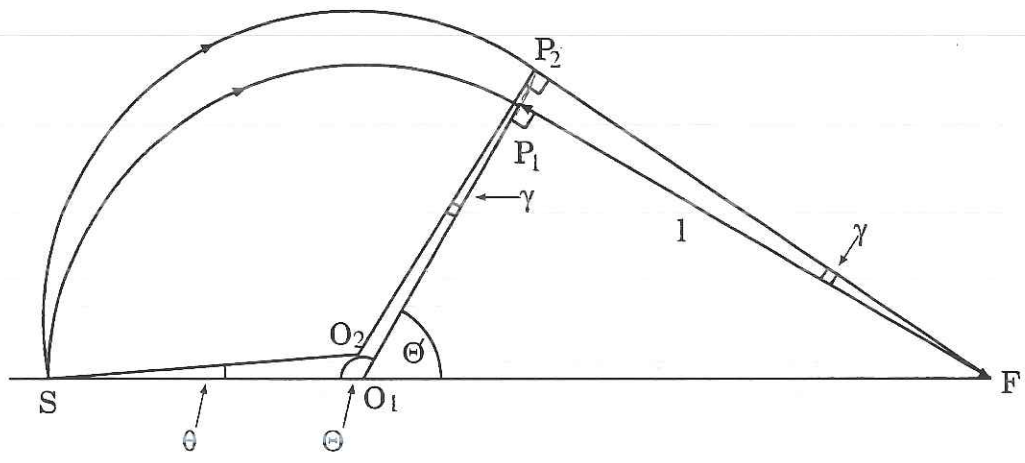


図 3: 扇型 Spectrograph

ラフを変形して扇型にしてみよう。一様磁場は $\angle SO_1P_2$ の領域であるとする。 P_1 、 P_2 からは粒子は直進し F で交わるとする。

$$\angle O_2P_2P_1 = \gamma \quad (29)$$

$$\angle O_2P_2F = \frac{\pi}{2} \quad (30)$$

$$\angle P_2FP_1 = \gamma \quad (31)$$

$$\overline{P_1F} \equiv l \quad (32)$$

$$\sin\theta \sin(\theta + \frac{\theta}{2}) = (\theta \pm \frac{\theta^3}{3} + \dots) (\sin\theta + \cos\theta \cdot \frac{\theta}{2} + \frac{1}{24})$$

とすると、

$$\frac{P_1 P_2}{\sin\gamma} = \frac{l}{\sin(\frac{\pi}{2} - \gamma)} \quad (33)$$

$$P_1 P_2 = R_0 \sin\theta \sin(\theta + \frac{\theta}{2}) \quad (34)$$

$$= R_0 (\sin\theta)\theta \leftarrow 1 \text{ 節の結果} \quad (35)$$

$$(34) \text{ 式と (10) 式を用いて } l = \frac{R_0 \theta \sin\theta \cos\gamma}{-2 \sin\frac{\theta}{2} \cos(\theta + \frac{\theta}{2})} \quad (36)$$

$$= \frac{R_0 \theta \sin\theta (1 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \cos^2(\theta + \frac{\theta}{2}))^{1/2}}{\theta \cos\theta} \quad (37)$$

$$= -(R_0 \tan\theta + \dots \theta^2) \quad (38)$$

$$= -R_0 \tan\theta \quad (39)$$

l は θ に 1 次では独立なので一次収束することがわかった。又、 $\angle P_1 O_1 P_F$ を θ' とすると、前式より

$$\tan\theta' = \frac{l}{R_0} = -\tan\theta \quad (40)$$

$$\Rightarrow \theta' + \theta = \pi \quad (41)$$

すなわち $SO_1 F$ は一直線上にある。

Focus 点は 180° Spectrograph に相当する一直線上にある。ただし磁場が無い分だけ焦点は遠くなった。このことは入口側に対しても成立する。図 4 に示すように線源 S と回転中心を結んだ線と磁石の入射面となす角を θ_1 とする。磁石による粒子軌道の曲げ角を θ_2 としよう。磁石の出射面と OF のなす角を θ_3 とすると、

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi \quad (42)$$

の関係が成立することになる。すなわち、直角入射、出射の扇型一様磁場の物点、回転中心、像点は一直線上にならぶ。これが Barber の定理である。これは非常に応用範囲の広い定理で、ビーム輸送系で物点がきまるとバーバーの定理により像点が決まってしまう。

Barber の定理

直角入射、出射の扇型一様磁場の物点、回転中心、像点は一直線上にならぶ

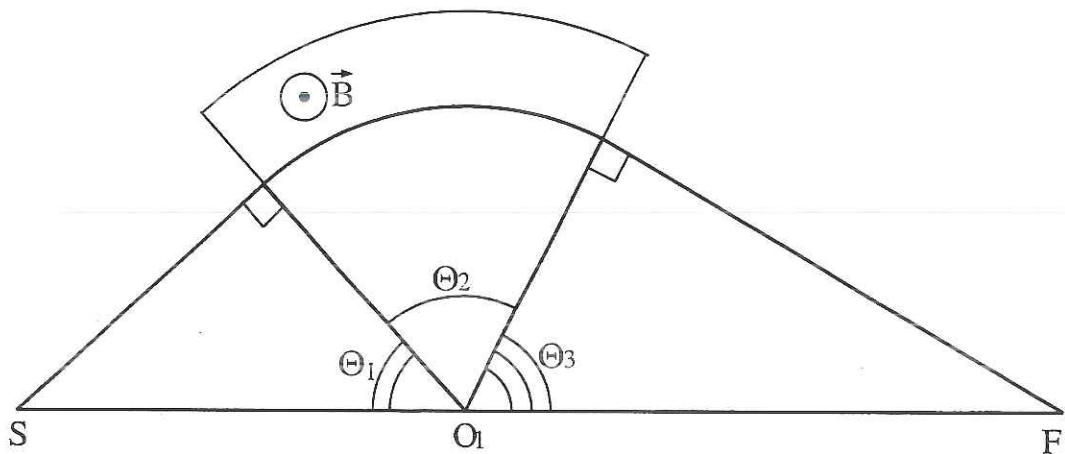
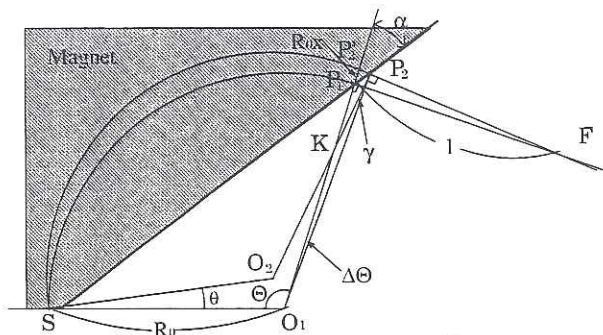


図 4: Barber の定理

前回の Barber の定理及び斜め入射を利用して、 x, y 両方に収束させる Fowler 型 Spectrograph の紹介を行なおう。これらの磁石及びスペクトログラフのその原理は、

- 円型加速器本体
- 加速器から出てきた Beam を実験室に運ぶビーム輸送系
- ビームを試料に衝突させて新粒子を生成させて、運動量、エネルギー、質量を測定する際、特に運動量を正確に測定する際に威力を発揮する。
また、Sample が内部構造を持つ場合にも、内部状態を励起して自分はその分エネルギーを失うという非弾性散乱を測定するのにも役立つ。
- 粒子線による物理学を展開する際に粒子一つ一つの運動量、エネルギー、質量をいかに測定するかが問題である。Spectrograph は運動量を正確に測定するのに有効である。

4 Fowler型 スペクトログラフ (入、出射角が直角でない場合)



これまでは直角入射、出射のスペクトログラフを考えてきたが、入射、出射角を斜めにした場合を考えてみよう。斜めにすることにより、横方向だけでなく縦方向の収束もとることができる。

今、出射角が α である場合を考えよう。

線源から基準軌道に対して角度 θ で出ていった粒子は図に示すように

P_1' を経由して P_2 から磁石を出ていくことになる。基準軌道を飛んでいった粒子は P_1 で磁石を出ていく。

前と同様にそれぞれの回転中心を O_1, O_2 とすると、

$$\angle O_1 P_1 F = \frac{\pi}{2}, \quad \angle O_2 P_2 F = \frac{\pi}{2} \quad \frac{R_0 x \tan \alpha}{\sin \Delta \theta} = \frac{R_0 r \theta x}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

点 F で両方の軌道は交わる。 $\angle P_2' O_1 P_2 \equiv \Delta \theta$ とすると、

$$\begin{aligned} \Delta \theta &= \frac{R_0 x \tan \alpha}{R_0 + R_0 x} \cong \frac{R_0 x \tan \alpha}{R_0} = x \tan \alpha \\ &= \theta \sin \theta \cdot \tan \alpha \end{aligned} \tag{43}$$

最後の等号は 180° SpectroGraph で出てきた式を用いている。

我々が知りたいのは斜め出射したことにより、焦点がどう変化するかである。

そこで、 $P_1 F$ に対する $P_2 F$ の傾きを考えると $P_1 K F P_2$ は同一円周上にあるので、

$$\begin{aligned} \angle P_2 F P_1 &= \angle P_2 K P_1 \\ &= \angle K O_1 P_2 + \angle K P_2 O_1 (\equiv \angle O_2 P_2 O_1 \rightarrow \gamma) \\ &= \Delta \theta + \gamma \\ &= \theta \sin \theta \cdot \tan \alpha + (-2 \sin \frac{\theta}{2} \cos(\theta + \frac{\theta}{2})) \tag{10} \\ &= -\{\cos \theta - \sin \theta \cdot \tan \alpha\} \theta \end{aligned}$$

今 $\overline{P_1 F} \equiv l$ とする。

$\Delta P_1 P_2 F$ で正弦定理を適用すると、

$$\frac{\overline{P_1 P_2}}{\sin(\angle P_2' F P_1) \{\equiv \angle P_2 F P_1\}} = \frac{\overline{P_1 F}}{\sin(\angle P_1 P_2' F)}$$

$$\frac{R_0 x}{\sin(-\{\cos \Theta - \sin \Theta \cdot \tan \alpha\}\theta)} = \frac{l}{\sin(\frac{\pi}{2} - \angle P_2' F P_1 \{ \equiv \angle P_2 F P_1 \})}$$

$$\frac{R_0 x}{\sin\{-\{\cos \Theta - \sin \Theta \tan \alpha\}\theta\}} = \frac{l}{\sin(\frac{\pi}{2} - \angle P_2 F P_1)}$$

$$l = \frac{R_0 x \cdot \cos(\angle P_2 F P_1)}{\{-\cos \Theta - \sin \Theta \tan \alpha\}\theta}$$

$$= \frac{R_0 \theta \sin \Theta \cos\{-[\cos \Theta - \sin \Theta \cdot \tan \alpha]\theta\}}{-\{\cos \Theta - \sin \Theta \cdot \tan \alpha\}\theta} \quad \cos\{\theta\} \xrightarrow{\theta \ll 1} 1$$

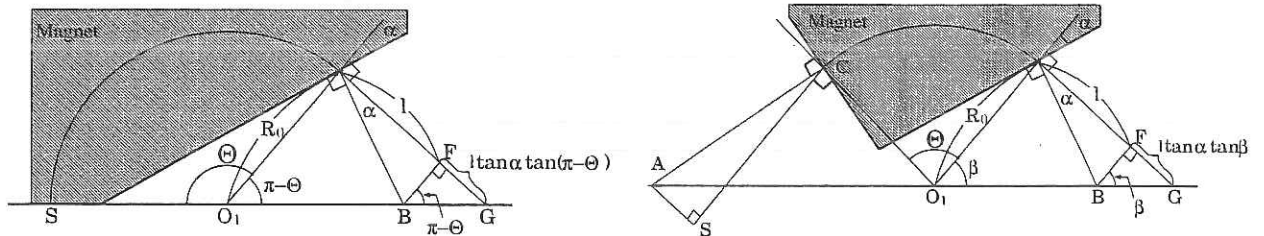
$$= \frac{R_0 \sin \Theta}{\cos \Theta - \sin \Theta \cdot \tan \alpha}$$

$$= \frac{-R_0 \cdot \tan \Theta}{1 - \tan \Theta \cdot \tan \alpha}$$

$$= \frac{R_0 \tan(\pi - \Theta)}{1 + \tan(\pi - \Theta) \tan \alpha}$$

$$\therefore R_0 \tan(\pi - \Theta) = l + l \tan(\pi - \Theta) \cdot \tan \alpha$$

そこで下の図のように、点Fより直線 $P_1 F$ に垂線をひき、点 P_1 より磁場境界の垂直にに線をひき、2つの垂線の交点をBとする。また線分 $P_1 F$ を伸ばし点Fより距離 $l \tan(\pi - \Theta) \cdot \tan \alpha$ の点をGとすると、線分BFの長さは $l \tan \alpha$ なので $\angle FBG = \pi - \Theta$ となる。また三角形 $P_1 O_1 G$ で上の式より $\angle P_1 O_1 G = \pi - \Theta$ である。すなわち $O_1 B G$ は一直線上にある。



同様のことは入射側にも適用できる。そこで Source Point から Focus Point を求めるには、次のようにすればよい。Source Point から入射側の磁場境界に立てた法線と入射 Beam に垂直に立てた線との交点をAとする。と、 $A O_1$ の延長上で出射点から磁場境界に立てた法線との交点をBとするとBよりBeamの出射 line に立てた垂線との交点が Focus Point となる。

(を通り磁場境界に対して垂直な線、とSACの法線との交点をA、

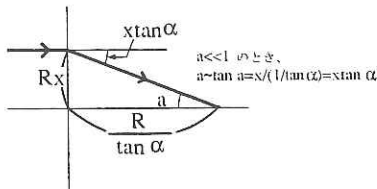
5 斜境界の効果

以上の考察により斜境界の効果は光軸に対する角度を $-\Delta\theta$ だけ変えたことになる。すなわち光軸の方向を z 軸とすると、式(43)より、

$$\frac{dx}{dz} = -(\Delta\theta + \gamma) = -x(\cot\theta + \tan\alpha)$$

光軸の時
pb

となる。斜め境界がない場合は γ という角度で進んでいて、Barbar の定理で決まる地点で収束する筈の軌道はさらに $-\Delta\theta$ 曲げられる。この効果は図に示すように焦点距離 $\frac{R}{\tan \alpha}$ のレンズを置いたことと同等になる。



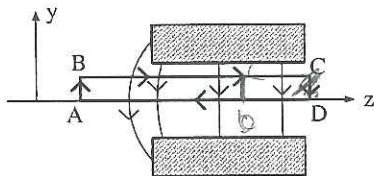
これまで考えてきたことは一次の収束だけを考えたもので、二次の収束あるいはさらに高次の収束を考えると Field Boundary を後に出てくるように、高次曲線にしなければならない。

6 立体収束

これまで考えてきた一様磁場のスペクトログラフには立体収束の考察はしていなかった。実際の実用に耐えるスペクトログラフにする為には x 方向だけでなく y 方向の収束も考察する必要がある。

ローレンツ力を考えると、

$$m\ddot{y} = e(v_z B_x - v_x B_z) \quad y \text{ 成分} \quad m\ddot{\vec{r}} = e(\vec{v} \times \vec{B})$$

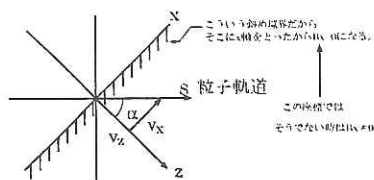


今、簡単の為に磁場境界に合わせて座標軸を左図の様にとると、

$$B_x = 0 \quad \leftarrow \text{斜め入射だからこうなる。}$$

$$v_x = \dot{z} \tan \alpha$$

$$\therefore m\ddot{y} = e\dot{z} \tan \alpha \cdot B_z$$



両辺を積分すると、

$$\dot{y} = -\frac{e}{m} \tan \alpha \int B_z \cdot \frac{dz}{dt} \cdot dt$$

$$\dot{y} = -\frac{e}{m} \tan \alpha \int B_z dz$$

$$B_z(y=0) = 0$$

$$B(A \rightarrow B) = 0$$

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \rightarrow \int B_z dz = B \cdot y$$

$$B_y \cdot dy \cdot a = e \cdot v_z \cdot a$$

$$\therefore \dot{y} = -\frac{eB}{m} \tan \alpha \cdot y$$

$$dt \sim \frac{dS}{v} \quad \leftarrow \text{粒子の飛ぶ距離}$$

$$eD \sim B_y = |\vec{B}| \sin \alpha \cdot a$$

$$\dot{y} \cdot dy \cdot a = e \cdot v_z \cdot a$$

$$\text{よって } a \cdot \dot{y} \cdot dy = e \cdot v_z \cdot a$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dS} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dS} \\ \frac{dy}{dS} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{v} \\ v \frac{dy}{dS} &= \frac{eB}{m} \tan \alpha \cdot y \\ \therefore \frac{dy}{dS} &= -\frac{eB}{mv} \tan \alpha \cdot y \leftarrow \text{偏向角は } y \text{ に比例している。} \end{aligned}$$

これはレンズと同じ効果を与える。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dS} &= -\frac{\tan \alpha}{\rho} \cdot y \\ \rho &\equiv \frac{mv}{eB} : \text{軌道半径} \end{aligned}$$

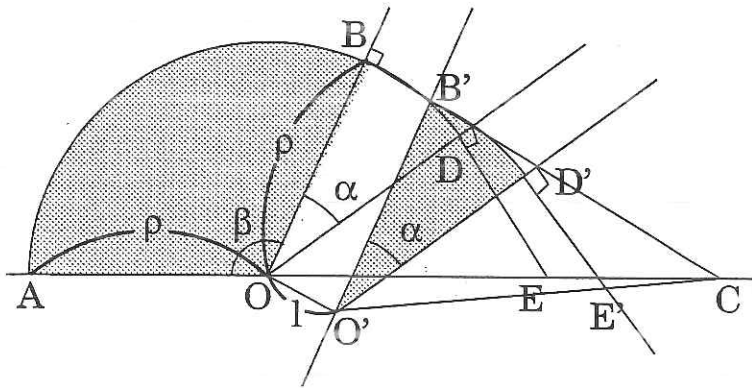
~~$\tan \alpha > 0$ じゃあ
正電荷じゃあ~~

レンズの焦点距離は $\frac{\rho}{\tan \alpha}$ となっている。

立体収束は磁場を不均一化することでも実現できる。

7 Split Sector 型 Spectrometer の作図法

原理



1. AOC は一直線
2. AOE は一直線
↓
3. OEC は一直線
↓
4. O'E'C は一直線

1. Sector Magnet AOB では、Source point A の Image は Barbar の定理で C 点になる。
2. さらに Sector Magnet BOD を付け加えると、Image は E 点になる。
3. すなわち、C 点に Focus する Beam は Sector Magnet BOD を入れたことで Image は E になったことになる。OEC は一直線上になり、再び Barbar の定理が成立する。
4. そこで Sector Magnet BOD を 1 だけ並行移動させて、B'O'D' に移したとしよう。Beam は B' に入射した時は C に Focus するつもりで入射しているから、Sector Magnet に入れると、3 の Barbar の定理より Focus 点 E' は O'C 上になければなら

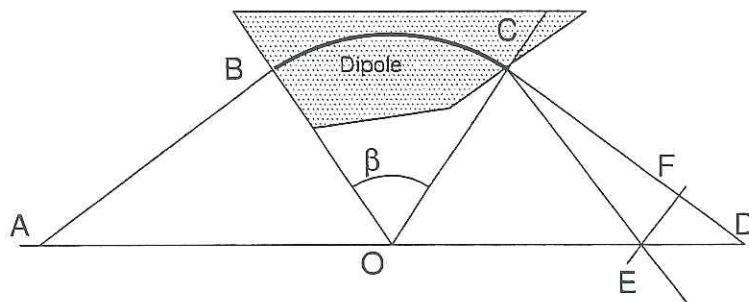
4の 並行移動
OB に垂直に移動

ない。すなわち、Split Pole にしたとことにより、E 点から E' 点に Image が移動した。

8 Q magnet を導入した場合の作図法の変化

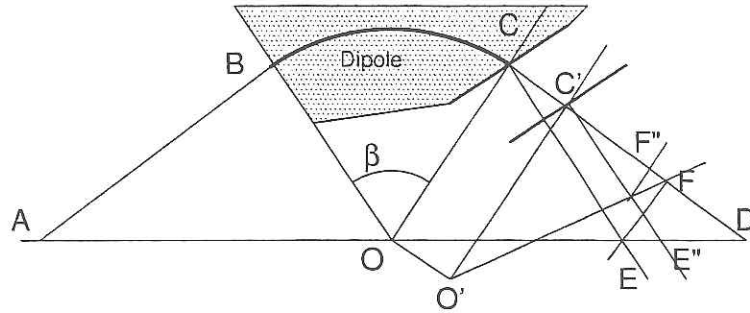
Q magnet とは 磁極の配置が例えば 第 1 2 節の図にあるように、4 つの極が交互に配置されていて、その磁場 B は k を定数とすると $(-ky, -kx, 0)$ 表されるような磁石である。この場合、Q magnet のビーム軌道に与える影響を考えよう。簡単の為に、 x 軸上のビームを考えると中心からの距離に比例した強さの磁場の影響を受ける。このことは、Dipole の入口、出口を斜めにして斜め入射、出射にしたのと同様である。斜め入射、出射の場合は中心軌道からの距離に比例した長さで磁場の影響を受けることになる。そこで、斜め出射の場合の Focus 点の移動をまず復習してみよう。

1. Sector Magnet BOC で Source A のイメージは D 点にできる。Barber の定理より AOD は直線上にある。
2. 下の図のように、Dipole の出口 C 点を斜めにすると、Focus 点は F に移動する。



3. これは Dipole の代わりに C 点に Q magnet があるとしたとき、D 点にイメージを作るべく C 点に入射したビームのイメージが F 点に移動するのと同様である。(次節参照)
4. このことを利用すると、C 点を直角入射に戻し C' 点に Q magnet を置いた場合、Dipole を経て D 点にイメージを作るべく C' 点に入射したビームは、O'D 上の E' 点より垂線を C'D 上に下ろした F' 点に Focus する。(下図)

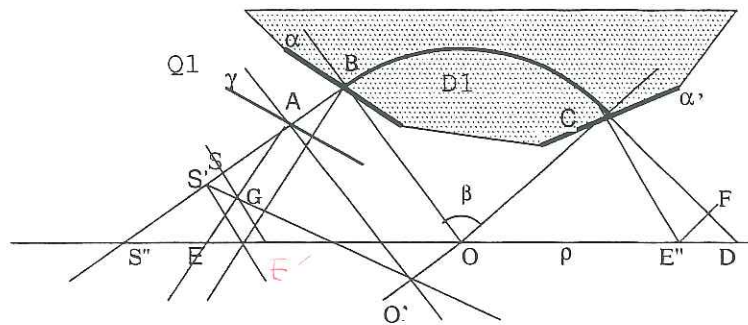
5. さらに、Dipoleの出口C点を斜めにしたまま、C' 点に Q magnet を置いた場合、O'F と C'E'' の交点から CD に引いた垂線の足、F'' 点が焦点となる。(下図)



6. Bend Angle 及び ρ は Q magnet の強さにより変化することになる。

以上で述べたことにより、Dipole, Quadrupole magnet 及び 斜め入出射を基本とする Spectrometer 系の Focusing は作図できることになる。

9 具体例 1 : Q magnet と Dipole magnet の場合



Spectrometer での焦点面の求め方の具体例として、図のような Q magnet と Dipole magnet 一個ずつのシステムを考えよう。このシステムは前節の Dipole magnet から Q magnet への順序とは逆に Q magnet から Dipole magnet へ入っているため、前節のケースを時間反転させるように考えれば前節のシステムと同じである。

しかし典型的な Spectrometer は図のような順序をとる以上、粒子の進行方向に逆らった考え方をしているため作図にならないので、以下のような手順で作図する。

尚、Q magnet の磁場強度は口径 $2a(m)$ の表面で $B(T)$ 、Dipole magnet の磁場は $B_0(T)$ とし、Q magnet の長さは $L(m)$ とする。また、Dipole magnet の入射角度を α 、出射角度を

α 、Bend angleは β とし、入射粒子の回転半径は ρ (m)とする。Source Point S、Q1、D1の位置を決めた(当然O点、O'点も)うえでこの場合の焦点を求めてみよう。

1. Q magnet(Q1)の強度 S_1 は

$$S_1 = \left[\frac{B}{a} \right] \frac{L}{B_0 \rho} = (\text{焦点距離})^{-1}$$

であり、(次節参照)この S_1 が前に求めたDipoleの焦点距離に等しい、 $S_1 = \frac{\tan(\gamma)}{\rho}$ とすれば、入射角 γ が求められる。

$$\tan(\gamma) = \left[\frac{B}{a} \right] \frac{L}{B_0}$$

今も通りASに垂直な線

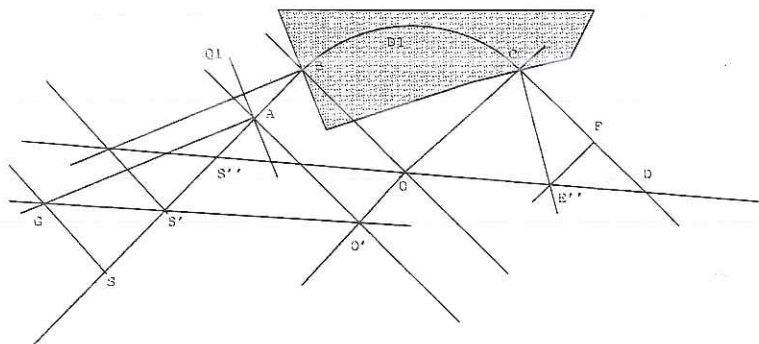
2. Q1の位置より γ だけ傾いた垂線を出し、Source Point Sからひいた垂線との交点をGとする。また、 $AO' = \rho$ (回転角)、O'GとASの交点をS'とする。このS'がDipoleに対するBarberの定理を用いる点となる。

3. Dipole magnet(D1)はQ1より1だけ下流から始まる。D1のBend angleは β である。もし、D1の入射角が0度なら、S'点とO点に対してBarberの定理を用いればよい。

4. もし、D1の入射角 α 、出射角 α' ならば、3と同様にS'からひいた垂線とBより α だけ傾いた垂線との交点E'として、OE'とASの交点をS''とすればよい。Source PointはS'点からS''点に移動し、S''Oの延長上でE''点を求め、F点を求めることになる。この部分はModified Barber's Theoremと同じである。

結局、S点の焦点はF点となる。

また、Q1とD1の入射角の符号を反対にすると作図は下の図のようになる。各自やってみよう。



10 Spectrometer を含めたビーム輸送系の記述

ビーム輸送系の記述には、中心ビーム軌道を考えて、横方向はそれからのずれを考える。ある時刻での粒子の情報 $(x, \theta, y, \phi, \delta)$ でかける。ここで δ は運動量のずれの比で、 $\delta = \frac{\Delta P}{P_0}$

であり、 z 軸をビーム全体の進行方向、 y 軸を上下方向とし、 $\theta = \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial z}$ 、 $\phi = \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial z}$ とする。

x 軸はビームの進行方向を z 軸にとったとき、それと右手系をなすように考えるのが普通だが、プログラムによってはビームの曲がり方によって外側向きあるいは内側向きを用いているものがあるので、注意が必要である。

中心軌道のまわりに 5 重のテイラー展開を行うと、横方向の中心軌道からの変位 x_2 は

$$x_2 = \Sigma(x|x^\kappa \theta^\mu y^\lambda \phi^\nu \delta^\eta) x_1^\kappa \theta_1^\mu y_1^\lambda \phi_1^\nu \delta_1^\eta$$

と書くことができる。

$$1 \text{ 次までの表示なら、} \kappa + \mu + \lambda + \nu + \eta \leq 1$$

$$2 \text{ 次までの表示なら、} \kappa + \mu + \lambda + \nu + \eta \leq 2$$

に相当する。通常のビーム軌道や、Spectrometer は Median-Plane に関して対称に磁場ができているので、磁場その他の境界条件が Median-Plane 対称性をもつなら、粒子軌道も Median-Plane 対称性をもっている。そこで、上記のテイラー展開した式、 $x_2 = \Sigma(x|x^\kappa \theta^\mu y^\lambda \phi^\nu \delta^\eta) x_1^\kappa \theta_1^\mu y_1^\lambda \phi_1^\nu \delta_1^\eta$ に以下のような Median-Plane 対称変換を作用させてみよう。

$$x \rightarrow x \quad y \rightarrow -y \quad \delta \rightarrow \delta \quad \dot{x} \rightarrow \dot{x} \Leftrightarrow \theta \rightarrow \theta \quad \dot{y} \rightarrow -\dot{y} \Leftrightarrow \phi \rightarrow -\phi$$

- x_2 に Median-Plane 対称変換を作用させた場合

$$x_2 = \Sigma(-1)^{\lambda+\nu} (x|x^\kappa \theta^\mu y^\lambda \phi^\nu \delta^\eta) x_1^\kappa \theta_1^\mu y_1^\lambda \phi_1^\nu \delta_1^\eta$$

$(x|x^\kappa \theta^\mu y^\lambda \phi^\nu \delta^\eta)$ は Median-Plane 対称変換に対して不変である。従って、 $\lambda + \nu = \text{odd}$ のときは、 $(x|x^\kappa \theta^\mu y^\lambda \phi^\nu \delta^\eta) = 0$ がいえる。

- y_2 に Median-Plane 対称変換を作用させた場合

$$-y_2 = \Sigma(-1)^{\lambda+\nu} (y|x^\kappa \theta^\mu y^\lambda \phi^\nu \delta^\eta) x_1^\kappa \theta_1^\mu y_1^\lambda \phi_1^\nu \delta_1^\eta$$

$\lambda + \nu = \text{even}$ のとき、任意の $x_1, \theta_1, y_1, \phi_1, \delta_1$ について成り立つので、 $(y|x^\kappa \theta^\mu y^\lambda \phi^\nu \delta^\eta) = 0$ である。 $\lambda = 0, \nu = 0$ のときは、すべての κ, μ に対して 0 である。

今、二次までとる表示を考えるなら、下の表を用いることになる。

(1)	$\lambda + \nu = \text{odd}$ のときはすべての λ, ν に対して	$(x y^\lambda \phi^\nu) = 0$
(2)	$\lambda + \nu = \text{even}$ のときはすべての λ, ν に対して	$(y y^\lambda \phi^\nu) = 0$
(3)	$\lambda = \nu = 0$ のときはすべての κ, μ に対して	$(y x^\kappa \theta^\mu) = 0$

を使うことになる。Median-Plane 対称性があるときは、二次までとる表示は表の条件 (1) により、20 項から 12 項に減るので

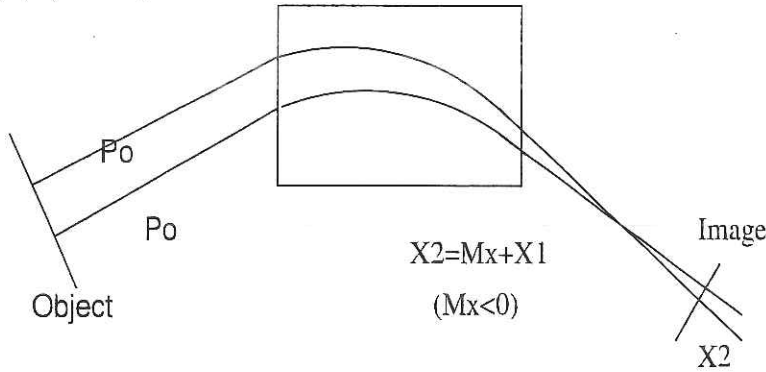
$$x_2 \cong (x|x)x_1 + (x|\theta)\theta_1 + (x|\delta)\delta_1 + (x|x^2)x_1^2 + (x|\theta^2)\theta_1^2 + (x|\delta^2)\delta_1^2 + (x|y^2)y_1^2 + (x|\phi^2)\phi_1^2$$

$$+(x|x\theta)x_1\theta_1 + (x|x\delta)x_1\delta_1 + (x|\theta\delta)\theta_1\delta_1 + (x|y\phi)y_1\phi_1$$

となる。また、 y_2, θ_2, ϕ_2 に対しても上の条件 (1)(2)(3) をいれて書き下すことができる。

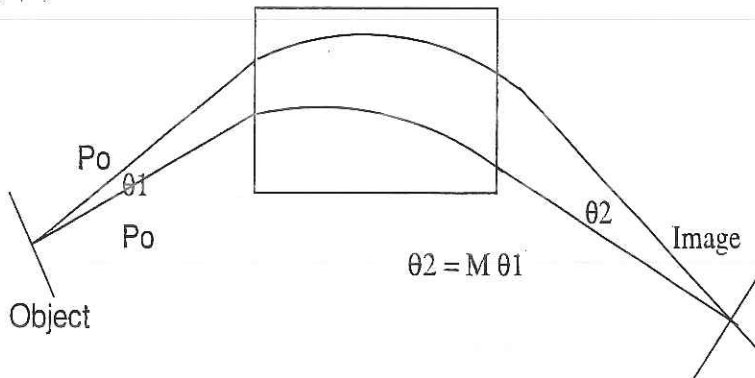
各係数について検討してみよう。

1. $(x|x) = M_x$: 横倍率



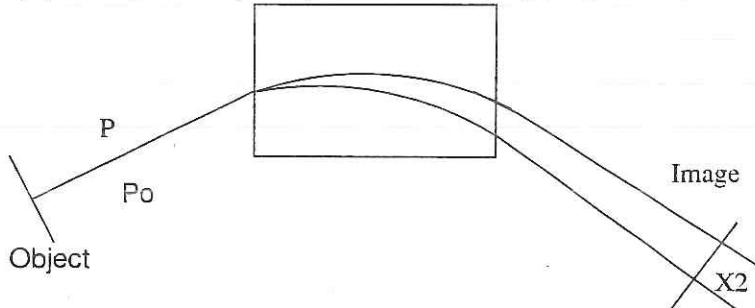
Beam Spot Size が
どれだけ変化するかを示す。

2. $(x|\theta)$: θ のずれに対する x の変位
 $(\theta|\theta)$: θ 倍率



一次収束のときは $(x|\theta) = 0$

3. $(x|\delta)$: Dispersion (分散) ($P = \Delta P + P_0$, $X_2 = D\delta$)

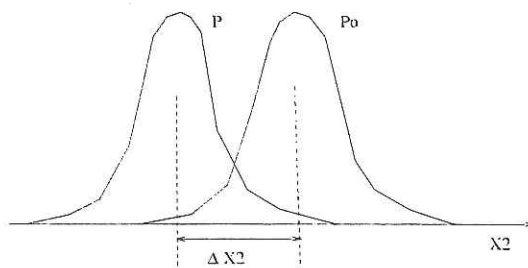


運動量の異なるものが Spectrometer
の通過後どれだけ位置をずらすか

R: を First Order Resolving Power として、R を求めてみよう。 $P = P_0 + \Delta P$ として、ビームの幅は $\Delta x_2 = M_x \Delta x_1$ 、運動量のずれ ΔP による変位は $\Delta x_2 = D\delta$ と書ける。よって、ビームスポットサイズ Δx_1 による運動量のずれ δ は、 $\Delta x_2 = D\delta = M_x \Delta x_1$ より、 δ は $\delta = \frac{M_x \Delta x_1}{D}$ である。このとき、 δ^{-1} が運動量分解能となる。よって、 $\Delta x_1 =$

1mm, $D \simeq 10m$, $M_x = 0.5$ とすると、磁石の分解能は、

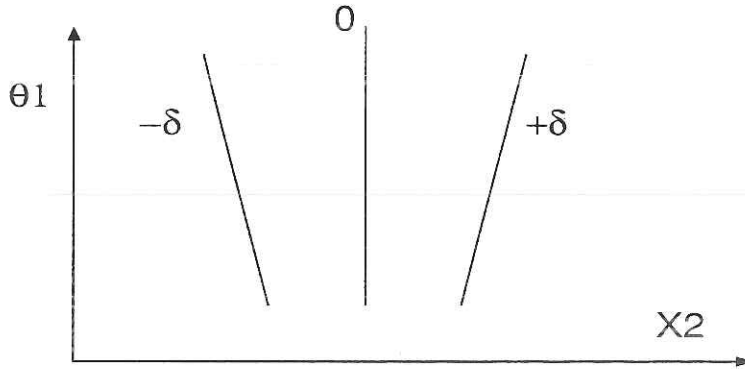
$$R \equiv \frac{P}{\Delta P} = \delta^{-1} = \frac{D}{M_x \Delta x_1} \sim 20000$$



4. ($x|\delta^2$) : Dispersion に non linear な寄与通常粒子の位置を測定する位置カウンターはスペクトロメーターの焦点面に置くが、この項があると、中心起動の運動量からずれるに従って粒子の像が大きくなる効果をしめす。磁石の設計の際にこのような2次の効果は小さくなるように設計するのが常であるが、設計で消せなかった場合には raytrace 型 のカウンターを設置することで、焦点面の位置依存型の関数を導入して補正することが可能である。

?

5. $(x|\theta\delta)$: 焦点面の法線と中心軌道とのなす角 ψ に関する $(x_2 = (x|\theta\delta)\theta_1\delta_1)$



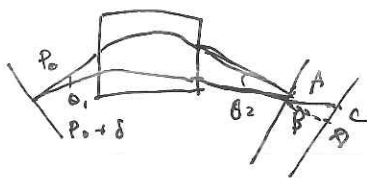
例えば、 $\tan\psi = -\frac{(x|\theta\delta)}{(\theta|\theta)(x|\delta)}$
 $= -\frac{(x|\theta\delta)}{M\theta D}$
 とすると、 $(x|\theta\delta)$ は除ける。

問題 上の $\tan\psi$ の式を証明し、次章に出て来る raiden spectrometer での $\tan\psi$ を求めよ。

(解)

今中心軌道と中心軌道に直角な元の焦点面の交点を A、運動量が δ ずれた粒子が元の焦点面を横切る角度 θ_2 で点 B を横切るとする。この粒子は角度 ψ だけ傾いた新しい焦点面と点 C で交わるとする。点 B より 焦点面 に垂線を立て新しい焦点面との交点を D としよう。

(29?)



$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_0 - x)$

$\theta_2 = (\theta|\theta) \cdot \theta_1$

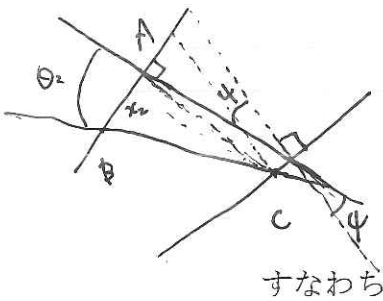
$x_2 = (x|\delta)\delta + (x|\theta\delta)\theta\delta + \dots$

$\frac{CD}{\sin\theta_2} = \frac{\tan\psi}{\sin(\pi - (\theta_2 + \pi/2 - \psi))} = x_2 \cdot \frac{\tan\psi}{\cos(\theta_2 - \psi)} = x_2 \cdot \frac{\tan\psi}{\cos\theta_2 \cos\psi - \sin\theta_2 \sin\psi}$

$CD = x_2 \frac{\tan\psi}{\cos\psi} \theta_2 = x_2 \cdot \frac{\tan\psi}{\cos\psi - \theta_2 \sin\psi}$

$x'_2 = AC = \frac{x_2}{\cos\psi} - \frac{x_2(\theta|\theta)\theta_1 \tan\psi}{\cos\psi} = x_2 \cdot \frac{1 - \theta_1^2 \tan\psi}{\cos\psi}$

この式を x_2 の式とみなして、2番目の式に代入すると x'_2 と δ, θ_1 の関係式を得る。



$\frac{\cos\psi \cdot x'_2}{1 - \tan\psi \cdot (\theta|\theta)\theta_1} = (x|\delta)\delta + (x|\theta\delta)\theta_1\delta$

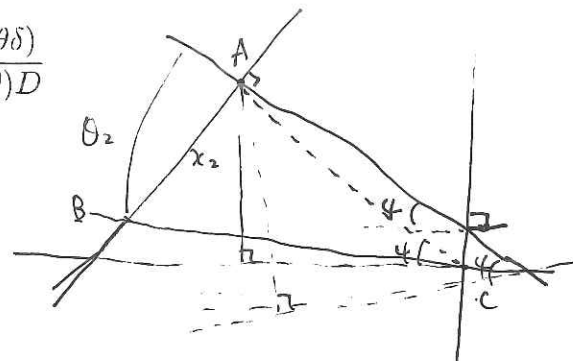
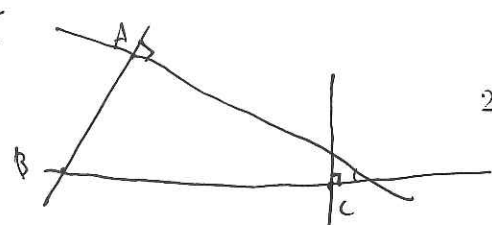
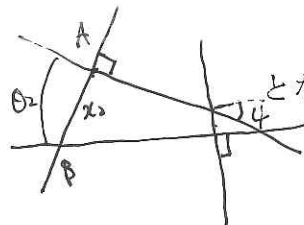
$\cos\psi \cdot x'_2 = (D\delta + (x|\theta\delta) \cdot \theta_1\delta)(1 - \tan\psi \cdot (\theta|\theta) \cdot \theta_1)$

$\cos\psi \cdot x'_2 = D\delta + \theta\delta \cdot ((x|\theta\delta) - D(\theta|\theta) \cdot \tan\psi)$

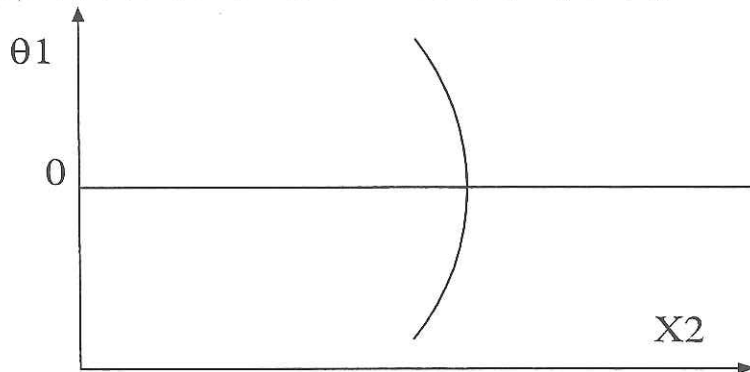
すなわち

$\tan\psi = \frac{(x|\theta\delta)}{(\theta|\theta)D}$

となる。符号は角度のとりかたによる。

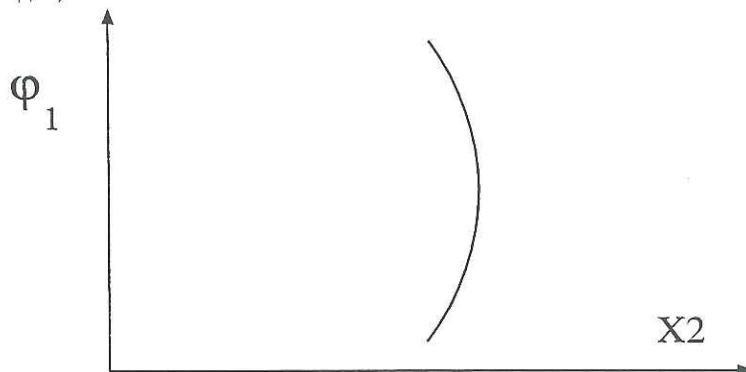


6. $(x|\theta^2)$ 収差をもたらす像をぼかす。 ($x_2 = (x|\theta^2)\theta_1^2$)



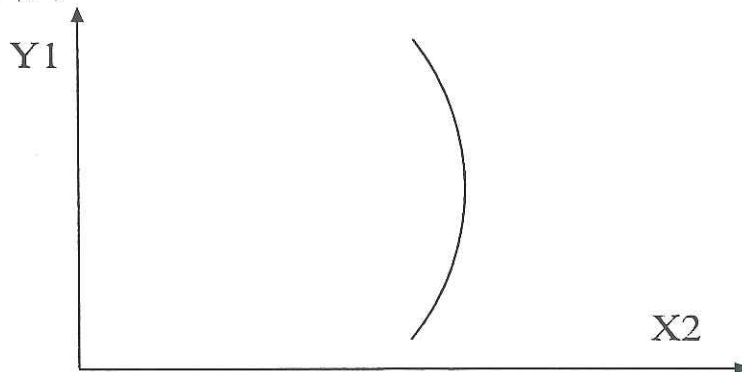
VDC Counter を用いれば
この影響は最小にできる。

7. $(x|\phi^2)$: aberration



ϕ_1 と ϕ_2 は
正確には対応していないが
近似的には $\phi_1 = \phi_2$
である (よく作られた
Spectrometer での話)

8. $(x|y^2)$



ここに挙げた 2 次以上の収差は前にも述べたように、Raytrace 型カウンターではソフト的に補正をすることができる。

11 磁気多重極磁場について

磁気スペクトログラフ系で高次の収差を取り除く為にはその次数に対応した多重極磁場を導入する。例えば、

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{重極成分は} \quad 1 \text{次の収差を} \quad (x|\theta) \\ 6 \text{重極成分は} \quad 2 \text{次の収差を} \quad (x|\theta^2), (x|\theta\delta), (x|y^2) \\ 8 \text{重極成分は} \quad 3 \text{次の収差を} \quad (x|\theta^2\delta), \dots \end{array} \right.$$

その理由を、spectrometer の場合のように median plane symmetry の時を例にとり説明しよう。

dipole 磁場は中心軌道を決めている。中心軌道からずれたものを修正するには多重極磁場を導入すればよいことになる。dipole 磁場を median plane 上で中心軌道に沿って Taylor 展開すると以下ようになり、それぞれが高次の収差の原因となりうる。これらを打ち消すにはこれらと逆の効果を持った多重極磁場を導入する必要がある。

$$\begin{aligned} B_y(x, 0) &= B_y|_{\substack{x=0 \\ y=0}} + \frac{1}{1!} \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} x^3 + \dots \quad (44) \\ &= \text{dipole} + \text{quadrupole} + \text{sextapole} + \text{octapole} + \dots \end{aligned}$$

多重極磁場の効果を、単位長さあたりの多重極強度 K_n で表現すると、

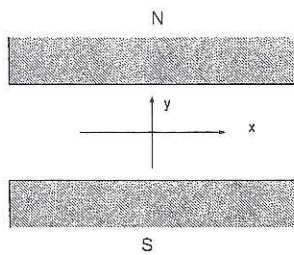
$$B_y(x, 0) = B\rho \sum_{n=0}^{\infty} K_n X^n \quad (45)$$

$$\left[\begin{array}{l} K_n \equiv \frac{1}{B\rho} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n B_y}{\partial x^n} \\ B\rho \equiv \text{magnetic rigidity} \end{array} \right.$$

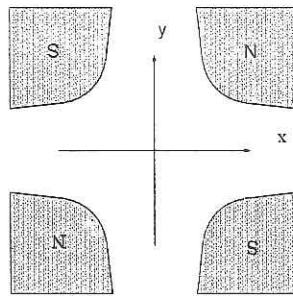
この磁場を粒子の軌道に渡って積分すると、

$$\int_0^L B_y(x, 0) dz = B\rho \sum_n S_n X^n \quad (46)$$

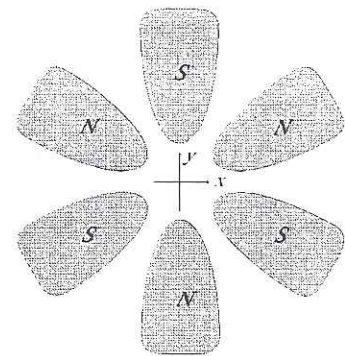
$$S_n = \int_0^L K_n dz : \text{ある多重極場の全強度}$$



dipole



quadrupole



sextapole

12 多重極場を作り出す標準的な方法

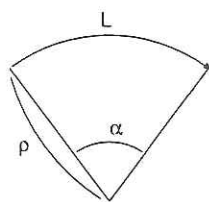
上に述べた多重極場を作り出すには主に3つの方法がある。

12.1 Discrete Magnetic Elements を用いる

n 次の多重極磁場は $2(n+1)$ 枚の鉄の境界を用いて作る事ができる。もし B_0 を磁極の表面での磁場とし、 a を中心からの距離とするならば、

dipole の場合 $n=0$

$$S_0 = \int_0^L K_0 dz = \frac{1}{B_0 \rho} B_0 L = \frac{L}{\rho} (= \alpha) \quad (47)$$



α : bend angle in radian

quadrupole の場合 $n=1$

$$S_1 = \int_0^L K_1 dz = \frac{1}{B_0 \rho} \int \frac{\partial B_y}{\partial x} dz = \frac{1}{B_0 \rho} \frac{B_0 L}{a} = \left(\frac{B_0}{a}\right) \left(\frac{L}{B_0 \rho}\right) \quad (48)$$

sextapole の場合 $n=2$

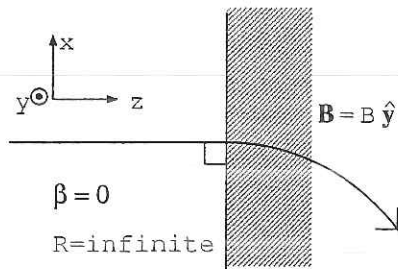
$$S_2 = \int_0^L K_2 dz = \frac{1}{B_0 \rho} \frac{1}{2} \int \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} dz \quad (49)$$

ここで $B(x) = bx^2$ とすると $B_0 = ba^2$ 。
 また、 $\frac{\partial^2 B(x)}{\partial x^2} = 2b = \frac{2B_0}{a^2}$ であるから

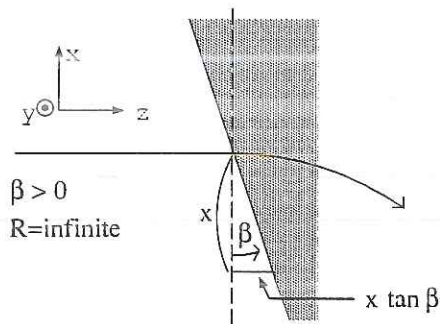
$$S_2 = \frac{1}{B\rho} \frac{1}{2} \frac{2B_0 L}{a^2} = \left(\frac{B_0}{a^2}\right) \left(\frac{L}{B\rho}\right) \quad (50)$$

12.2 Dipole 磁場の入口及び出口の形をかえることにより多重極磁場を作る

β = 回転角 or 入射・出射角
 R = 曲率半径
 としよう。



no multi poles

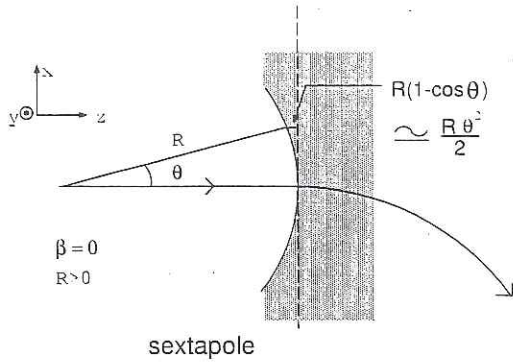


quadrupoles

斜め入射、出射の場合は4重極成分を持ち込むことになる。(xに比例した磁場を加えているから。)

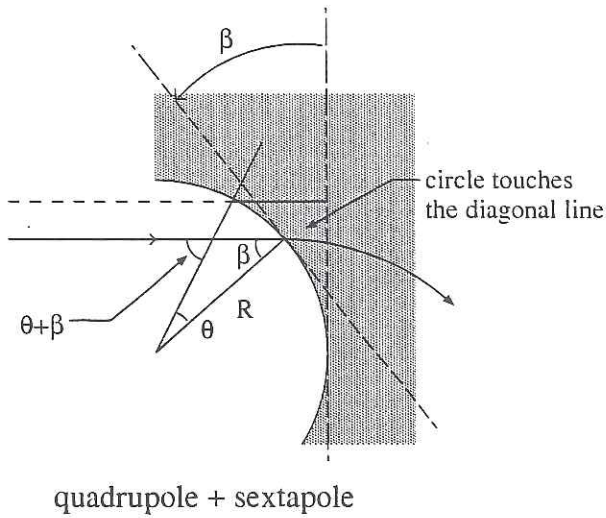
$$S_1 = \frac{x B \tan \beta}{x B \rho} = \frac{\tan \beta}{\rho}$$

$x \tan \beta$ は path の長さ



$\Delta B = B_0 x^2$ なる磁場を加えている。

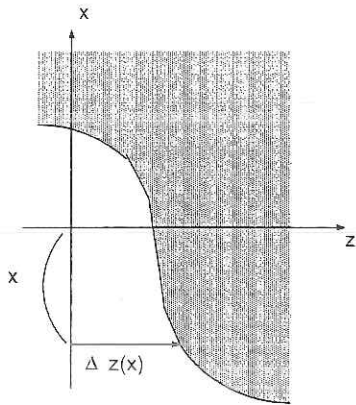
$$S_2 \simeq \frac{(R - R \cos \theta) B_0}{(R \tan \theta)^2 B_0 \rho} = \frac{1}{2R\rho}$$



$$S_1 = \frac{\tan \beta}{\rho}$$

$$S_2 \simeq \frac{B_0 (R - R \cos \theta) \frac{1}{\cos(\beta + \theta)}}{(R \tan \theta \cos \beta)^2 B_0 \rho} = \frac{1}{2R\rho \cos^3 \beta}$$

これよりも高次の多重極磁場を導入したければ、さらに複雑な pole shape を用いればよい。例えば、

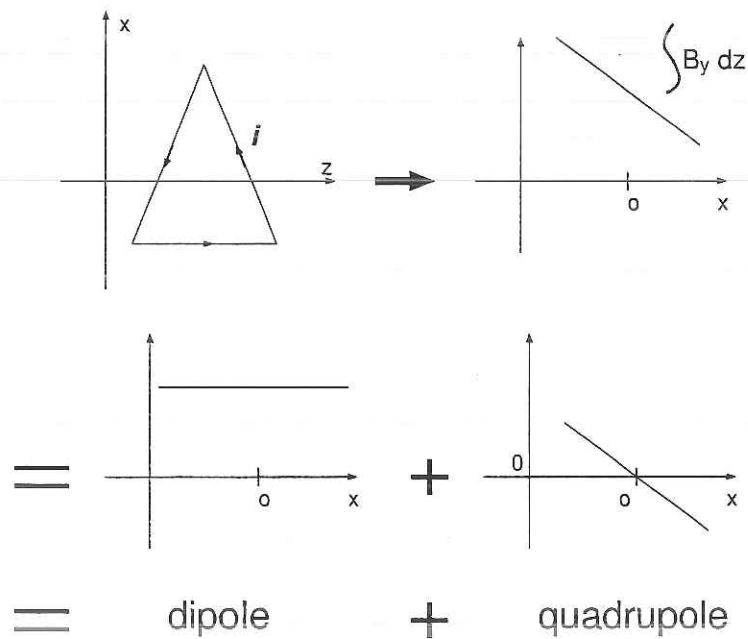


$$\frac{\Delta z(x)}{\rho} = C_1\left(\frac{x}{\rho}\right) + C_2\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + C_3\left(\frac{x}{\rho}\right)^3 + \dots + C_n\left(\frac{x}{\rho}\right)^n + \dots$$

$$= \text{quad} + \text{sextapole} + \text{octapole} + \dots + 2(n+1)\text{pole}$$

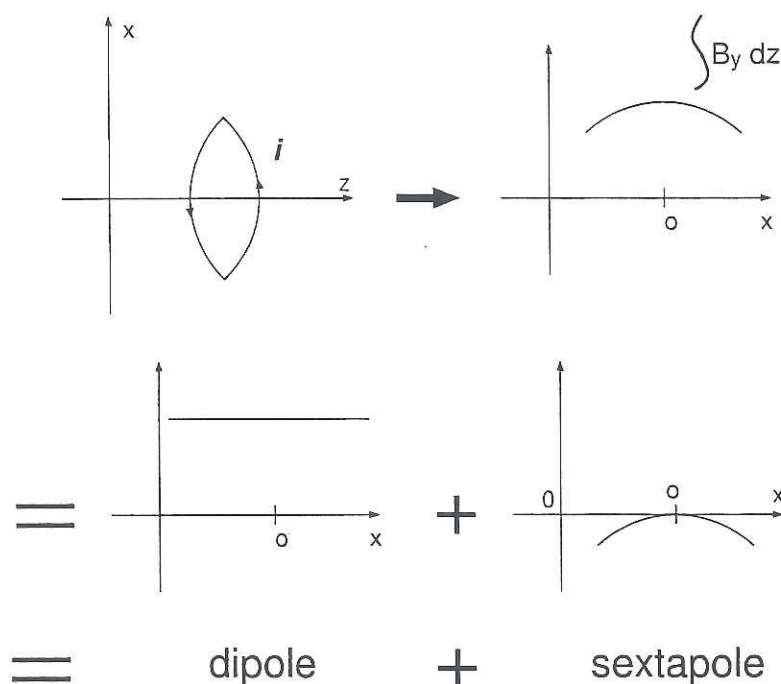
12.3 磁極表面でのコイルの巻き方を工夫する方法

例えば、下図のように三角形にコイルを巻くと、磁場のきき方は、



粒子軌道の半径で異なり、双極磁場と 4重極磁場を重ね合わせたものと同じになる。

また、次のように中心軌道部分の磁場が強くなるようにコイルを巻いた場合は 4 重極磁



場と 6 重極磁場を組み合わせたものと同じになる。

このように磁石の設計の際に慎重に設計して双極磁石の多重極成分をあらかじめ入れて置くと製作費用が安くなり、また使いやすいものになるので最近のスペクトロメーターの磁場多くには多重極成分を混ぜ合わせている場合が多い。

13 Raiden, Grand Raiden Spectrograph の定性的な説明

それでは実際に実験に用いられているスペクトログラフを例にとり、各エレメントの機能を定性的に紹介しよう。

核物理研究センターには 3 台の大型スペクトロメーターが設置されて、実験に供せられている。3 台はそれぞれ LAS (Large Acceptance Spectrometer), Raiden, Grand Raiden と呼ばれている。LAS は QD 型のスペクトロメーターで運動量分解能は中くらいだが一度に測定できる運動量の範囲が広いの特徴で、残る Raiden, Grand Raiden はそれぞれ QDMDQ 型、QSQDMD 型で運動量分解能が高いのが特徴である。

ここでは運動量分解能では世界で 1、2 位を器競っている Raiden, Grand Raiden の各磁気エレメントの機能について紹介しよう。

Raiden Spectrometer の各磁石要素の機能の定性的な説明

Q 1 : 立体角を大きく取るために、縦方向を収束させる。横方向は分散を大きくするために発散させる。D 1 を出た後で横方向を収束させると Dispersion が相殺するので、通常は収束しないようにする。

SX : 2 次の収差を消すために RAIDEN では DI の入口を曲面にし、Q 1 に多重極成分を入れている。GRAND RAIDEN では D 1 の入口は直線なので、その代わりに SX を入れた。

Q2 : GR では 斜め入射の代わりに Q 2 を使用している。そして D 1 の入口は直角入射になっている。RAIDEN では場所的な制約で Q 2 を使用せずに、斜め入射にしている。

D 1 : 出口の斜め出射も横方向は発散になるようにする。そのため D 1 を出た直後に縦方向は node をうつ。

MQ : 縦方向で node を打つところで多重極磁場を発生させて、高次の収差を無くしている。このために基準軌道をずれたものでも像があまり大きくならない。いわゆる焦点面上での像がちょうちょの形にならないのが特徴である。

D 2 : 斜め入射、斜め出射角も出来るだけ収束点をあとに延ばすように横方向は発散になるように設計してある。縦方向は収束するようにして磁石の天井を打たないようにしている。そして最後にカウンターの位置で縦方向横方向ともに収束するようにしてある。

扇型磁石の場合はバーバーの定理により容易に水平方向で収束してしまう。運動量分解能をかせぐためには必死で発散させて、横方向では node を打たないようにして焦点面まで粒子を運んでいって分散を非常に大きくしたのが RAIDEN、GR spectrometer である。

14 ORBIT の使い方

作図法で設計できるのはせいぜい1次の収束までである。磁石の配置や、形式を決めるにはこれでよいかも知れないが、実際は2次、3次といった高次の収差が問題になってくるので、それを補正するにはマトリクスを用いた軌道計算のプログラムを用いてよい磁場を求めることになる。ここで紹介するプログラムは現在九大におられる森信さんが RCNP で池上さんと Raiden を建設している際に、作成したものでマトリクスを用いた軌道計算のコードである。スペクトロメーターの概念設計や使用する際の目安を得るためにはこれで充分である。本格設計するには周辺磁場の効果を正しく取り入れるために Optrace, Raytrace といった、電磁場から実際に粒子軌道を計算をするコードを用いてマトリクス計算で得た結果を確認する必要がある。

14.1 Orbit で何が計算できるか？

Orbit の詳細はそのプログラムの先頭を書いてあるマニュアルに書いてある。ここでは簡単に何が計算できるかを紹介しておこう。Orbit は荷電粒子の電磁場中での運動を個々のエレメントを通過するとして中心軌道に対するずれとして近似計算する。近似の度合は3次までである。これは加速器からのビーム輸送系やスペクトロメーターの設計には充分である。磁石の各エレメントの強さをサーチできるのも Orbit の特徴である。Orbit の特徴はマトリクスを使って任意の χ^2 関数を定義でき、それを最小にする磁気エレメント例えば Q 磁石の磁気勾配などをサーチできる。

14.2 Orbit の入力パラメーターの説明

Orbit の入力ファイルの例として旧ライデンのものを紹介しよう。

```
RAIDEN TRANSFER MATRIX 1ST ORDER OPTIMIZATION.  
DPRM  
BEAM  
D=1 O=3  
DRFT      T-S  
          T-S = 0.25  
HEXM      SX1  
L = 0.1  KS = 0.0  
DRFT      S-Q  
S-Q = 0.05  
QUDM      Q1  
L=0.35, KQ=-6.685280, R=0.05, F=1  
DRFT      Q-S
```

```

Q-S = 0.1
MPLM      SX2
L=0.1    KQ=0.0    KS=16.641    KO=33.473    R=0.05    F=0
DRFT      S-D
S-D = 0.2
DEFM      D1
R=1.5, TH=60, N1=0, N2=999, N3=0, A=0, B=30, R1=-3.75, R2=2.15835
          T1=0, T2=-1.25, G=0.04, F=1
DRFT      D-M
D-M=0.749995
MPLM      CRM
L=0.00001    KQ=0.0000000    KS=-24719.0    KO=-57722.00    R=0.03    F=0
MPLM      MP
L=0.00001    KQ=0.0000000    KS=0.0000000    KO=0.0000000    R=0.03    F=0
DRFT      M-D
M-D=0.749995
DEFM      D2
R=1.5, TH=100, N1=0, N2=999, N3=0, A=40, B=33, R1=0.5, R2=-0.2806
          T1=-0.007168, T2=-0.01274, G=0.04, F=1
DRFT      D-Q
D-Q = 1.6
QUDM      Q2
Q2=0.8, KQ=-0.518369, R=0.31    F=1
DRFT      Q-F
Q-F=1.28977
ENDS
DMIN
    V=3,P=1,M=0,F=51,L=0.000000001,I=1000
FF=A(CRM,Y,B)**2 +A(X,A)**2 + A(Y,B)**2
Q1  2  0  0.1
Q2  2  0  0.1
Q-F  1  1.3  0.01
DEND
    2ND ORDER OPTIMIZATION
DMIN
    V=2, F=51, L=0.00000001, I=900    P=1
    F=A(X,AA)**2 + A(X,BB)**2
    SX2 3  0  0.1
    CRM 3  1000000000  100
DEND

```

3RD ORDER COMPROMIZE

DMIN

V=1, F=51, L=0.00000001, I=1000 P=1

F=A(X,AAA)**2 +A(X,ABB)**2

CRM 4 1000000000 100

1

DMIN

V=1,P=1,M=0,F=4,L=0.00000001,I=900

MP #=2 INI=10000000000 STEP=10

DEND

SECOND ORDER MINIMIZATION

DMIN

V=2, F=51, L=0.00000001, I=900 P=1

FFF = A(X,AA)**2 + A(X,BB)**2

SX2 #=3 INI=10000000000 STEP=0.1

MP #=3 INI=0.0 STEP=10

DEND

3RD ORDER OPTIMIZATION

DMIN

V=2 P=1 F=51 L=0.00000001 I=900

FFF= A(X,AAA)**2 + A(X,ABB)**2

SX2 #=4 INI=10000000000 STEP=0.1

MP #=4 INI=10000000000 STEP=10

DEND

FOCAL LINE ANGLE CALCULATION

DMIN

V=1 P=1, F=51, L=1000000000, I=900

FFF = -A(X,AT)/A(A,A)/A(X,T)

Q-F,#=1 INI=10000000000 UNIT=0.000001

DEND

FOCAL LINE CURVATURE CALCULATION

DMIN

V=1,P=1,F=51,L=10000000000 ,I=1

RO = ((A(X,T)*A(A,A))**2+A(X,AT)**2)**1.5 /A(A,A)

/(A(X,T)*(A(X,ATT)*A(A,A)-A(X,AT)*A(A,AT))

-A(X,AT)*(A(X,TT)*A(A,A)-A(X,AT)*A(A,T)))

Q-F #=1 INI=10000000000 UNIT=1

DEND

R RAIDEN TRANSFER MATRIX OPTIMIZED UP TO THIRD ORDER.

DREP

C

C

V=0 M=3
D1, CRM, M-D
DEND
1

DPRM 鍵となる命令 (DPRM, DALT, DREP, DMIN, DEND) の一つ。DPRM はこの

後に光学系のデータが続くことを示す。

BEAM どの様な計算をするかを指示する。D=1 は磁気光学系で運動量分散を持った系の計算であることを示し、O=3 は 3 次までの計算を示していることを指

DRFT ドリフト空間で、その長さを示す。名前を T-S と付けている。自由空間の長さは 0.25 m である。長さの単位は m でも cm でも構わない。但し採用した単位は他のパラメーターに至るまでこの入力データの中では統一しておくこと。

HEXM 6 重極磁石 L= 0.1 有効長が 0.1 m で、KS= 0.0 磁場の 2 次微分の半分を磁気剛性 (Magnetic Rigidity $B \cdot \rho$) で割ったものがゼロであることを示す。

QUDM 4 重極磁石。L= 0.1 有効長が 0.35 m で、KQ=-6.685280 磁場勾配を $B \cdot \rho$ (T m) で割ったもの。B=(-ky,-kx,0) なる磁場を想定しているので、-6.6... は 横方向に発散を意味する。

MPLM 多重極磁石。L=0.1 有効長が 0.1 m で、KQ=0.0 4 重極成分がゼロ、KS=16.641 6 重極成分が 16.641、KO=33.473 8 重極成分が 33.473。R=0.05 口径の半分が、0.05m である。F=0 は Fringing Field の計算は行わないことを指示。

DEFM dipole magnet D1

R=150 回転半径 ρ が 1.50 m、TH=60 曲げ角=60 deg.、N1=0, N2=0, N3=0, Median Plane 上の磁場は $B=B_0(1 + N1 \cdot x + N2 \cdot x^2 + N3 \cdot x^3)$ と展開されるとしている。A=0, B=30 A は入射角、B は出射角 で θ 方向に発散の方向を正としている。いまの場合斜め出射で θ 方向に発散するようにしている。-0.266667 入射磁場境界面の 0.463333 0.0 0.0 4 1

; $\rho=150$ cm 曲げ角=60 deg. u-values $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 0 (B = n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3)$ 斜め入射角=0 deg. 斜め出射角=-30 deg. 半径/ ρ (入射側の 2 次)=-0.266.. 半径/ ρ (出射側の 2 次)=0.46.. 入射側の 3 次 出射側の 3 次 pole gap の半分=4 cm fringing field の

種類

CNP Raiden Spectrograph Feb-16-2002

DPRM

BEAM

1 3

DRFT L1 ; L 1 というドリフト空間

40 ; 長さ 40 cm

MPLM Q1 ; Multipole Q1

35 -.000241887 0.0 0.0 14 1

; 磁石の長さ=35 cm quadrupole 強度 sextupole 強度 octupole 強度 口径=14cm fringing field の種類

DRFT L2

40

DEFM D1 ; dipole magnet D1

150 60 0 0 0 0.0 -30.0 -0.266667 0.463333 0.0 0.0 4 1

; $\rho=150$ cm 曲げ角=60 deg. n-values $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 0$ ($B = n_1x + n_2x^2 + n_3x^3$) 斜め入射角=0 deg. 斜め出射角=-30 deg. 半径/ ρ (入射側の 2 次)=-0.266.. 半径/ ρ (出射側の 2 次)=0.46.. 入射側の 3 次 出射側の 3 次 pole gap の半分=4 cm fringing field の種類

DRFT L3

出射 150

DEFM D2

150 60 0 0 0 40.0 -33.0 2.0 4.44667 0.0 0.0 4 1

DRFT L4

160

MPLM Q2

80 -.000241887 0.0 0.0 75 1

DRFT FP

133.0

ENDS

DREP

M=2

Q1.Q2

DEND

斜め入射角、斜め出射角の符号は θ 方向に発散の場合が正である。また入射側の 2 次、出射側の 2 次の係数は凹面の場合が正になる。

14.3 計算結果の見方