捩れ振子を利用したカシミール力の動的測定法の開発と、そのテストとしての万有引力定数Ｇの測定

1997 年度課題研究 P1
石橋真人 北口雅暁 白川晶子 寺前順之介
福田宏幸 向井貞篤 武藤亮太郎 吉田健太郎
泉康介 榊原正人

1998 年 7 月 15 日

概要

微小な力を測定する方法として捩れ振子がある。我々は捩れ振子を用いて量子電磁気学の予想であるカシミール力を、振子の周期の変化という動的な変化として観測することを試みる。導体板の幾何的配置の工夫により、カシミール力の効果をより大きくすることができる装置を設計した。

またその装置の試作として実際に周期約 227 秒の捩れ振子を作成し、同様に微少な力である重力を 10% の精度で測定することを目標とし、$G = (8.7 \pm 0.5) \times 10^{-8}\mathrm{cm}^3\mathrm{g}^{-1}\mathrm{sec}^{-2}$を得た。これらから捩れ振子を用いた測定の信頼性、カシミール力測定の可能性についても言及する。

目 次

1 はじめに **1**

1.1 カシミール力 . . . 1

1.1.1 カシミール効果とは . . . 1

1.1.2 カシミール効果の簡単なモデル 1 次元スカラー場 . . . 1

1.1.3 ゼロ質量スカラー場に対するカシミール効果 . . . 3

1.1.4 2 枚の平行導体板の間にある電磁場に対するカシミール効果 . . . 5

1.2 Lamoreaux の実験 . . . 6

1.2.1 Lamoreaux の実験装置と測定方法 . . . 6

1.2.2 Lamoreaux の実験によって得られた成果と、残された課題 . . . 7

1.3 カシミール力の動的測定 . . . 7

1.4 この実験の流れ . . . 8

2 捩れ振子の性質 **9**

2.1 捩れ振子の物性の理論 . . . 9

2.1.1 棒の捩れについて . . . 9

2.1.2 捩れ振子の周期 . . . 11

2.1.3 棒にかかる張力の振子の周期への影響 . . . 12

2.2 捩れ振子の試作と物性の確認 . . . 13

2.2.1 ワイヤの長さに関する依存性 . . . 14

2.2.2 モーメントに関する依存性 . . . 14

2.2.3 張力に関する依存性 . . . 15

2.3 長周期の捩れ振子の試作と、様々なノイズ、運動モード . . . 17

3 カシミール力測定のための捩れ振子の設計 **20**

3.1 振子の形状 . . . 20

3.1.1 形状の決定 . . . 20

3.2 カシミール力測定の理論的予想 . . . 22

3.2.1 縞模様の効果 . . . 22

3.2.2 予想される周期変化 . . . 22

3.2.3 捩れ振子の中立点のずれと、振幅の最小限界について . . . 23

3.2.4 中心ぶれの影響と調整 . . . 23

3.2.5 振子、円盤の傾きの影響 . . . 23

3.2.6 温度変化の与える影響 . . . 28

3.3 具体的な実験装置 . . . 28

3.3.1 捩れ振子の中立点のずれの検出と調整 . . . 28
3.3.2 上下の円盤の中心のぶれの検出と調整 . . . 29
3.3.3 上下の円盤の傾きのずれの検出と調整 . . . 29

4 テストとしての重力測定用捩れ振子 36
4.1 測定の原理 . . . 36
4.2 万有引力定数 G 測定のための振子の設計 . . . 38
4.2.1 誤差の伝播について . . . 38
4.2.2 具体的な誤差の大きさについて . . . 39
4.2.3 その他の誤差 . . . 40
4.2.4 誤差のまとめ . . . 46
4.3 装置 . . . 47
4.4 万有引力定数 G の測定 . . . 49
4.4.1 中心位置の動きと制御 . . . 49
4.4.2 中立点位置の制御 . . . 50
4.4.3 振子の高さと傾き . . . 50
4.4.4 重力源の位置の確認と移動 . . . 50
4.4.5 得られたデータ . . . 50
4.5 解析方法とその結果 . . . 50
4.6 考察 . . . 59

5 カシミール力測定への可能性の考察 61

6 結論 62

7 付録 63

Chapter 1

はじめに

1.1 カシミール力

1.1.1 カシミール効果とは

カシミール効果は 1948 年に H.B.G. Casimir によって理論的に予言された効果である [1]。この効果は境界のある空間や自明でないトポロジーを持つ時空において、量子化された場の零点振動エネルギーが変化して場のエネルギーの真空期待値がゼロでなくなるために生じる。巨視的なスケールにおいては真空中におかれた物体間に働く引力または斥力として現れる。これらの力はカシミール力と呼ばれる。

カシミール効果は物理学の実に様々な分野に現れる。[2] 例えば宇宙論においてカシミール効果は非自明なトポロジーを持つ時空で真空のエネルギー密度がゼロでなくなるという効果として現れる。時空のある 1 点での真空エネルギー密度は我々の宇宙の大局的なトポロジーに制限を与えるので、カシミール効果は宇宙論で大変重要であると言える。また、カシミール効果はハドロン物理においても重要である。ハドロンの bag model とはクォーク閉じ込めを説明するためのモデルのことでハドロンを束縛している bag の表面においてカレントがゼロになるというモデルである。ハドロンの性質を計算するときにはクォークやグルーオンの場のカシミール効果によるエネルギーも全エネルギーに含めなければならない。最後に、近年カシミール効果は素粒子物理学においても注目を集めている。くりこまれた超対称性のゲージ理論や超重力理論から予言される種々の質量ゼロ粒子の交換によって重力でも電磁気力でもない長距離力の存在が予想される。これらの長距離力を特徴づける定数はカシミール力の測定結果により制限を受ける。

1.1.2 カシミール効果の簡単なモデル 1 次元スカラー場

ここでは、1 次元スカラー場を例にとり、カシミール効果が現れることを見る。

1 次元スカラー場 $\varphi(x,t)$ は Klein-Gordon 方程式

$$(\partial^i \partial_i - m^2)\varphi = 0 \tag{1.1}$$

を満たす。今、この場が境界条件 ：

$$\varphi(0,t) = \varphi(a,t) = 0 \tag{1.2}$$

を満たす時、Klein-Gordon 方程式は次の解を持つ。

$$\varphi_n^{\pm}(x,t) = \frac{1}{(a\omega_n)^{1/2}} \exp(\pm i\omega_n t)\sin(k_n x) \tag{1.3}$$

$$\omega_n = (m^2 + {k_n}^2)^{1/2}, k_n = \frac{n\pi}{a}(n = 1, 2, ...) \tag{1.4}$$

一般解は生成・消滅演算子 $a_n^\dagger, a_n$ を用いて次のように表される。

$$\varphi(x,t) = \sum_n (a_n{}^\dagger \varphi^+(x,t) + a_n \varphi^-(x,t)) \tag{1.5}$$

ところで、1 次元スカラー場 $\varphi(x,t)$ の運動量テンソル $T_{ij}(i,j=0,1)$ の $(0,0)$ 成分 T_{00} は次で与えられる。

$$T_{00} = \frac{1}{2}\sum_n [(\omega_n^2 + m^2)\varphi_n^+ \varphi_n^- + (\partial_x \varphi_n^-)(\partial_x \varphi_n^+)](a_n^\dagger a_n + a_n a_n^\dagger) \tag{1.6}$$

上式に、(1.5) を代入すると、エネルギー密度の真空期待値は次のようになる。 (以下ではエネルギー密度の真空期待値を真空のエネルギー密度と呼ぶことにする。)

$$< 0|T_{00}|0 >= \frac{1}{2a}\sum_n \omega_n + \Delta(m^2, x) \tag{1.7}$$

ここに、

$$\omega_n = (m^2 + k_n^2)^{1/2}, \Delta(m^2,x) \equiv -\frac{m^2}{2a}\sum_n \frac{\cos(2k_n x)}{\omega_n}, k_n = \frac{2\pi n}{a} \tag{1.8}$$

である。この式を見ると、境界条件があることにより真空のエネルギー密度には$\Delta(m^2,x)$ という項が加わることが分かる。この項はスカラー場の質量がゼロでない時にのみ存在する。だがこれは場所 x の関数であり、$0 \le x \le a$ の領域で積分するとゼロになる。結局、場の質量によらず真空のエネルギーは次のようになる。

$$E = \int_0^a dx < 0|T_{00}|0 >= \frac{1}{2}\sum_n \omega_n \tag{1.9}$$

ところで、振動数 ω_n は場の境界条件に依存するので真空エネルギーも境界条件に依存することが期待される。だが、ω_n は $n \to \infty$ で発散するので $(1.1.2)$ も発散してしまうことを注意しなければならない。この無限大を解消するために、次の処方を用いる。

全ての $\alpha \neq 0$ に対して $\omega \to \infty$ で $f_\alpha \to 0$ となり、$\alpha = 0$ で ω_n に依らず $f_\alpha(\omega) = 1$ となるような関数 $f_\alpha(\omega) \le 1$ を考える。このような関数の例としては $f_\alpha(\omega_n) = \exp(-\alpha\omega_n)$ 等がある。そこで、振動数の組 $\omega_n^{a,b}$ に対して真空エネルギーを計算するときに ω_n の和を計算するのではなく$\omega_n f_\alpha(\omega_n)$ の和を計算するようにする。するとこの和は$\alpha \neq 0$ に対して収束し、 α に依存する有限の値を持つ。その後で $\alpha \to 0$ の極限をとれば望んでいた有限の真空エネルギーを得る。また、ある系の異なる境界条件 a, b のもとでの「真空エネルギーの差」は次のように定義される。

$$\lim_{\alpha\to 0}(\sum_n \omega_n^a f_\alpha(\omega_n^a) - \omega_n^b f_\alpha(\omega_n^b)) \tag{1.10}$$

同様にして、境界条件を課した場合の真空エネルギー密度の変化分は次で定義される。ここで M は Minkowski 時空を表す。

$$\varepsilon = \lim_{\alpha\to 0}(< 0|T_{00}|0 >_\alpha - < 0_M|T_{00}|0_M >_\alpha) \tag{1.11}$$

これを 「くりこまれた真空エネルギー密度」と以下で呼ぶ。また、くりこまれた真空エネルギー E は ε の空間積分で定義しよう。

ここで、$(1.1.2)$ で定義した ε を実際に計算することを考えよう。それには次の Abel-Plana の公式が便利である。Abel-Plana の公式 ：

$$\sum_{n=1}^\infty F(n) = \int_0^\infty F(y)dy - \frac{F(0)}{2} + i\int_0^\infty \frac{F(it) - F(-it)}{\exp(2\pi t) - 1}dt \tag{1.12}$$

これより、くりこまれた $\sum_{n=1}^{\infty} F(n)$ の値 $\mathrm{reg}\sum_{n=1}^{\infty} F(n)$ は次のように書けることが分かる。

$$\mathrm{reg}\sum_{n=1}^{\infty} F(n) = -\frac{F(0)}{2} + i\int_0^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{\exp(2\pi t) - 1} dt \tag{1.13}$$

特に、質量ゼロの 1 次元スカラー場に対して ε は簡単に計算できて

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mathrm{reg}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \\ &= \frac{\pi}{2a^2}\mathrm{reg}\sum_{n=1}^{\infty} n \qquad (\because \omega_n = \frac{\pi n}{a}) \\ &= -\frac{\pi}{a^2}\int_0^{\infty} \frac{dtt}{\exp(2\pi t) - 1} = -\frac{\pi}{24a^2} \end{aligned} \tag{1.14}$$

となる。また、くりこまれた真空エネルギーは

$$E = \varepsilon a = -\frac{\pi}{24a} \tag{1.15}$$

となる。つまり、境界条件があることによって真空エネルギーがゼロでない有限の値になることが分かった。この形を見れば分かるように、境界条件となる壁の間の距離が変化すると壁の内側の真空エネルギー E も変化する。ところで、壁の外側の真空エネルギーも同じ境界条件があるためにゼロでない値を持つが壁の間の距離が変わってもこの値は変化しない。よって、系全体の真空エネルギーは $-a^{-1}$ の依存性を持ち、両端の壁を近付ける方向に力を及ぼす。これがカシミール力である。

1.1.3 ゼロ質量スカラー場に対するカシミール効果

ここでは、長方形を境界とする 2 次元ゼロ質量スカラー場に対するカシミール効果と直方体を境界とする 3 次元ゼロ質量スカラー場に対するカシミール効果を見る。

< 長方形を境界とする 2 次元ゼロ質量スカラー場に対するカシミール効果 >

2 次元ゼロ質量スカラー場 $\varphi(x, y)$ (今、場の時間変動は考えないことにする。) が長方形領域 ：

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \tag{1.16}$$

に存在し、境界上でゼロとなるという状況を考える。このような境界条件を満たすような解は次のようになる。

$$\varphi_{mn}^{(\pm)}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{ab\omega_{mn}}} \exp(\pm i\omega_{nm}t) \sin k_m x \sin k_n y \tag{1.17}$$

ここに、

$$k_m = \frac{\pi m}{a}, k_n = \frac{\pi n}{b}, {\omega_{mn}}^2 = {k_m}^2 + {k_n}^2 \tag{1.18}$$

である。

ここで、$< 0|T_{ik}|0 >$ でなく、これを空間平均した $< 0|\overline{T_{ik}}|0 >$ を計算する。この時、$\overline{\sin k_n x} = 0$ より、非対角成分は消える。

$$< 0|\overline{T_{ik}}|0 >= \frac{1}{2ab}\sum_{m,n=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} \omega_{mn} & & \\ & -\frac{{k_m}^2}{\omega_{mn}} & \\ & & -\frac{{k_n}^2}{\omega_{mn}} \end{pmatrix}$$

真空エネルギー密度 $<0|\overline{T_{00}}|0>$ を求めよう。まず、n についての和を実行する。

$$\begin{aligned} S_m &\equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_{mn}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^{1/2} \\ &= -\frac{m}{2a}+\int_0^{\infty}dy\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}+2\int_{mb/a}^{\infty}\left(\frac{t^2}{b^2}-\frac{m^2}{a^2}\right)^{1/2}\frac{dt}{\exp(2\pi t)-1} \end{aligned} \tag{1.19}$$

ここで、Abel-Plana の公式 (1.12) を用いた。次に m についての和をとる。再び Abel-Plane の公式を用いると第 1 項の発散項を除いて第 2、3 項が有限の寄与をすることが分かる。他の成分も計算して結局、次を得る。

$$\begin{aligned} <\overline{T_i^k}> &= \frac{\zeta(3)}{16\pi a^3}\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & -1\end{pmatrix}+\frac{\pi}{48a^2b}\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 0\end{pmatrix}+\frac{\pi}{a^3}G_i^k\left(\frac{b}{a}\right) \\ &\equiv t_i(a,b)\delta_i^k \qquad (\text{ただし、}i\text{ についての和は取らない。}) \end{aligned} \tag{1.20}$$

ここで、G_i^k は次のように書ける。

$$G_i^k=\int_{-1}^{\infty}ds\begin{pmatrix}\sqrt{s^2-1} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{s^2-1}} & \\ & & -\frac{s^2}{\sqrt{s^2-1}}\end{pmatrix}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2}{\exp(2\pi\gamma ms)-1} \tag{1.21}$$

ここに、$\gamma=\frac{a}{b}$ であり、$\gamma(z)$ はリーマンのゼータ関数である。$\gamma\geq$ の時、G_i^k は前の 2 項に比べて十分小さい。$a=b$ の場合 G_0^0 の $<\overline{T_i^k}>$ への寄与は 1(1.21) から分かる。また $\gamma>1$ の時 G_i^k の要素は $\exp(-2\pi\gamma)$ の依存性を持ち、前の 2 項に比べて十分小さくなることが分かる。

<直方体を境界とする 3 次元ゼロ質量スカラー場に対するカシミール効果>

上でやった、長方形を境界とする 2 次元ゼロ質量スカラー場の場合を直方体を境界とする 3 次元ゼロ質量スカラー場の場合に拡張する。領域 ：

$$0\leq x\leq a, 0\leq y\leq b, 0\leq z\leq c \tag{1.22}$$

に存在し、境界上でゼロになるという境界条件に対して、3 次元ゼロ質量スカラー場のエネルギー運動量テンソルの真空期待値の空間平均は次のように求まる。

$$\begin{aligned} <\overline{T_i^k}> &= \frac{\pi^2}{1440a^4}\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & 3 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{pmatrix}+\frac{\zeta(3)}{32\pi a^3b}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & -2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1\end{pmatrix} \\ &+ \frac{\zeta(3)}{32\pi a^3c}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & -2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0\end{pmatrix}+\frac{\pi}{96a^2bc}\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0\end{pmatrix} \\ &- \frac{1}{a^4}\alpha_i^k\left(\frac{b}{a};\frac{c}{b}\right) \\ &\equiv \mathcal{T}_i^k(a,b,c). \end{aligned} \tag{1.23}$$

ここで、$\alpha_i^k\left(\frac{b}{a};\frac{c}{b}\right)$ は他の 2 項に比べて $<T_i^k>$ への寄与が無視できるような小さい項である。

1.1.4　2 枚の平行導体板の間にある電磁場に対するカシミール効果

2 枚の平行導体板の間にある電磁場に対するカシミール効果を考えよう。

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c \tag{1.24}$$

内に電磁場が存在し、境界に完全導体板があるという状況を考える。

まず、真空中の Maxwell 方程式は次のようになる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{1.25}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.26}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 0 \tag{1.27}$$

また、電磁場に対する境界条件は次のようになる。完全導体板の表面で ：

$$\mathbf{E}_t = 0, H_n = 0 \tag{1.28}$$

ところで、$\mathbf{E}_t = 0$ なる境界条件を満たす解は自動的に $H_n = 0$ を満たすので、境界条件としては 「表面で $\mathbf{E}_t = 0$」 のみを考えれば良い。

Maxwell 方程式 (1.25), (1.26) の解のうち、このような境界条件を満たすものは次のようになる。

$$E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{1.29}$$

$$E_x = A_2 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{1.30}$$

$$E_x = A_3 \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{1.31}$$

ここで、

$$k_x = \frac{n_1 \pi}{a}, k_y = \frac{n_2 \pi}{b}, k_z = \frac{n_3 \pi}{c} \tag{1.32}$$

$$\omega_{n_1 n_2 n_3}{}^2 = c^2 \left[\left(\frac{\pi n_1}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_2}{b} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_3}{c} \right)^2 \right] \tag{1.33}$$

である。また、Maxwell 方程式の残りの式 (1.27) より次が成立する。

$$A_1 k_x + A_2 k_y + A_3 k_z = 0 \tag{1.34}$$

ここで、n_1, n_2, n_3 は $0, 1, 2, ...$ をとりうるが、(1.30) を見ると n_1, n_2, n_3 のうち同時に 2 つ以上がゼロになると $\mathbf{E} = 0$ となってしまうので n_1, n_2, n_3 のうち同時に 2 つ以上はゼロになれないことが分かる。

さて、電磁場の真空のエネルギー密度を計算してみよう。それには、全ての可能な$\omega_{n_1 n_2 n_3}$ のモードを足しあげれば良いがその計算は

- $n_1 \neq 0$ かつ $n_2 \neq 0$ かつ $n_3 \neq 0$ の場合は 3 次元の質量ゼロスカラー場の場合と同じ、
- n_1, n_2, n_3 のうちどれか 1 つがゼロの場合は 2 次元の質量ゼロスカラー場の場合と同じ

であることが分かる。ここで、 式 (1.34) を見れば分かるように $n_1 \neq 0$ かつ $n_2 \neq 0$ かつ $n_3 \neq 0$ なる (n_1, n_2, n_3) の組に対して A_1, A_2, A_3 のうち 2 つしか独立なものはないということに注意しなければならない。つまり、$n_1 \neq 0$ かつ $n_2 \neq 0$ かつ $n_3 \neq 0$ なる (n_1, n_2, n_3) の組に対して固有振動数は 2 重に縮退している。

従って、電磁場のエネルギー運動量テンソルの真空期待値は、前節でやった 2、3 次元の質量ゼロスカラー場のエネルギー運動量テンソルの値を用いて次のように書ける。

$$< \overline{T}_i^k >= 2\mathcal{T}_i^k + \frac{1}{a}\mathrm{diag}(t_0, 0, t_1, t_2)(b, c) + \frac{1}{b}\mathrm{diag}(t_0, t_2, 0, t_1)(c, a) + \frac{1}{c}\mathrm{diag}(t_0, t_1, t_2, 0)(a, b) \tag{1.35}$$

ここで、$\mathcal{T}_i^k$ の前の因子 2 は固有振動数の縮退を考慮したためである。

特に $a = b$ の場合に上式を計算するとエネルギー運動量テンソルの (0,0) 成分の真空期待値 (真空のエネルギー密度) は次のようになる。

$$\varepsilon = \begin{cases} -\frac{1}{a^4}\left[\frac{\pi^2}{720} + \frac{\zeta(3)}{16\pi} - \frac{\pi}{24}\frac{a}{c}\right] & (a \leq c), \\ -\frac{1}{c^4}\left[\frac{\pi^2}{720} - \frac{\pi}{8}\left(\frac{c}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{48} - \frac{\zeta(3)}{16\pi}\right)\left(\frac{c}{a}\right)^3\right] & (\mathrm{a} \geq \mathrm{c}), \end{cases} \tag{1.36}$$

ここで、G_i^k や α_i^k などの小さい項は無視した。今、$a = b$ に比べて c が非常に小さい場合を考える。すると、(1.36) で $\left(\frac{c}{a}\right) \to 0$ として次を得る。

$$\varepsilon = -\frac{\pi^2}{720c^4} \tag{1.37}$$

これより、真空のエネルギーは次のようになる。(c の代りに a を用いることにする。)

$$E = \varepsilon a = -\frac{\pi^2}{720a^3} \tag{1.38}$$

つまり、2 枚の完全導体板で挟まれた空間のエネルギーは負の有限値を持つことが分かる。従って、2 枚の導体板の間に働くカシミール力 F_cは次のように求まる。

$$F_c = -\frac{\partial}{\partial a}E = -\frac{\pi^2}{240a^4} = -\frac{\pi^2\hbar c}{240a^4} \tag{1.39}$$

最後の等号で自然単位系から MKSA 単位系に戻した。我々は、この極板間の距離の 4 乗に反比例する引力を今回の実験で測定する。

1.2 Lamoreaux の実験

カシミール力の測定としてはすでに、Lamoreaux の実験がある [3]。彼は捩れ振子を静的に用いて (つまりねじらずに)、金属平板と金属球殻の間のカシミール力を測定した。以下その実験について簡潔に述べる。

1.2.1 Lamoreaux の実験装置と測定方法

実験装置を上から見た図を図 1.1に示す。

compensator plate と捩れ振子はコンデンサーを形作る。二つの compensator には、定電圧 V_0 が掛けられている。「回路」は、この左右二つのコンデンサーの容量を一致させるように、つまり左右の compensator と捩れ振子の間の距離を等しくするように、左右の compensator に補正電圧を掛ける。

さて、いま金属平板と金属球殻の間にカシミール力 F_c が働いたとする。すると、捩れ振子が回転しようとするが、「回路」の働きにより compensator に補正電圧 δV が加えらる。その結果、捩れ振子に $F = 2V_0\delta V\frac{dC}{dx}$ (Cはコンデンサーの静電容量、x は conpensator と捩れ振子間の距離) の力が加わり、カシミール力を打ち消す ($F_c = F = 2V_0\delta V\frac{dC}{dx}$)。結局捩れ振子はねじれることなく中立点に静止し続ける。この時の δV を測定すれば、F_c を求めることができる。

また、Piezo Stacks を用いて金属平板と金属球殻の距離を変えることができるので、カシミール力の金属板間距離依存性を調べることができる。

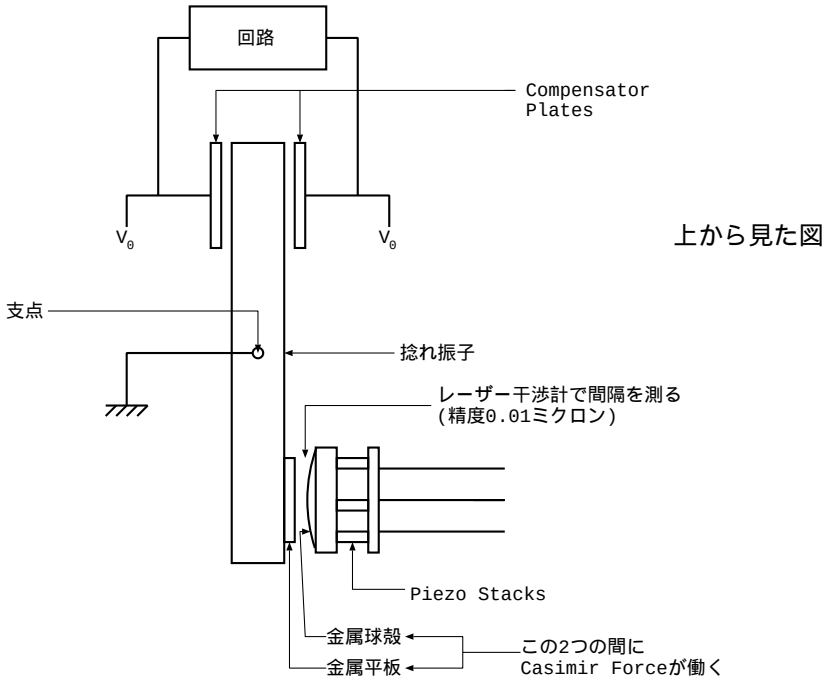

図 1.1: Lamoreaux のカシミール力測定装置を上から見た図

1.2.2 Lamoreaux の実験によって得られた成果と、残された課題

1.2.1のような実験により、Lamoreaux は、金属平板と金属球殻間の距離 a が $0.6\mu m \leq a \leq 6\mu m$ の範囲で、金属板と金属球殻の間に働くカシミール力が、理論式

$$F_c = 2\pi R\left(\frac{1}{3}\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{a^3}\right) \tag{1.40}$$

と 5%の精度で一致することを確認した。ここで R は金属球殻の曲率半径である。この式 (1.40) は 2 枚の導体板の間に働くカシミール力の式とは異なるがこれは境界の幾何学的な差によるものである。

しかし、残された課題として、

1. カシミール力の温度補正項の効果を確認するには精度が足りなかった。

2. 有限の電気伝導率をもつ金属板を使用した場合のカシミール力の補正式の大きさも確認できなかった。

が挙げられる。

1.3 カシミール力の動的測定

Lamoreaux の実験は静的なものであった。つまり、カシミール力の働く金属板をワイヤで吊り下げてはいるものの、金属板は静止している。

我々は、より素朴に、カシミール力によって捩れ振子の周期を変化させることができないかと考えた。つまり、ワイヤで吊り下げた金属板を中立点から回転させると、ワイヤが捩れる。すると、捩れたワイヤは 2.1 で導出される捩れ復元力によって中立点に戻ろうとし、金属板にトルク N を働かせる。その形は、金

属板の回転角を θ とし、ワイヤの捩ればね定数を K とおくと、

$$N = -K\theta$$

となり、金属板は回転角方向に単振動する。

我々は、そこにもう一枚の金属板を近づけ、ワイヤに吊り下げられた金属板にカシミール力を及ぼさせることによって、金属板に働くトルクを変化させ、金属板の回転角方向の振動の周期を変化させることができないか、と考えたのである。この方法では、Lamoreaux の実験より高い精度でカシミール力を測定することは難しく、Lamoreaux の実験で残された課題を解決することは困難である。しかし、これは Lamoreaux の実験とは独立な方法である。また、QED の効果の一つを、捩れ振子の周期変化という非常に分かりやすい形で実感することができる。

1.4 この実験の流れ

我々は、カシミール力を、捩れ振子を使って動的に検出することを目標にした。そのために、

1. 実際に捩れ振子を作り、周期の安定性など、基礎的な動作特性の確認を行った。(Chapter 2)。
2. カシミール力を検出できる捩れ振子の設計を行った (Chapter 3)。
3. もし捩れ振子を使ってカシミール力を見ることができるなら、当然、それより強い力である重力も見ることができるはずである。そこで、カシミール力測定の予備実験として、捩れ振子を使って 重力定数 G を 10%の精度で測定しようとしてみた (Chapter 4)。
4. 2. と 3. で得た捩れ振子の性質を元に、カシミール力を測定するためにはこれから何を改善すればよいのかを考察した (Chapter 5)。

以下、順に述べる。

Chapter 2

捩れ振子の性質

カシミール力のような微少な力の測定には捩れ振子が有用である。

2.1 捩れ振子の物性の理論

この節では最初に棒の捩れについての一般論を展開し、その後で我々が用いた捩れ振子の周期の式を導出する。

2.1.1 棒の捩れについて

捩れ変形とは、棒の各横断面が下部断面に対してある角だけ回転するが、棒は直線のままであるような変形をいう。棒が長い時は、互いに十分離れた断面はちょっと捩っても大きい角回転をなすであろう。

任意断面形の細い直線棒を考える。棒軸を z 軸に、棒内のある点を原点とする座標系をとり、棒の単位長さ当たりの回転角 τ を導入し、これを捩れ角と名付けよう。ということは、距離 dz にある 2 個の無限近接横断面が互いに角 $d\varphi = \tau dz$ だけ回転するという意味を持つことである。 捩れ変形それ自体、すなわち棒の隣接部分の相対変位は微小であると仮定される。その条件づけとしては横断面の寸法の程度に距離を持った断面間の相対回転角が微小、すなわち

$$\tau R \ll 1 \tag{2.1}$$

ということである。

今、座標原点の近傍で棒の長さの短い小さい部分に注目し、この部分における棒の点の変位 $\boldsymbol{u}$ を求めてみよう。

動径ベクトル $\boldsymbol{r}$ が微小角 $\delta\varphi$ だけ回転する時は、良く知られているようにその先端の変位は公式

$$\delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r} \tag{2.2}$$

で与えられる。今の場合、$\delta\boldsymbol{\varphi} = (0, 0, \tau z)$ 、$\boldsymbol{r} = (x, y, 0)$ であるので変位ベクトル成分 u_x, u_y は

$$u_x = -\tau zy, \qquad u_y = \tau xz \tag{2.3}$$

また一般に棒の点は z 軸方向の変位も行なう。しかしこの変位は $\tau = 0$ の時には存在しないから、 τ が小さいならば τ に比例するものと考えることが出来る。よって

$$u_z = \tau\psi(x, y) \tag{2.4}$$

ここに $\psi(x,y)$ は x および y のある関数で、捩れの関数と呼ばれている。

今 $\boldsymbol{u}$ がわかると歪みテンソル成分がわかる。ここで考察対象の領域における $\boldsymbol{u}$ は微小であるから公式 $u_{ik} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ を用いることが出来る。よって歪み分布は

$$u_{xx} = u_{yy} = u_{xy} = u_{zz} = 0, \qquad u_{xz} = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right), \qquad u_{yz} = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right). \tag{2.5}$$

応力テンソル成分 σ_{ij} は、上式と応力テンソルと歪みテンソルの間の関係式[1]

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_k u_{kk}\delta ij + 2\mu u_{ij} \tag{2.6}$$

より

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0, \qquad \sigma_{xz} = \mu\tau\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right), \qquad \sigma_{yz} = \mu\tau\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) \tag{2.7}$$

となる。(μ は剛性率で、物質により定まっている。)

ここで応力の釣り合いの式 $\partial_i \sigma_{ij} = 0$ を考慮して補助関数 $\chi(x,y)$ を次の式で定義する。

$$\sigma_{xz} = 2\mu\tau\frac{\partial \chi}{\partial y}, \qquad \sigma_{yz} = -2\mu\tau\frac{\partial \chi}{\partial x} \tag{2.8}$$

(6) 式と (7) 式より χ が満たす方程式

$$\nabla^2 \chi = -1 \tag{2.9}$$

が得られる。棒表面上の境界条件については、もし断面周辺が単連結曲線の時は

$$\chi = 0 \tag{2.10}$$

ととることが出来る[2] 。境界条件 (9) の下で、方程式 (8) を解くことによって χ が求まり、最後に捩れの関数 ψ を求めることが出来る。

次に捩りを受けている棒の自由エネルギーを求めてみよう。単位体積当たりのエネルギーは

$$v_e = \frac{\sigma_{ik}u_{ik}}{2} = \sigma_{xz}u_{xz} + \sigma_{yz}u_{yz} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2\right) \tag{2.11}$$

ここに (7) を代入すれば

$$v_e = 2\mu\tau^2(\nabla\chi)^2 \tag{2.12}$$

ここに ∇ は 2 次元の grad 。これより棒の単位長さ当たりの捩れエネルギーは横断面面積について積分することにより得られ、その値は $C\tau^2/2$ に等しい、ただし係数は

$$C = 4\mu\int(\nabla\chi)^2 ds. \tag{2.13}$$

この C は棒の捩り剛性と呼ばれている。よって棒の全弾性エネルギーは、その長さ全体についてとられた積分

$$V_e = \frac{1}{2}\int C\tau^2 dz \tag{2.14}$$

に等しい。

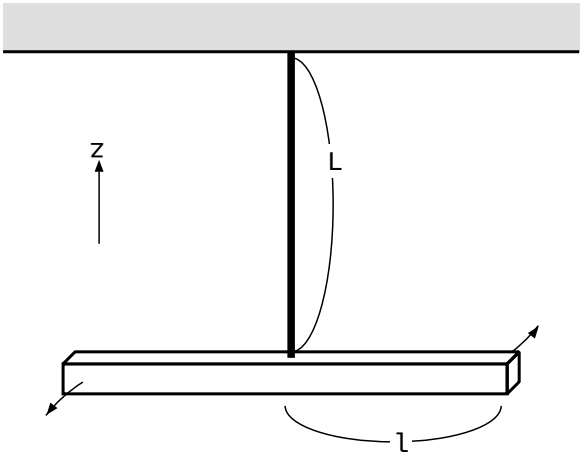

図 2.1: 一端固定の振子

2.1.2 捩れ振子の周期

はじめに図 2.1のように棒の 1 端面が固定され、他端面に腕がついていてそこにだけ外力が働いている場合を考察しよう。

今腕には棒を捩ろうとする力 $\sum \boldsymbol{F} = 0$ の偶力のみが働いているとして、この偶力のモーメントを M と書く。ここで全自由エネルギーの極小条件より、捩れ角 τ は一定であるので棒の全弾性エネルギーは

$$V_e = \frac{1}{2}C\tau^2 L = \frac{1}{2}C\frac{\varphi^2}{L} \tag{2.15}$$

となる。(φ は全回転角 ; $\varphi = \tau L$) よって腕にはたらく φ 方向の力は

$$F_\varphi = -\frac{1}{l}\frac{dV_e}{d\varphi} = -\frac{C}{Ll}\varphi \tag{2.16}$$

である。

それでは図 2.1の系の運動方程式を立てよう。腕の z 軸回りの慣性モーメントを I とすると運動方程式は

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M = -2l \times \frac{C}{2Ll}\varphi = -\frac{C}{L}\varphi \tag{2.17}$$

これは

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{C}{LI}\varphi = -w^2\varphi, \qquad w = \sqrt{\frac{C}{LI}} \tag{2.18}$$

となり、振子の周期は

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{LI}{C}} \tag{2.19}$$

で与えられる。

次に図 2.2のような両端固定の振子を考えよう。

この系の全弾性エネルギーは上と下の弾性エネルギーを足したもので、すぐわかるように運動方程式は

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -C\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\varphi \tag{2.20}$$

[1] ここで棒が等方弾性体であることを仮定している。等方弾性体とはその物理的性質が空間的方向性を持たないもので、金属やガラスがこれにあたる。

[2] 詳しくは、Landau [4] など参照のこと

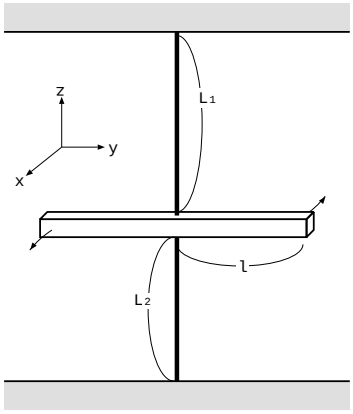

図 2.2: 両端固定の捩れ振子

となる。これよりこの振子の周期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)}} \tag{2.21}$$

この式を見れば振子の周期が、腕にかかるモーメントや棒の長さ、その上下比などにどのように依存しているかがわかる。

2.1.3 棒にかかる張力の振子の周期への影響

初めに我々が使おうと思っている円断面の棒 (半径 R) の捩り合成と捩れ関数を求めてみよう。式 (8)、(9) より円断面棒に対しては (座標原点は断面中心)

$$\chi = \frac{1}{4}\left(R^2 - x^2 - y^2\right) \tag{2.22}$$

捩り剛性は式 (12) より

$$C = \frac{\mu\pi R^4}{2} \tag{2.23}$$

式 (6)、(7) から関数 ψ を求めると $\psi = \text{const.}$ 。これは棒全体として z 軸方向に沿うて生じる単純な変位に対応している。よって捩りに際して棒の横断面は平面のままでいる。

ここで初めの図 2.1の状況において、さらに棒に z 軸方向の時間的に一定な張力 $\pi R^2\alpha$ がかかっているとする[3] 。この時の応力テンソルは、式 (7) より

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{zz} = \alpha, \quad \sigma_{xz} = -\mu\tau y, \quad \sigma_{yz} = \mu\tau x \tag{2.24}$$

となる。張力が小さく、弾性体の歪みが小さい場合は、Fuck 則 (応力と歪みとの線形関係) が成り立っていて、式 (6) を u_{ij} について解いた式を用いることにより、歪みテンソルが

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\alpha, \quad u_{zz} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda(3\lambda + 2\mu)}\alpha, \quad u_{xy} = 0, \quad u_{xz} = -\frac{\tau}{2}y, \quad u_{yz} = \frac{\tau}{2}x. \tag{2.25}$$

と分かる。よってこの時の棒の自由エネルギーは

$$V_e = \frac{1}{2}C\tau^2 L + \frac{\lambda + \mu}{2\lambda(3\lambda + 2\mu)}\alpha^2\pi R^2 L \tag{2.26}$$

[3] たとえば、振子を重力場中においた場合を考える。ただこの場合には棒の重さを無視する。

となる。L, R, C は既に定義されている定数だが、張力を加えた後の値を使わなければいけないことに注意する。このように張力が小さい場合には、 (棒の長さや半径は張力を加えた後測ったものを使うとすると) その効果は棒のエネルギーに単なる定数を付け加えるだけであり、周期に影響をおよぼさない。

しかし張力がある程度大きい場合には、Fuck 則が成り立たなくなる。いいかえると、$\frac{\partial u_z}{\partial z}$ が大きくなって歪みテンソルの正確な表式

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \tag{2.27}$$

において、右辺第 3 項が無視できなくなる。この場合には棒の自由エネルギーに新しくτ^2 に比例する項が付け加わり、捩り剛性 C を変化させる。そのため振子の周期が変化する。どのぐらい変化するかは棒の物性に拠り、実験によって測られる。

2.2 捩れ振子の試作と物性の確認

我々は、まず、図 2.3に示すような捩れ振子を試作し、捩れ振子の周期が、ワイヤの長さ、振子の慣性モーメント、およびワイヤの張力にどのように依存するのか確認した。

理論によれば、周期はワイヤの張力には依存しない。また、周期の、ワイヤの長さと振子の慣性モーメントに対する依存性は、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2})}} \tag{2.28}$$

と書けることが知られている。L_1 と L_2 は図 2.3における上下のワイヤの長さ、C はワイヤの性質を表す定数である。我々はこれが我々の試作機において成り立っているか調べた。

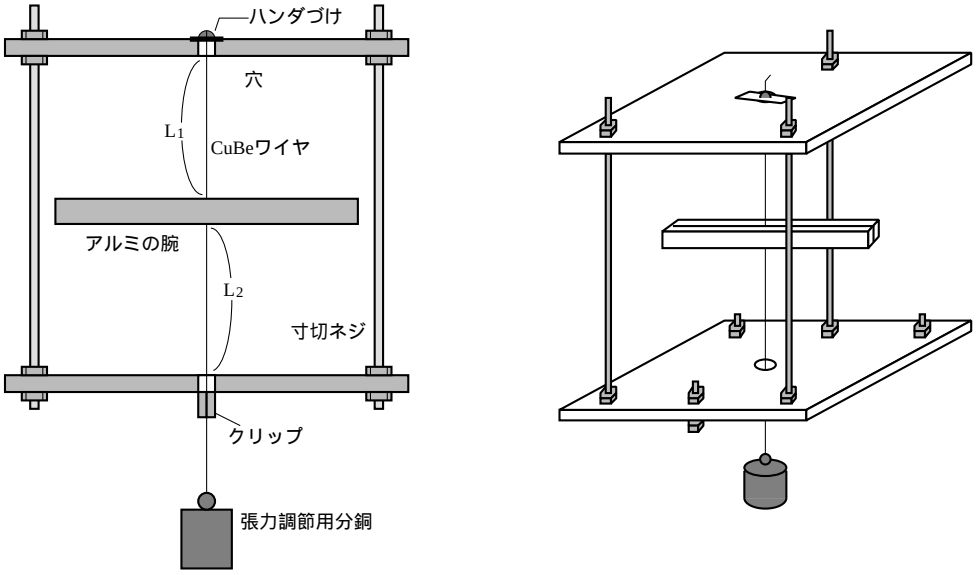

図 2.3: 捩れ振子試作 0 号機。板状のアルミ 2 枚でワイヤをはさんで振子の腕にしている。分銅によってワイヤにかかる張力を調節できる。寸切ネジで台全体の高さを調節し、ワイヤの長さを変えることができる。この際、クリップでワイヤを台に固定し、ワイヤの有効な長さを台の高さに限定している。

2.2.1　ワイヤの長さに関する依存性

我々は、振子の上下のワイヤの長さの比を $1:1$ に保った。つまり $L_1 = L_2 \equiv L$ の状態にした。すると式 (2.28) は

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{C} L \tag{2.29}$$

と書くことができる。ここで $2C = C$ とおきなおした。

この状態で、ワイヤの長さ L を変化させて捩れ振子の周期を測定し、横軸 L、縦軸 T^2 のグラフを作った。(図 2.4) 各点で振子の周期 T は ± 0.1 s の誤差を持っているとした。データ点を 1 次関数 $f(x) = Ax + B$ でフィットし、

$$\chi^2 = \frac{\sum_i (\frac{f(T^2) - l_i^2}{\sigma_i})^2}{N - n}$$

(N:測定点の数、n:fitting parameter の数) とおいて、次の結果を得た。

$A = 22.6396,\ B = -4.57284,\ \chi^2 = 3.60$

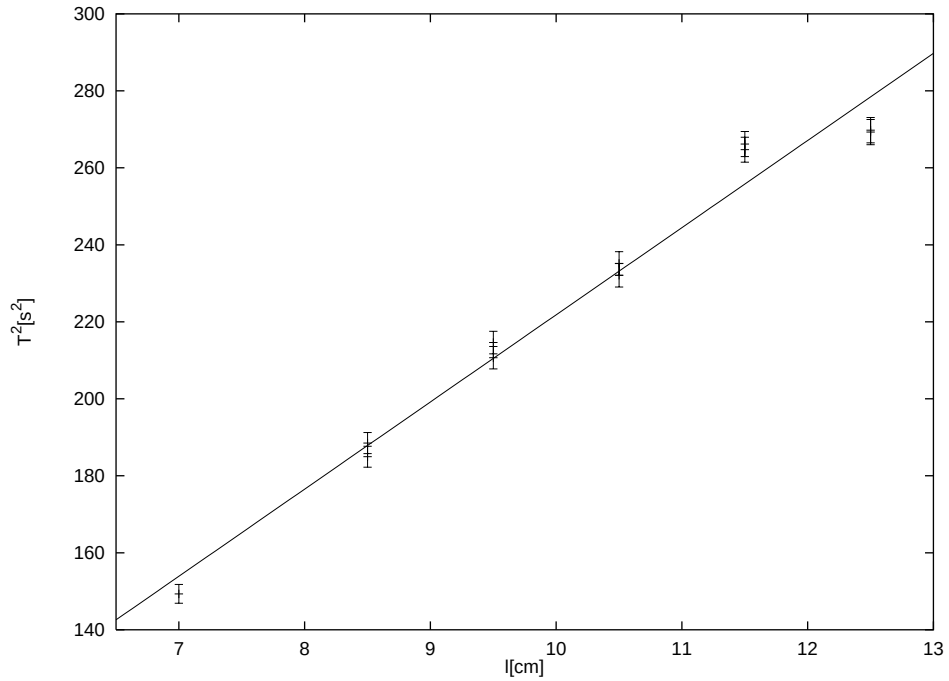

図 2.4: 捩れ振子の周期 T の、ワイヤの長さ L への依存性

これらを見ると、捩れ振子の周期の、ワイヤの長さに関する依存性は、理論式で良く表せているようである。

2.2.2　モーメントに関する依存性

理論によれば、モーメントと周期の関係は、式 (2.28) で表される。ここで、モーメントを δI 変化させると、

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{A}(I + \delta I)$$

となり、周期の 2 乗はδI の 1 次関数である (ただし、$A = C(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2})$)。ここで、この試験の場合の δI を考える。中心から l のところに、質量 m のおもりをつけたとき、このおもりのモーメントへの寄与は

ml^2 であるから、左右にそれぞれつけると、$\delta I = 2ml^2$ である。これより、振り子の腕のモーメントを I とすると、

$$l^2 = \frac{A}{8\pi^2 m}T^2 - \frac{I}{2m}$$

となる。

そこで我々は、振子の腕におもりをぶら下げ、そのおもりの位置を動かすことで振子の慣性モーメントを変化させ、捩れ振子の周期の、振子の慣性モーメントへの依存性を見た。(図 2.5)

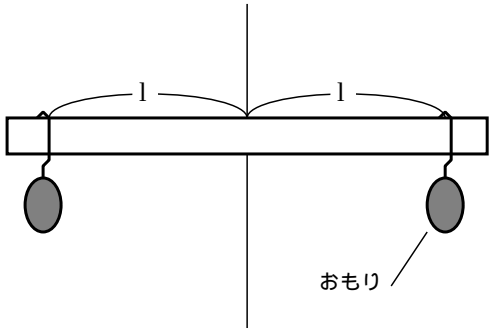

図 2.5: おもりの位置でモーメントを変化させる。

おもりは、左右にそれぞれ $22.65\mathrm{g}, 22.45\mathrm{g}$ とほぼ同じ質量のものを用いて、左右の釣り合う位置で測定した。おもりの位置は、ほぼ左右対称になっているものとして考え、一方のみ記録した。また、周期の測定は、2 周期にわたって行い、その平均値を採用した。

おもりの位置 lと振子の周期 Tの関係を、横軸 T^2、縦軸 l^2として図 2.6に示す。

グラフ上の直線は、gnuplot によってフィットさせた一次関数。エラーバーは、l について $2mm$ の誤差があったとして考えた。また、関数を $f(x) = Ax + B$とし、

$$\chi^2 = \frac{\sum_i (\frac{f(T^2) - l_i^2}{\sigma_i})^2}{N - n}$$

(N:測定点の数、n:fitting parameter の数) とおくと、

$A = 9.94218,\ B = -25.0996,\ \chi^2 = 10.330298$

となった。ただし、この解析では周期の測定誤差を無視して、l についての測定誤差しか考えていない。このため、$l = 0$ のとき、誤差棒がなくなり、χ^2 が計算できない。そこで、ここでは、$l = 0$ のときを除いて χ^2 を計算している。

これを見ると、捩れ振子の周期の、振子の慣性モーメントに関する依存性は、理論式で良く表せているようである。

2.2.3 張力に関する依存性

分銅を使ってワイヤにかかる張力を変化させて、周期測定をした。理論によれば、捩れ振子の周期はワイヤにかかる張力に依存しないはずである。横軸にワイヤにぶら下げたおもりの質量 m [g]、縦軸に捩れ振子の周期 T [s] をとったグラフを図 2.7に示す。周期 T の誤差は$\pm 0.1\mathrm{s}$ とした。

これを見ると、理論式の示すように、振子の周期の変化はワイヤの張力によっていないようである。

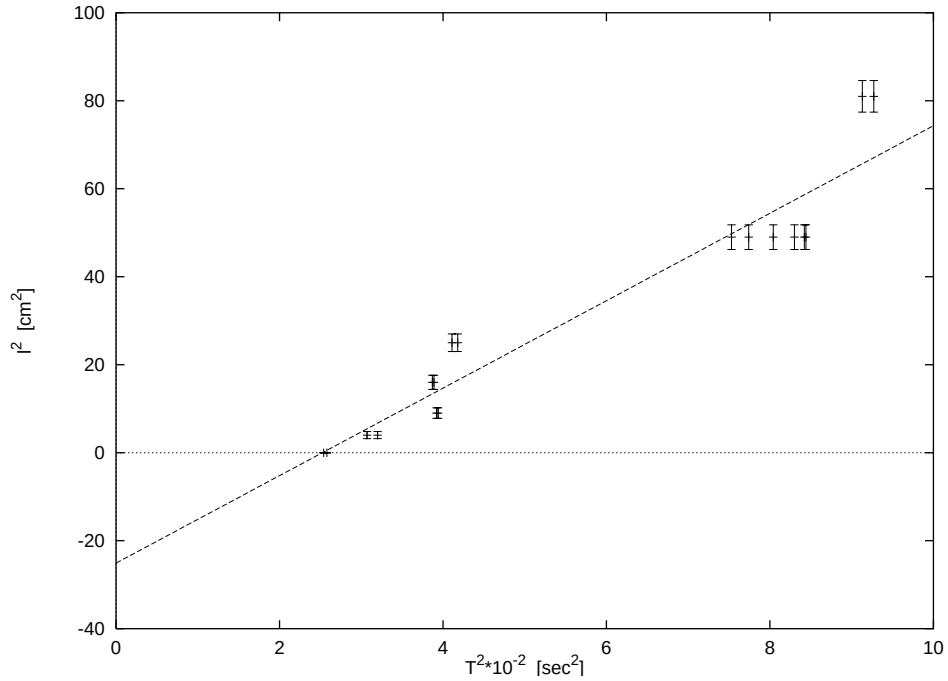

図 2.6: おもりの位置 (振子のモーメント) と捩れ振子の周期。

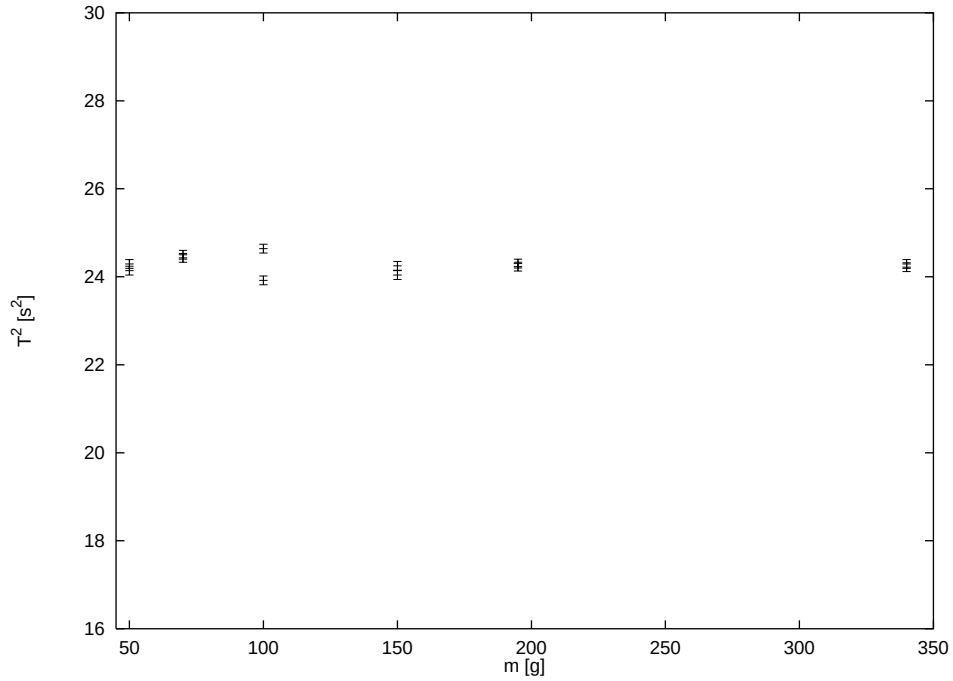

図 2.7: ワイヤの張力と捩れ振子の周期。

2.3 長周期の捩れ振子の試作と、様々なノイズ、運動モード

カシミール力等の微少な力を測定する場合、長い周期を持つ捩れ振子を作ることになる。短い周期の振子では見えていなかったノイズや、振子に乗ってくる運動モードを確認するため、ワイヤの長さ約 40cm、周期約 109 秒の捩れ振子を作成した。(図 2.8)

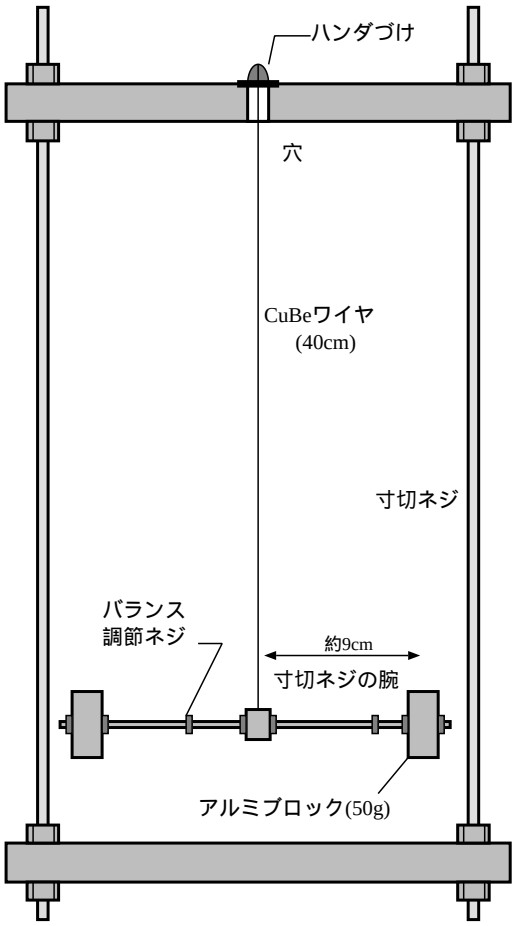

図 2.8: 長周期捩れ振子 1 号機

我々は、振子の直ぐ上の部分のワイヤの、水平方向の運動を、KEYENCE 社製のレーザ寸法測定機 LS-5040 で測定した。この装置は $\pm 2\mu$m の精度でワイヤの位置を測る能力を持っている。結果、ノイズの振幅は約$\pm 10\mu$m で、また、うなりが現れているのが確認できたことから、複数の周波数成分が存在することが分かった。そこで、このデータを FFT アナライザに入力したところ、0.625Hz と 0.800Hz の 2 つの成分が大きいことが分かった。

我々は、この二つのノイズ成分を、図 2.3中の 「全体の動き」と、ϕ 方向の動きの 2 つだと推測し、大雑把に計算してみた。

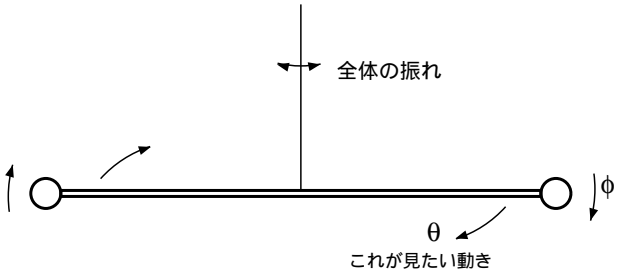

図 2.9: いろいろなノイズ

全体の動き

ワイヤの長さ l は約 $40\mathrm{cm}$ である。これが地球による重力加速度 g によって単振子になっていると考えると、その周波数は、

$$f = 1/T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

とかける。ここに $l = 40\mathrm{cm}$ と $g = 980\mathrm{cm/s^2}$ を代入して、$f = 0.79\mathrm{Hz}$ を得る。これで $0.800\mathrm{Hz}$ のノイズは説明できた。

ϕ方向の揺れ

振子の模式図を図 2.3に示す。

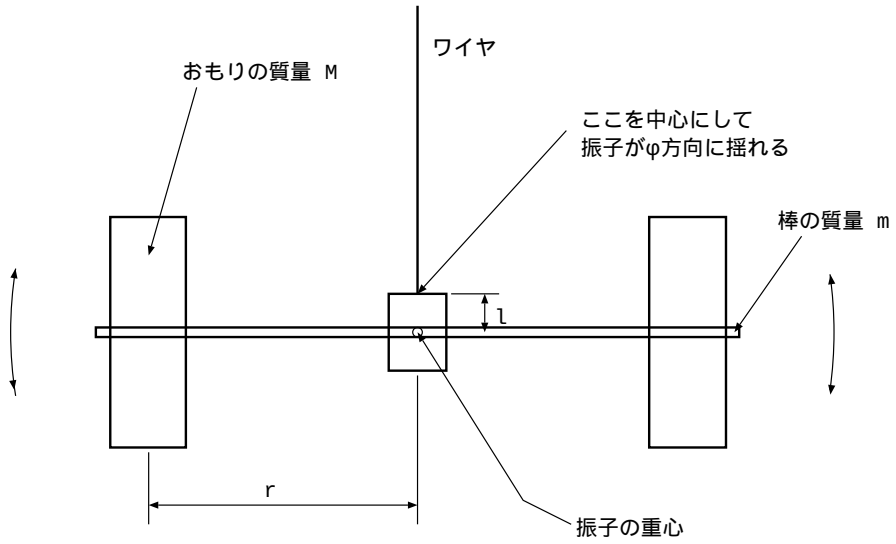

図 2.10: 振子を横から見た模式図。振子の重心から l だけ上の点を中心にして振子が ϕ 方向にゆれたときの振動数を求める。

重力は振子の重心位置にかかるが、ϕ 方向の揺れの中心は、振子の重心位置より l だけ上の点である。この点を支点と呼ぶことにする。

この支点を中心とした振子の慣性モーメントを I、おもりの質量を M、棒の質量を m、重力加速度を g、振子の重心と支点の距離を lとすると、ϕ の運動方程式は、

$$\begin{aligned} I\ddot{\phi} &= (2M+m)gl\sin\phi \\ &\cong (2M+m)gl\phi \\ \ddot{\phi} &= \frac{(2M+m)gl}{I}\phi \end{aligned}$$

となる。これより、ϕ の振動数 f が

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(2M+m)gl}{I}} \tag{2.30}$$

と求まる。

ここで直方体のおもりを質点と近似し、振子の棒の太さを無視すれば、振子の支点回りの慣性モーメント I を $I = (2M+m)l^2 + 2Mr^2$ と書くことができる。これを式 (2.30) に代入して、

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(2M+m)gl}{(2M+m)l^2 + 2Mr^2}}$$

ここに $M = 50\mathrm{g}$、 $m = 8.6\mathrm{g}$、 $l = 1.4\mathrm{cm}$、 $r = 9.0\mathrm{cm}$ を代入して

$$f = 0.67\mathrm{Hz}$$

となる。これがおそらく 0.625 Hz のノイズの原因であると思われる。

我々は、カシミール力測定のための捩れ振子を設計する際に、上の 2 つのノイズの影響を考慮にいれた。

Chapter 3

カシミール力測定のための捩れ振子の設計

2 枚の導体板の間に働くカシミール力を測定することを考える。測定の原理は次のようなものである。まず、周期の長い捩れ振子を用意する。この捩れ振子の腕の部分に導体板を 1 枚取りつけ、振子の外にもう 1 枚の導体板を置く。するとこれら 2 枚の導体板の間にはカシミール力が働き、その結果、捩じれ振子の周期はカシミール力が働いていない場合に比べて変化する。周期の長い捩じれ振子を用いる理由は振子が微少な力であるカシミール力の影響を受けやすくするためである。我々が実験で測定しようとするのはこの周期変化である。

3.1 振子の形状

3.1.1 形状の決定

我々は、カシミール力の金属板間距離への依存性を求めたいため、装置には金属板間距離の明確で精密な計測とその調整能力が要求される。また、捩れ振子は常に微少 (振幅$\pm 10\mu$m 程度) の中心のぶれを伴っているためそのぶれに対する安定性も必要である。その他、温度変化に対する安定性、予想される周期変化の大きさなどから、以下の 3 つのモデルを検討した。

1. 捩れ振子の腕の先端に金属板を取り付け、金属板の法線方向に振幅を与えるタイプ。 (図 3.1)

   振幅を精密にコントロールできれば大きな周期変化が期待される。振動により金属板間距離が変化するため距離の測定は難しい。中心ぶれの影響を受けやすいため金属板間距離を小さくできないという欠点がある。

2. 腕の代わりに下向きの円錐台を吊し、その側面に金属板を取りつけるタイプ。 (図 3.2)

   金属板間距離の変化が容易にでき、温度変化に対する影響も強いが、金属板間距離の精密な測定は側面が傾いているので困難。期待される周期変化は小さい。

3. 腕の代わりに円盤を取り付け、その下面に金属板をつけるタイプ。 (図 3.3)

   2 と同様に周期変化は小さい、温度変化の影響も受けやすい。中心ぶれの影響は受けにくい。金属板間距離の調整と測定はとても容易である。

2、3 のタイプで周期変化が小さいのは、これらのタイプでは周期変化の直接の原因が、金属板同士の重なり面積の変化だからである。しかし、我々は金属板を縞模様に配置することで、これらの期待される周期変化を 180 倍高めることができた。

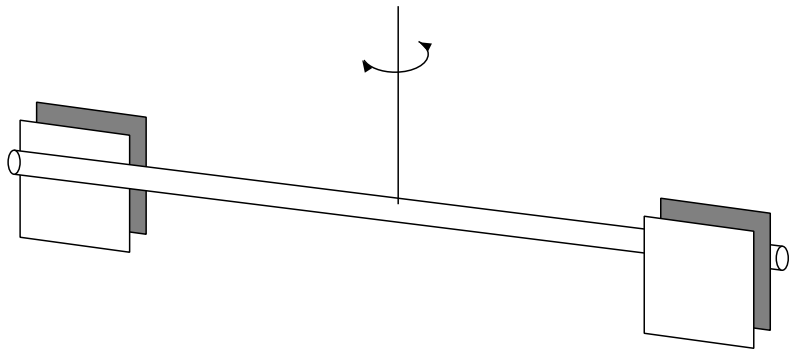

図 3.1: 金属板の法線方向に振幅を与えるタイプ

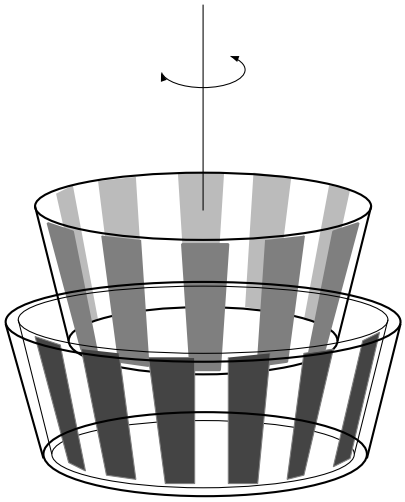

図 3.2: 円錐台の側面に金属板を取りつけるタイプ

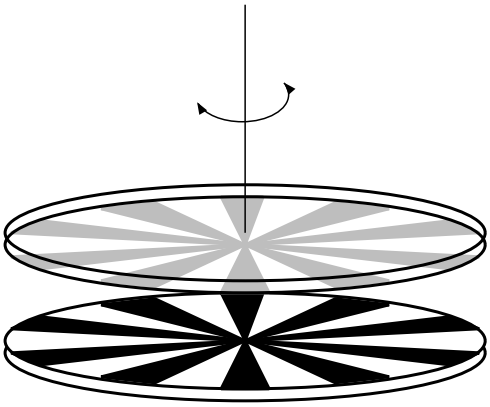

図 3.3: 円盤の下面に金属板をつけるタイプ

以上の検討をふまえ、我々は 3 のタイプの装置をカシミール力の測定に用いることにした。このタイプでは、捩れ振子は、ワイヤーで円盤を吊した形である。円盤の下面には、放射状に縞模様の金属板を蒸着する。また、その面に向かい合う形で、振子の下に同様の放射縞の金属板を取りつけた。振子の振動にともない、上側の金属板は回転し、上下の重なり面積が縞模様の効果により大きく変化する。これがカシミール力の変化となり、振子の周期を変化させる。

また、金属板間の距離は、下円盤の乗った台を上下に移動することで容易に実現され、カシミール力の距離依存性が計測できると期待される。

3.2 カシミール力測定の理論的予想

3.2.1 縞模様の効果

面積 S、極板間距離 a の平行平板間に働くカシミール力は

$$F_c = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} S$$

であり、そのポテンシャルは

$$U_c = \frac{1}{3}\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^3} S$$

のように極板面積に比例するため、上下金属板の重なり面積が変化すると振子に次のような力が加わる。

$$f = -\frac{\partial}{\partial \theta} U_c = -\frac{\partial U_c}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial \theta} = -\frac{1}{3}\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^3}\frac{r_2^2 - r_1^2}{2}$$

振幅が小さい範囲では上下金属板の重なり面積の変化は小さく、単純な 1 枚の金属板では周期変化に有意な変化を与える力は得られない。そこで、我々は、図のような、縞模様の上下金属板を導入した。これにより微少な振幅によって大きな面積変化を得ることができ、縞の数を n 本としてカシミール力の効果は

$$f = -\frac{1}{3}\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^3}\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} n$$

と拡大できる。これは縞を細かくすれば f はいくらでも大きくできる事を意味するが、平行平板導体板間のカシミール力という仮定、つまり縞の幅が極板面積が極板間距離に比べて十分大きいという制約を受ける。そこで我々は、1 度の幅の縞を用い、極板の最も短い辺でも、極板間距離の数十倍を保てるようにした。その結果 f を単純な極板形に比べ、180 倍大きくすることができた。

3.2.2 予想される周期変化

縞模様の存在は

$$U_c = \begin{cases} \frac{1}{3}\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^3}\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} 180(\theta - \frac{2m\pi}{360}) & (\frac{2m\pi}{360} < \theta < \frac{(2m+1)\pi}{360}) \\ \frac{1}{3}\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^3}\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} 180(\frac{(2m+1)\pi}{360} - \theta) & (\frac{(2m-1)\pi}{360} < \theta < \frac{2m\pi}{360}) \end{cases}$$

のような周期的なポテンシャルで表せ、振子は、自身のポテンシャルと、このポテンシャルの重ね合わせ

$$U = \frac{1}{2}K(\theta - \theta_0)^2 + U_c$$

中を運動することになる。我々は以下の 2 つの場合について振動周期を測定、比較することで、カシミール力の大きさを求めることにした。

我々は微少な周期変化を検出したいのであるから、出来る限りばね弾性の弱い物質が望ましい、一方で温度変化に対する延びの安定性、吊り下げに対する引っ張り強さも要求される。ここでは、直径 $100\mu\mathrm{m}$

の CuBe 線をワイヤーとして考える。またその長さは、室内のテーブル上におさまる程度のものとして $l = 41.6\text{cm}$ とした。同様の理由から、基盤部分は半径 $r = 8.0\text{cm}$ 、蒸着パターンが $r2 = 2.5\text{cm}$ から $r1 = 7.5\text{cm}$ とした。

1. 振幅の中心が、上下の縞模様がちょうど重なる位置にある場合 (near の位置)

この時、振子のポテンシャルの中心は、カシミールのポテンシャルの谷の位置に一致し周期はシミュレーションの結果

$$T_n = 198.496\text{sec}$$

と予想された。

2. 縞模様が完全にずれた場合 (far の位置)

この時は、振子の中心が、カシミールのポテンシャルの山の位置に重なり、周期は

$$T_f = 198.511\text{sec}$$

となる。

ただし、シミュレーションは、$K = 2.3 \times 10^{-6}$ とおいて計算した。

3.2.3 捩れ振子の中立点のずれと、振幅の最小限界について

我々が考えている運動のポテンシャルは、滑らかな振子のポテンシャルに、とがったカシミール力のポテンシャルを重ねたものになっている。周期の変化は主にこの微分不連続な点の影響であるため、振幅を小さくして、その点近くに振動を閉じ込めることができれば、大きな周期変化が期待できる。

しかし、振子の中立点が金属板が最も重なる位置からずれると、周期の変化が小さくなる。 (図 3.4) 振幅 3 分、5 分、7 分の時の中立点の位置のずれと周期の変化量の関係を、図 3.5に示す。

これを見ると振幅が小さすぎると中立点の位置のずれに対して敏感になってしまい、得策とは言えない。このような考察から振幅は 5 分として解析を行った。

3.2.4 中心ぶれの影響と調整

2.3で試作した長周期捩れ振子で見たように、我々の環境では捩れ振子の中心は $\pm 10\mu\text{m}$ 程度の微少な揺れを持っている。この揺れで上下金属板の重なり面積にずれが生じる。これはずれの方向にも依存するが影響が最も大きな場合でずれ d が面積に与える変化を θ の関数としてシミュレーションによってプロットした。 (図 3.6)

この結果を用いて、周期変化への影響を求めたが、near の位置で、ずれが最も大きい$\pm 20\mu\text{m}$ の場合でも $T_d = 198.497\text{sec}$ であり

$$\frac{T_d - T_n}{T_f - T_n} \sim 0.04$$

から、測定に 10%以下の誤差しか与えないことが分かる。

3.2.5 振子、円盤の傾きの影響

上下の円盤が傾いていることによる影響を見る。

まず中立点において、上下の円盤が傾いた状態で平行になっている場合を考える。 (図 3.7) 上の円盤が振子として回転したとき、下の円盤との間隔に大きな変化が生じないようにしなければならない。

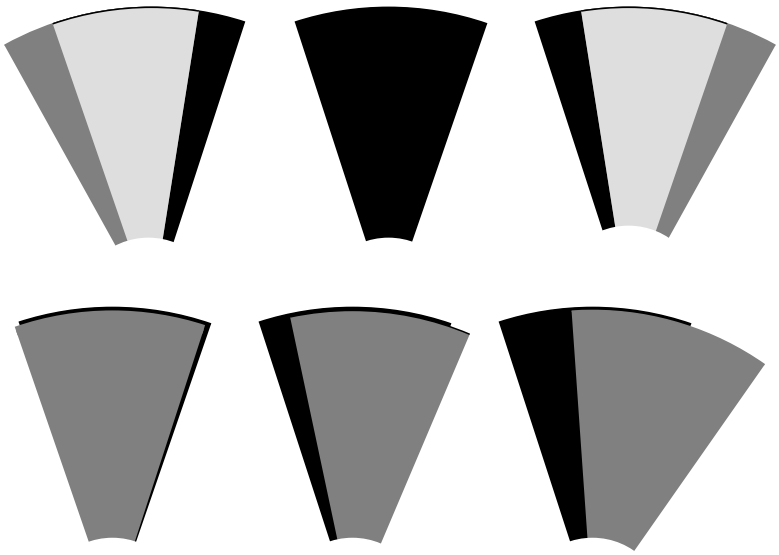

図 3.4: 中立点の位置のずれ。上は中立点がずれていない場合。振子がどちらにふれても力を受け周期が大きく変化する。下が中立点がずれている場合。ずれと反対方向に振れたとき、力を受けない。

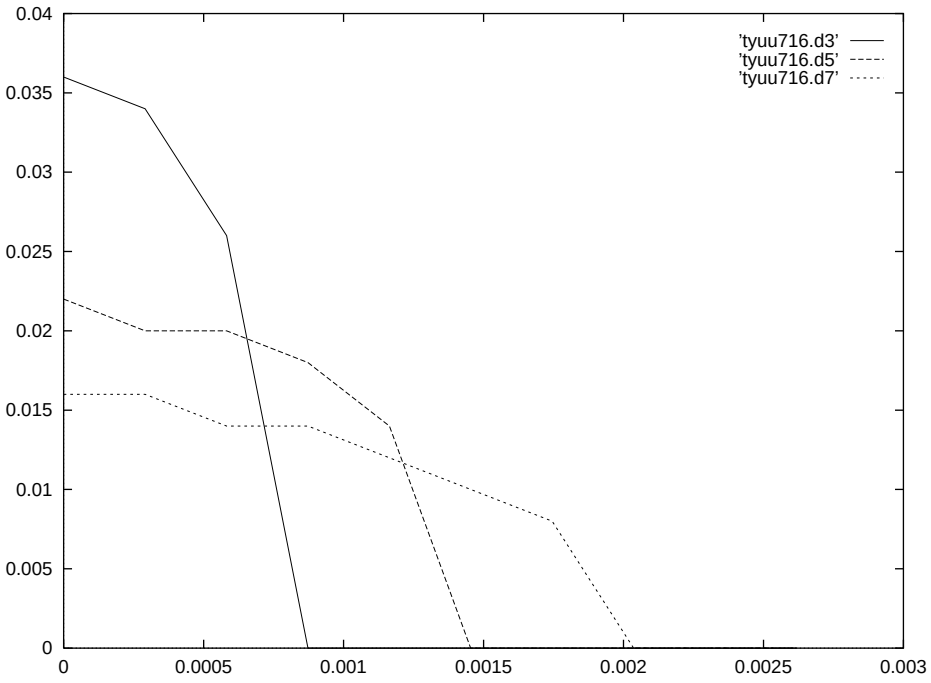

図 3.5: 中立点の位置のずれと周期の変化量。横軸は中立点ずれの角度 (rad)。縦軸は周期の変化量 (秒)。グラフ上から振幅 3 分、5 分、7 分の場合。

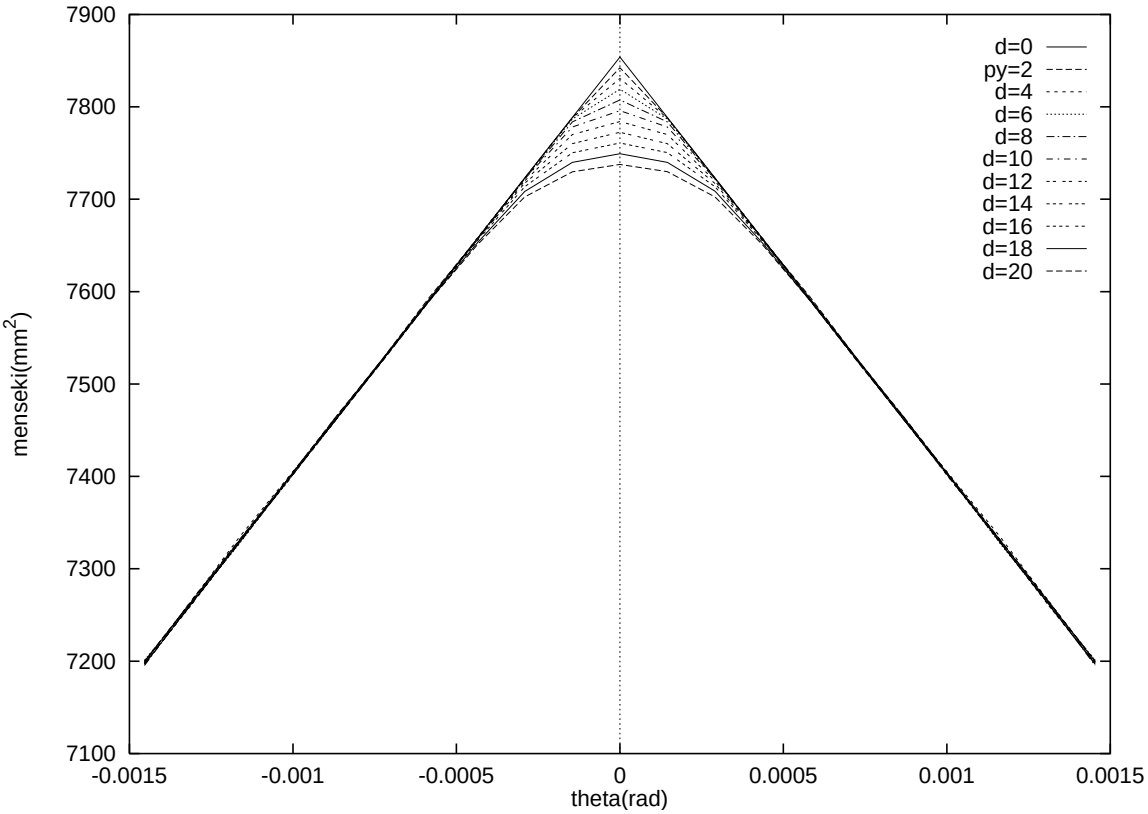

図 3.6: 中心にずれがあるときの重なり面積の変化

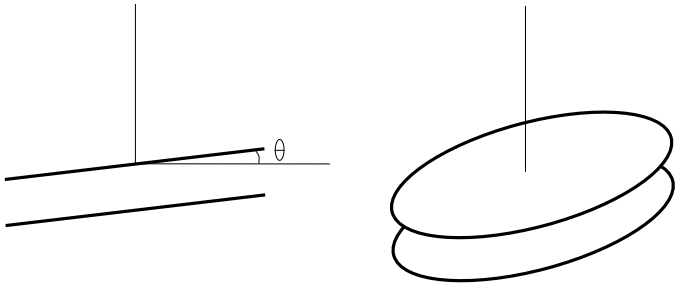

図 3.7: 傾いて平行にな った円盤

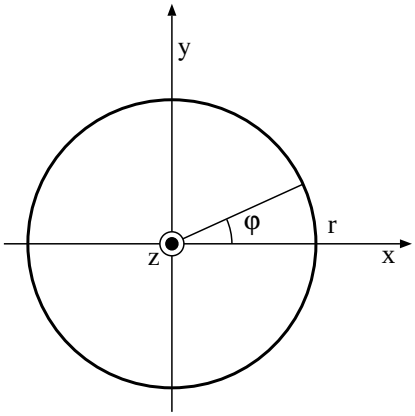

図 3.8: 円周

三次元空間の半径 r の円周 $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$ を考える。 (図 3.8) これを傾きとしてまず x 軸回りに θ だけ回転させる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

次に振子の運動として、z 軸回りに $\delta\phi$ だけ回転させる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta\phi & -\sin\delta\phi & 0 \\ \sin\delta\phi & \cos\delta\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

θ を 1 次までとると

$$\begin{cases} x' &= \cos\delta\phi\cdot r\cos\varphi - \sin\delta\phi\cdot r\sin\varphi \\ y' &= \sin\delta\phi\cdot r\cos\varphi + \cos\delta\phi\cdot r\sin\varphi \\ z' &= r\theta\sin\varphi \end{cases}$$

上下の円盤間の距離の変化は、$\delta\phi$ 回転の前後での、z 座標の変化である。円周上の点が $\delta\phi$ の回転で移動していることに注意して $x = r\cos\varphi'$、$y = r\sin\varphi'$ より、$x' = x$ 、$y' = y$ を解くと、

$$\begin{cases} \cos\delta\phi\cdot r\cos\varphi - \sin\delta\phi\cdot r\sin\varphi &= r\cos\varphi' \\ \sin\delta\phi\cdot r\cos\varphi + \cos\delta\phi\cdot r\sin\varphi &= r\sin\varphi' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi' = \varphi + \delta\phi$$

これより、

$$\begin{aligned} \Delta z &= z'(\varphi) - z(\varphi + \delta\phi) \\ &= r\theta\sin\varphi - r\theta\sin(\varphi + \delta\phi) \\ &= r\theta(\sin\varphi - \sin\varphi\cdot\cos\delta\phi - \sin\delta\phi\cdot\cos\phi) \\ &= r\theta\{\sin(1 - \cos\delta\phi) - \sin\delta\phi\cdot\cos\phi\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$\delta\phi$ が微少な時、

$$\Delta z \simeq \theta r \delta\phi \cos\varphi$$

となる。円周上での変化の最も大きいところは $\varphi = 0, \pi$ の所だが、一方は近付き、もう一方は遠ざかる。その差は

$$\Delta z \simeq 2\theta r \delta\phi$$

となる。これが金属板間距離に対して大きいと、カシミール力の距離依存性が分からなくいばかりでなく、平行平板というカシミール力の近似が使えなくなる。

さて、$r = 10\mathrm{cm}$ として$\delta\phi = 5'(1.5 \times 10^{-3}\mathrm{rad})$ と、$\delta\phi = 10'(3 \times 10^{-3}\mathrm{rad})$ の場合を計算してみると、

$\delta\phi = 5'(1.5 \times 10^{-3}\mathrm{rad})$ の場合

θ[rad]	$\Delta z[\mu\mathrm{m}]$
10^{-1}	3×10
10^{-2}	3
10^{-3}	3×10^{-1}
10^{-4}	3×10^{-2}

$\delta\phi = 10'(3 \times 10^{-3}\mathrm{rad})$ の場合

θ[rad]	$\Delta z[\mu\mathrm{m}]$
10^{-1}	6×10
10^{-2}	6
10^{-3}	6×10^{-1}
10^{-4}	6×10^{-2}

我々は金属板間距離として 数μm から 数十μm を想定しているので、円盤の傾きを $\theta \simeq 10^{-4} \sim 10^{-3}\mathrm{rad}$ におさえれば、傾きによる効果は無視できる。

つまり上下の円盤が平行であれば、その水平度は$\theta \simeq 10^{-4} \sim 10^{-3}\mathrm{rad}$ で良いことになる。

次に下円盤が水平で、上の円盤が傾いている場合を考える。この場合、位置によって上下の円盤間の距離に違いが生じるが、上円盤の回転によってはその距離の違いに変化はない。

半径 r の上円盤が θ_1 だけ傾いていると、上下の円盤間距離に最大 $2r\sin\theta_1$ の差ができる。 (図 3.9)

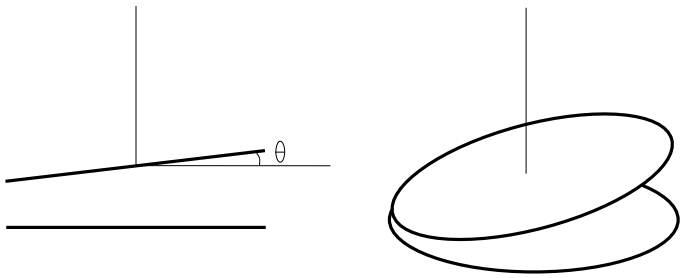

図 3.9: 傾いた上円盤

金属板間距離を 数μm から 数十μm とすると円盤の傾きを $\theta_1 \simeq 10^{-6} \sim 10^{-5}\mathrm{rad}$ におさえなければならない。

下の円盤も傾いていて上下でその傾き具合いが違う場合でも同じ議論ができる。つまり上下の傾きの違いを$\theta_{12} \simeq 10^{-6} \sim 10^{-5}\mathrm{rad}$ におさえなければならないことになる。

結局、まず上の円盤の傾き θ_1 を $\theta_1 \leq 10^{-3}\mathrm{rad}$ に合わせ、次に下の円盤を、上の円盤との傾きの差θ_{12}が$\theta_{12} \leq 10^{-5}\mathrm{rad}$ となるように調節すれば良いことが分かる。

3.2.6　温度変化の与える影響

一般に温度が変化するとワイヤの長さが変化する。用いるワイヤの長さを L 、線膨張率を α 、温度変化を ΔT とすると、ワイヤの長さの変化 ΔL は

$$\Delta L = \alpha L \Delta T \tag{3.2}$$

で与えられる。

環境の温度を 0.1 度で制御できるとすると、我々が用いた長さ $0.4\mathrm{m}$ の CuBe $(\alpha \simeq 1.78 \times 10^{-5}$) ワイヤの長さの変化は、約 $0.8\ \mu\mathrm{m}$ となる。長時間にわたりこれ精度で環境の温度を制御するのは容易でない。そこで $\mathrm{Piezo\ Stacks}$ を用いて、温度変化に対して面間距離を一定に保つようにする。

3.3　具体的な実験装置

3.2.3、3.2.4、3.2.5、3.2.6 で指摘した精度を実現するための、具体的な装置を考察する。

3.3.1　捩れ振子の中立点のずれの検出と調整

3.2.3より、上下の円盤の中立点の回転角方向のずれは、 2 分以内に収める必要がある。これを見るのに上下円盤の縁の一部を平らにカットし鏡面に仕上げ、光てこの鏡にする。 (図 3.10) 上下それぞれから帰ってくるレーザーを見ることで、振子の中立点で上下の円盤の縞がちょうど重なるかどうかを確かめることができる。また、図 3.11のように、縞の重なり具合いを円盤を通過してきた光の光量で調べることも出来る。検出されたずれはワイヤを吊る電動θステージで制御する。

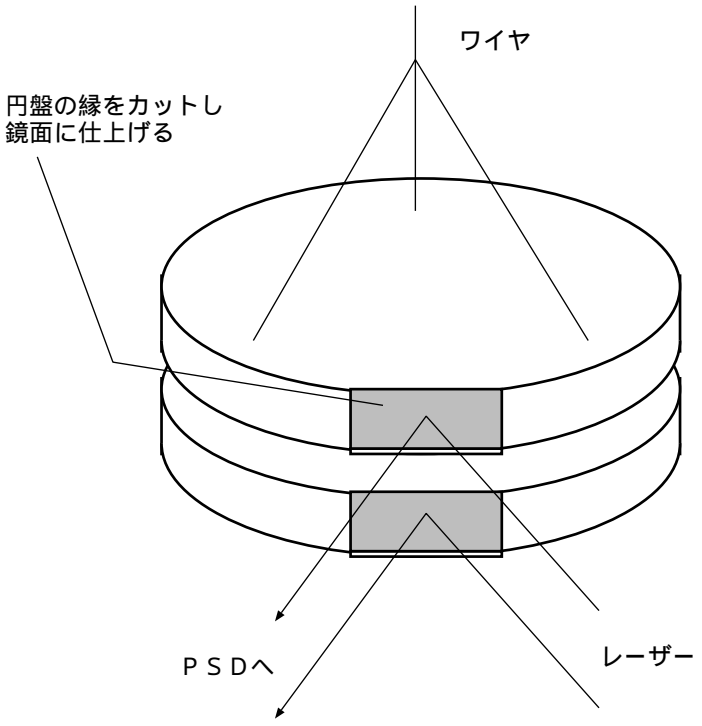

図 3.10: 円盤の縁を光てこの鏡にする。

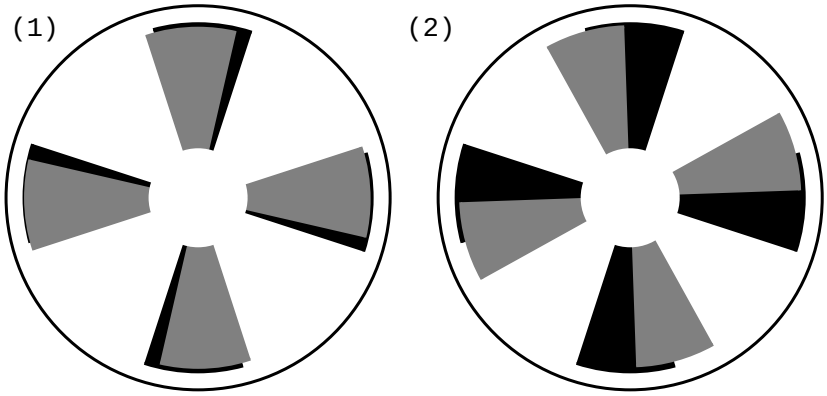

図 3.11: 縞の重なり具合いで光量が変化する。

3.3.2 上下の円盤の中心のぶれの検出と調整

上下の円盤の中心位置をそろえる方法として、それぞれの円盤の中心にモアレ縞を起こさせる同心円状の模様を蒸着しておく。 (図 3.12、3.13) 下円盤のステージ類を操作してモアレ縞がなくなったとき、上下の円盤は同心円の線の太さの精度で一致する。同心円の間隔を 2 段階で書くことで、まず大まかに中心を合わせ、次に 10μm 以内という要求を満たすように微調整する。

これら円盤上に配置するパターンを図 3.14に示す。

3.3.3 上下の円盤の傾きのずれの検出と調整

上下の円盤の傾きの制御の手順

3.2.5で見たように、上の円盤の傾き θ_1 を$\theta_1 \leq 10^{-3}$rad に合わせ、下の円盤を、上の円盤との傾きの差 θ_{12} が$\theta_{12} \leq 10^{-6}$rad となるように調節すれば良い。このために、傾斜ステージ、Piezo Stacks と水準器を用いて、下の円盤の傾き θ_2 が $\theta_2 \leq 10^{-5}$rad で水平になるように合わせる。

次に、その水平に合わせた下の円盤と平行になるように、ファブリペロー干渉計で傾きを確認しながら、上の円盤を調節する。しかし上の円盤の調節機能は 10^{-3}rad 程度しかないので、上下の円盤の傾きの差θ_{12} を $\theta_{12} \leq 10^{-6}$rad とすることができない。そこで再度 Piezo Stacks を用いて下の円盤を上の円盤に平行になるように調節する。こうすると下の水平度も悪くなるが、上下の円盤の平行度を良くすることができる。

上下の円盤の傾きのずれの検出法

上下の円盤の 3 か所に円盤間の距離測定のために誘電体多層膜を作り、ファブリペロー干渉計を用いて直接距離を測定する。ファブリペロー干渉計は数十 nm の精度で誘電体多層膜間の距離を測定できるので、10^{-6}rad の傾きのずれを検出できる。これは十分な精度である。

上円盤の傾きの制御

上円盤は 3 本のワイヤで吊り、それを 1 本にまとめる。これは 2.3で指摘されている、 ϕ 方向のノイズを軽減するためである。その 3 本のワイヤのうち 2 本に傾きを調節するためのネジを組み込む。 (図 3.15)

円盤の 10^{-3}rad の傾きに対しての、ワイヤの長さの変化を見る。

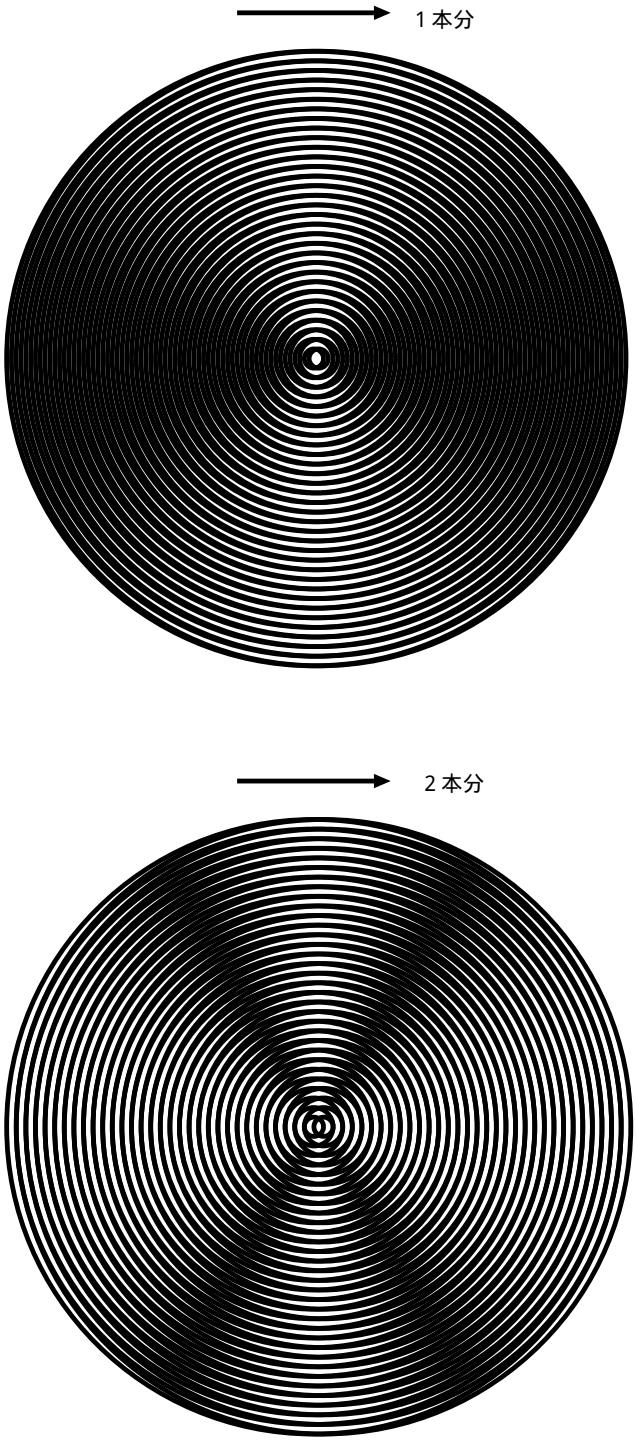

図 3.12: モアレ縞発生の様子。同心円の組が中心をずらして重なると、そのずれ具合いと方向に応じて縞模様が出来る。上は線 1 本分、下が線 2 本分のずれ。

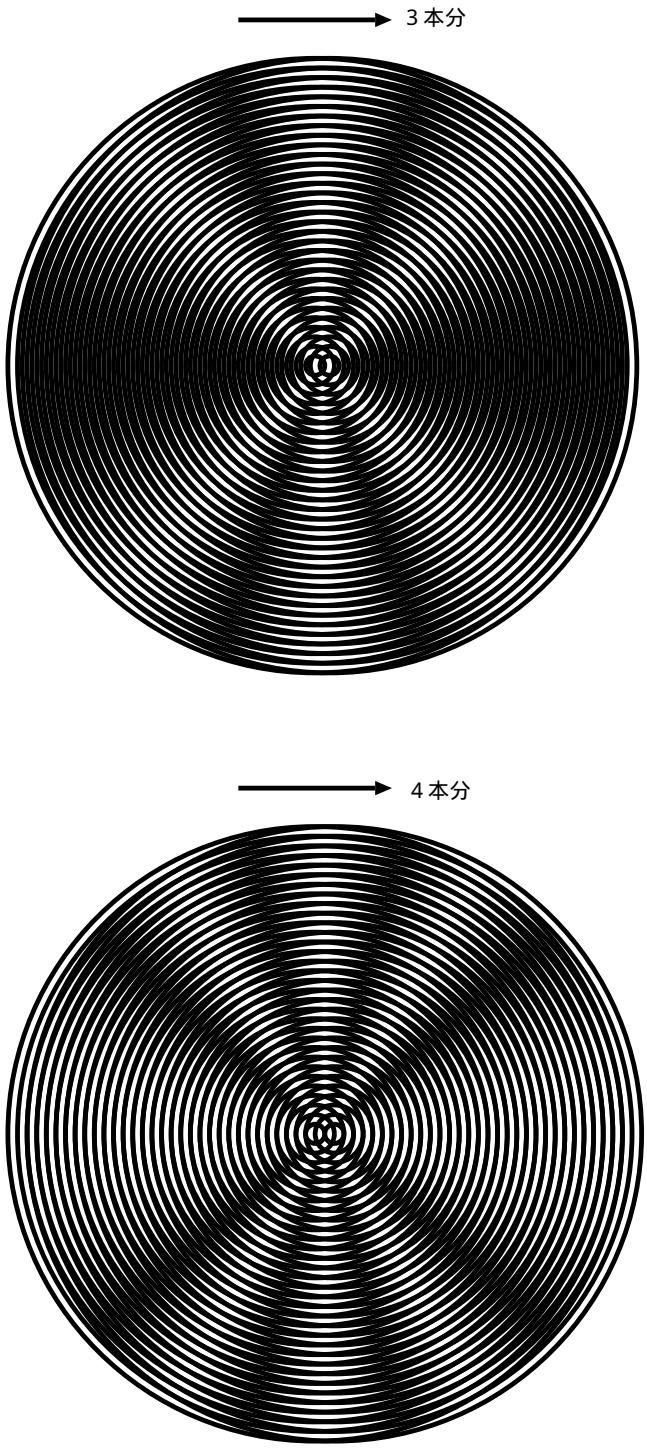

図 3.13: モアレ縞発生の様子。先の図と同じ。上は線 3 本分、下が線 4 本分のずれ。

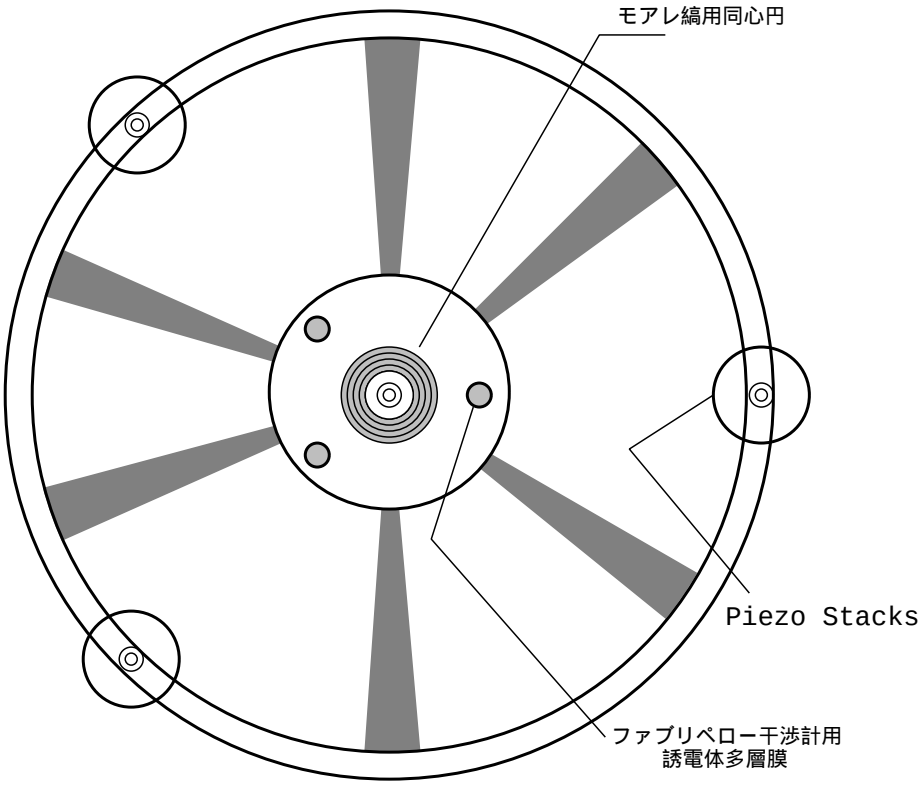

図 3.14: 下円盤の基盤パターン。導体板の放射縞模様は実際は 1 度おきで一周するが、この図では省略してある。中央のモアレ縞発生の同心円は、内側 1cm は 100μm 間隔、外側 1cm は 10μm 間隔で、二段階で中心を合わせる。

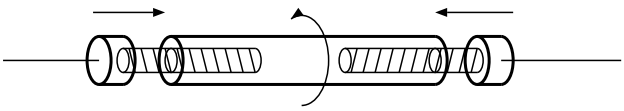

図 3.15: 上円盤傾き調節ネジ。左右のビスはネジの切り方が逆になっており、中央のナットを回転させると、全体が延び縮みする。

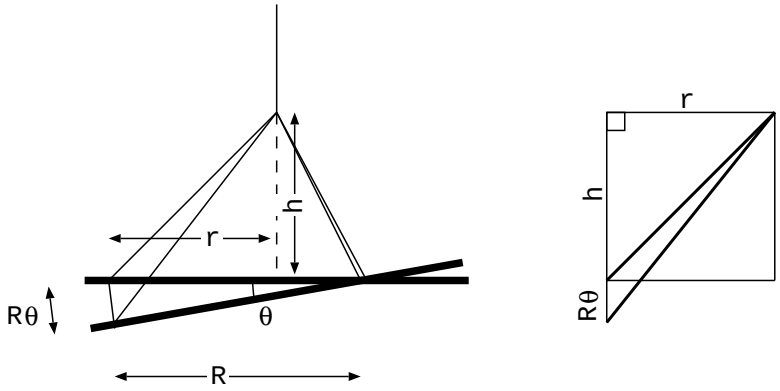

図 3.16: 円盤の傾きとワイヤの長さの変化

図 3.16の右図のように近似するとワイヤの長さの変化は$\sqrt{(h+R\theta)^2+r^2}-\sqrt{h^2+r^2}$となる。これに$r=h=5\mathrm{cm}, \mathrm{R}=7.5\mathrm{cm}, \theta=10^{-3}\mathrm{rad}$ を代入すると、$53\mu\mathrm{m}$ を得る。これより、$50\mu\mathrm{m}$ で上円盤を吊るワイヤの長さを調節できれば、円盤の傾きを $10^{-3}\mathrm{rad}$ で制御できる。

下円盤の傾きの制御

下円盤の傾きを調節するための Piezo Stacks は $0.1\mu\mathrm{m}$ の精度で長さを調節できる。これを中心から $5\mathrm{cm}$ の所に正三角形状に取りつける。 (図 3.17) これにより下円盤は $1.3\times10^{-6}\mathrm{rad}$ で制御でき、上の条件を満たす。

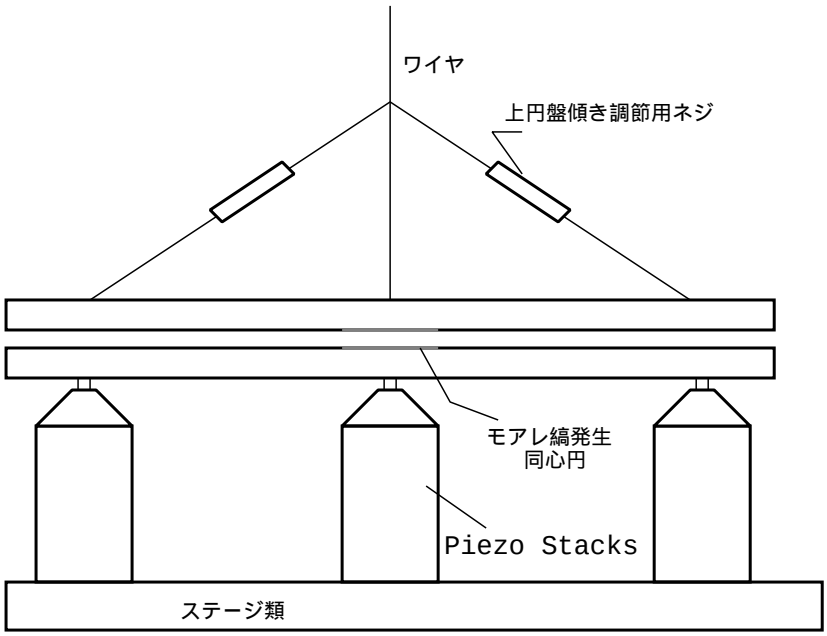

図 3.17: 装置を横から見た図

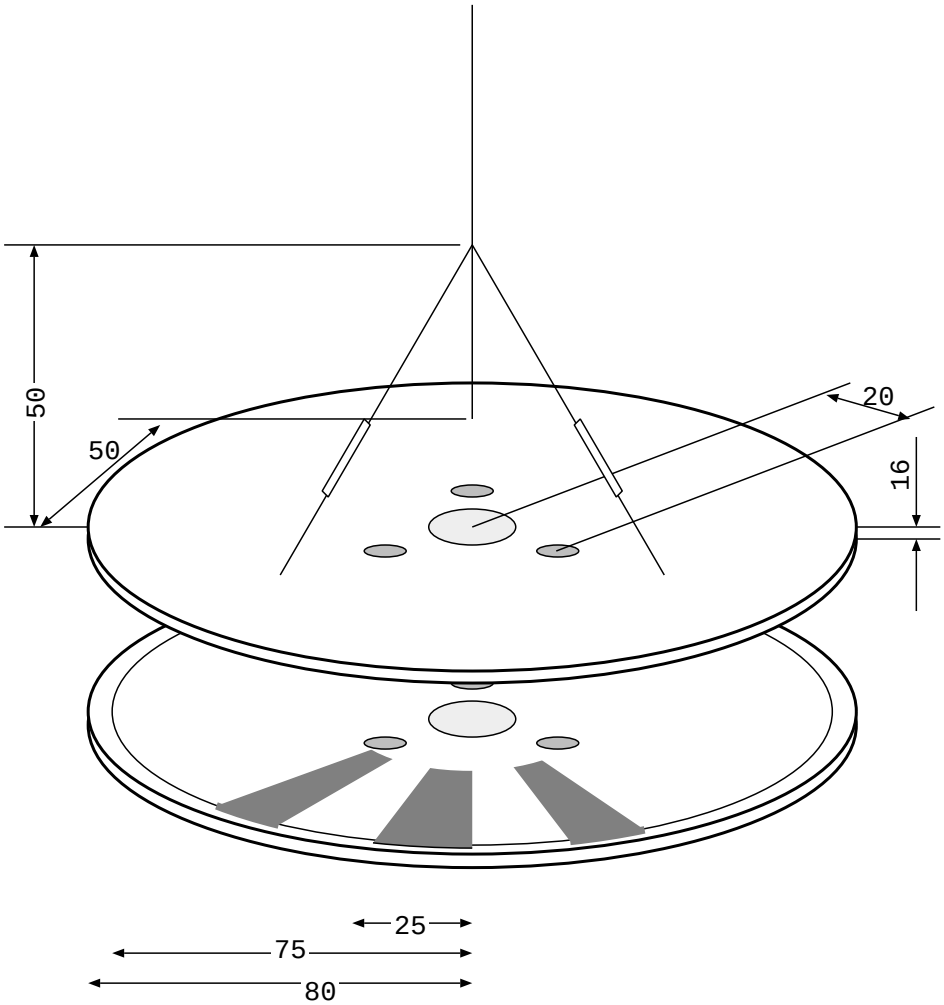

図 3.18: 装置全体図

これらの装置により、原理的にはカシミール力が測定できる。しかし実際には Chapter 2での捩れ振子の試作機で見たように様々なノイズがあり、先に述べた環境を整えることは容易でない。また捩れ振子の周期が理論どおりに長時間にわたって安定するかも確かめる必要がある。

そこでまずテストとして、カシミール力同様微少な力である重力を測定する。

Chapter 4

テストとしての重力測定用捩れ振子

我々は、捩れ振子による微少な力の測定のテストとして、万有引力定数 G を 10%の誤差で測定することを試みた。

4.1 測定の原理

我々は、捩れ振子による万有引力定数 G の測定方法として、「Time of swing 法」と呼ばれる方法を用いた。[5]

この方法は、捩れ振子による動的測定である。捩れ振子の腕の両端におもりをつけ、まず、捩れ振子の平衡角度での腕の延長線上に、1 対の重力源を置く (近い位置)。平衡角度から捩れ振子が回転すると、重力源から受ける重力により、捩れ振子を元に戻そうとするトルクが働く。これにより、見掛け上、吊り糸の捩りバネ定数が大きくなる。次に、 2 つの重力源をともに振子の支点を中心に 90 ° 回転させる (遠い位置)。すると、今度は、捩れ振子を回転させる方向にトルクが働き、見掛け上、捩りバネ定数は小さくなる。この、 2 つの位置での捩れ振子の周期を測定することにより、万有引力定数 G を求めることができる。

重力源は球、捩り振子は、2 つの質点が質量のない棒で結ばれている場合を考える。各部分の寸法を図 4.1のようにおく。振子の支点は、 2 つの重力源の中心を結んだ線分の中点にあるとする。

捩れ振子の回転角を θ とおくと、捩れ振子のおもりの重心位置での、重力源による重力ポテンシャル $V(\theta)$ は、

$$V(\theta) = -2GMm\left(\frac{1}{\sqrt{L^2+l^2-2Ll\cos\theta}}+\frac{1}{\sqrt{L^2+l^2+2Ll\cos\theta}}\right)$$

と書ける。この $V(\theta)$ を振子の中立点θ_0のまわりで展開すると、

$$V(\theta) = V(\theta_0) + \left.\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0}(\theta-\theta_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0}(\theta-\theta_0)^2 + O((\theta-\theta_0)^3)$$

となる。一方、捩れ振子のワイヤの捩れバネ定数を Kとすると、捩れのエネルギーは$\frac{1}{2}K(\theta-\theta_0)^2$であるから、重力によって、捩れバネ定数は$\delta K = \left.\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0}$ だけ変化する。

ここで、$\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2}$を計算すると、

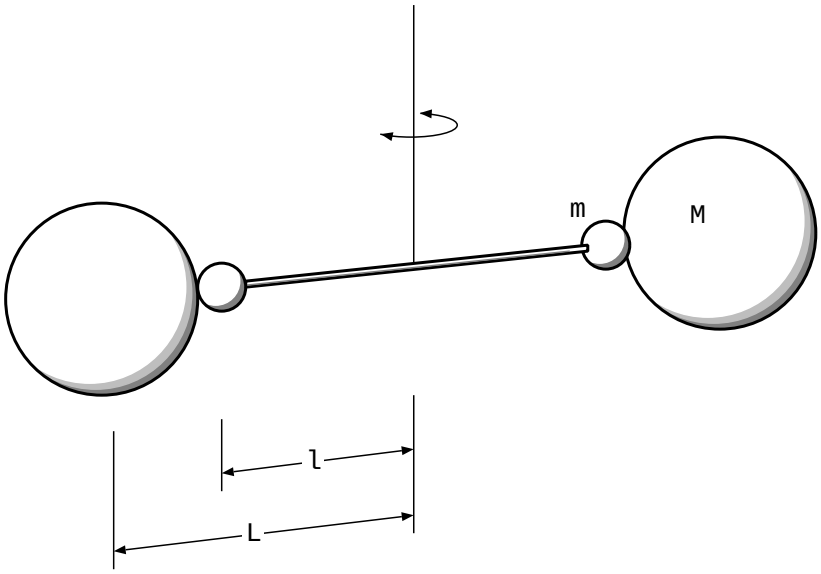

図 4.1: Time of swing 法

$$\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2} = 2GMmLl\left[\cos\theta\left(\frac{1}{(L^2+l^2-2Ll\cos\theta)^{\frac{5}{2}}}-\frac{1}{(L^2+l^2+2Ll\cos\theta)^{\frac{5}{2}}}\right)\right.$$
$$\left.-3Ll\sin^2\theta\left(\frac{1}{(L^2+l^2-2Ll\cos\theta)^{\frac{5}{2}}}+\frac{1}{(L^2+l^2+2Ll\cos\theta)^{\frac{5}{2}}}\right)\right] \tag{4.1}$$

を得る。ここで、重力源が近くにあるときは$\theta_0 = 0$、遠くにあるときは$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$であるから、

$$\delta K_{\rm near} = \left.\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0}$$
$$= 2GMmLl\left(\frac{1}{(L-l)^3}-\frac{1}{(L+l)^3}\right) \tag{4.2}$$
$$\delta K_{\rm far} = \left.\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}$$
$$= -12GMm\frac{(Ll)^2}{(L^2+l^2)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.3}$$

を得る。重力源が遠くにあるときの周期を$T_{\rm far}$、近くにあるときの周期を$T_{\rm near}$とすると、

$$T_{\rm near} = 2\pi\sqrt{\frac{I(m,l)}{K+\delta K_{\rm near}}} \tag{4.4}$$
$$T_{\rm far} = 2\pi\sqrt{\frac{I(m,l)}{K+\delta K_{\rm far}}} \tag{4.5}$$

となる。ただし、$I(m,l)$ は振子のモーメントで、ここでは $I(m,l)=2ml^2$ である。
式 (4.5) と式 (4.6) を使って、K を消去すると、

$$G=\frac{2\pi^2 I(m,l)(T_{\rm near}^{-2}-T_{\rm far}^{-2})}{MmLl\left[(L-l)^{-3}-(L+l)^{-3}+6Ll(L^2+l^2)^{-\frac{5}{2}}\right]} \tag{4.6}$$

となる。これより、$T_{\rm near}$ と $T_{\rm far}$ を測定することによって、万有引力定数 G を決定することができる。

4.2 万有引力定数 G 測定のための振子の設計

4.2.1 誤差の伝播について

実際に我々が用いた重力源は円柱であり、振子は 2 つの円柱を棒で結んだものである (図 4.11参照)。しかし、この場合、解析的に計算できない。そこで、近似として、4.1で用いたモデルを使うことにする。このモデルの場合、振子のモーメントは m と l だけで決まるのだが、円柱の場合には、他にも自由度を持つ。よって、ここでは、振子のモーメント I も、独立なパラメタとして扱う。
G の誤差ΔG は、 各パラメタの偏微分係数を使って、次のように表される。

$$\begin{aligned}\Delta G &= \Big[\Big(\frac{\partial G}{\partial M}\Delta M\Big)^2+\Big(\frac{\partial G}{\partial m}\Delta m\Big)^2+\Big(\frac{\partial G}{\partial I}\Delta I\Big)^2+\Big(\frac{\partial G}{\partial L}\Delta L\Big)^2 \\ &\quad +\Big(\frac{\partial G}{\partial l}\Delta l\Big)^2+\Big(\frac{\partial G}{\partial T_{\rm near}}\Delta T_{\rm near}\Big)^2+\Big(\frac{\partial G}{\partial T_{\rm far}}\Delta T_{\rm far}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{4.7}$$

それぞれの偏微分係数を計算すると、

$$\frac{\partial G}{\partial M} = -\frac{G}{M} \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial G}{\partial m} = -\frac{G}{m} \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial G}{\partial I} = \frac{G}{I} \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial G}{\partial L} = G\left(-\frac{1}{L}-\frac{-3(L-l)^{-4}+3(L+l)^{-4}-30L^2l(L^2+l^2)^{-\frac{7}{2}}+6l(L^2+l^2)^{-\frac{5}{2}}}{(L-l)^{-3}-(L+l)^{-3}+6Ll(L^2+l^2)^{-\frac{5}{2}}}\right) \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial G}{\partial l} = G\left(-\frac{1}{l}-\frac{3(L-l)^{-4}+3(L+l)^{-4}-30Ll^2(L^2+l^2)^{-\frac{7}{2}}+6L(L^2+l^2)^{-\frac{5}{2}}}{(L-l)^{-3}-(L+l)^{-3}+6Ll(L^2+l^2)^{-\frac{5}{2}}}\right) \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial G}{\partial T_{\rm near}} = -G\cdot\frac{2}{T_{\rm near}\left(1-(T_{\rm near}/T_{\rm far})^2\right)} \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial G}{\partial T_{\rm far}} = G\cdot\frac{2}{T_{\rm far}\left((T_{\rm far}/T_{\rm near})^2-1\right)} \tag{4.14}$$

となる。これより、

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta G}{G} &= \Bigg[\Big(\frac{\Delta M}{M}\Big)^2 + \Big(\frac{\Delta m}{m}\Big)^2 + \Big(\frac{\Delta I}{I}\Big)^2 \\
&+ \left(\Big(\frac{1}{L} - \frac{-3(L-l)^{-4} + 3(L+l)^{-4} - 30L^2 l (L^2+l^2)^{-\frac{7}{2}} + 6l(L^2+l^2)^{-\frac{5}{2}}}{(L-l)^{-3} - (L+l)^{-3} + 6Ll(L^2+l^2)^{-\frac{5}{2}}}\Big) \cdot \Delta L \right)^2 \\
&+ \left(\Big(\frac{1}{l} - \frac{3(L-l)^{-4} + 3(L+l)^{-4} - 30Ll^2 (L^2+l^2)^{-\frac{7}{2}} + 6L(L^2+l^2)^{-\frac{5}{2}}}{(L-l)^{-3} - (L+l)^{-3} + 6Ll(L^2+l^2)^{-\frac{5}{2}}}\Big) \cdot \Delta l \right)^2 \\
&+ \left(\frac{2}{T_{\rm near}\big(1 - (T_{\rm near}/T_{\rm far})^2\big)} \cdot \Delta T_{\rm near} \right)^2 + \left(\frac{2}{T_{\rm far}\big((T_{\rm far}/T_{\rm near})^2 - 1\big)} \cdot \Delta T_{\rm far} \right)^2 \Bigg]^{\frac{1}{2}} \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

を得る。

4.2.2 具体的な誤差の大きさについて

各パラメタの誤差の大きさ

$\Delta M, \Delta m$ について　円柱の直径と高さをϕ, h、真鍮の密度をρとすると、円柱の質量m_0は、$m_0 = \pi(\phi/2)^2 h\rho$ であるから、

$$
\frac{\Delta m_0}{m_0} = \sqrt{\Big(\frac{2\Delta\phi}{\phi}\Big)^2 + \Big(\frac{\Delta h}{h}\Big)^2}
$$

となる。ここで、重力源を$\phi = 7.40\text{cm}$, $\Delta\phi = 20\mu\text{m}$, $h = 23.00\text{cm}$, $\Delta h = 100\mu\text{m}$ とすると、

$$
\frac{\Delta M}{M} \sim 7.0 \times 10^{-4}
$$

である。振子のおもりを$\phi = 2.40\text{cm}$, $\Delta\phi = 20\mu\text{m}$, $h = 2.800\text{cm}$, $\Delta h = 10\mu\text{m}$ とすると、

$$
\frac{\Delta m}{m} \sim 1.7 \times 10^{-3}
$$

である。

ΔIについて　振子は図 4.11のような形をしている。ここで、2 つの円柱をつなぐ棒の直径をϕ_0、長さを$2h_0$、棒の先の円柱の直径をϕ_1、高さを h_1 とすると、振子のモーメント I は次のようになる。

$$
I = 2\pi\rho\left[\frac{h_0\phi_0^2(h_0^2/3 + \phi_0^2/16)}{4} + \frac{h_1\phi_1^2(h_0^2 + h_0h_1 + h_1^2/3 + \phi_1^2/16)}{4}\right] \qquad (4.16)
$$

ここで、Iの誤差ΔIは、

$$
\Delta I = \sqrt{(\frac{\partial I}{\partial\phi_0}\cdot\Delta\phi_0)^2 + (\frac{\partial I}{\partial\phi_1}\cdot\Delta\phi_1)^2 + (\frac{\partial I}{\partial h_0}\cdot\Delta h_0)^2 + (\frac{\partial I}{\partial h_1}\cdot\Delta h_1)^2} \qquad (4.17)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial\phi_0} &= 2\pi\rho\left[\frac{h_0\phi_0^3}{32} + \frac{h_0\phi_0(h_0^2/3 + \phi_0^2/16)}{2}\right] && (4.18)\\
\frac{\partial I}{\partial\phi_1} &= 2\pi\rho\left[\frac{h_1\phi_1^3}{32} + \frac{h_1\phi_1(h_0^2 + h_0h_1 + h_1^2/3 + \phi_1^2/16)}{2}\right] && (4.19)\\
\frac{\partial I}{\partial h_0} &= 2\pi\rho\left[\frac{h_0^2\phi_0^2}{6} + \frac{\phi_0^2(h_0^2/3 + \phi_0^2/16)}{4} + \frac{h_1(2h_0 + h_1)\phi_1^2}{4}\right] && (4.20)\\
\frac{\partial I}{\partial h_1} &= 2\pi\rho\left[\frac{(h_0 + 2h_1/3)h_1\phi_1^2}{4} + \frac{\phi_1^2(h_0^2 + h_0h_1 + h_1^2/3 + \phi_1^2/16)}{4}\right] && (4.21)
\end{aligned}
$$

と表される。ここで、実際の数値$\phi_0 = 0.60\mathrm{cm}$, $\phi_1 = 2.40\mathrm{cm}$, $h_0 = 10.10\mathrm{cm}$, $h_1 = 2.80\mathrm{cm}$, $\Delta\phi_0 = 10\mu\mathrm{m}$, $\Delta\phi_1 = 20\mu\mathrm{m}$, $\Delta h_0 = 20\mu\mathrm{m}$, $\Delta h_1 = 20\mu\mathrm{m}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} I &\sim 30100\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^2 \\ \Delta I &\sim 51\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

となる。

振子の支点には、ワイヤーと振子を固定する治具や、光てこ用のプリズム等があり、これらの部品もモーメントに寄与する。しかし、回転中心に近いため、これらの部品が与えるモーメントへの寄与は小さく、せいぜい数十 $\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^2$ である。よって、$\Delta I \sim 100\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^2$ と見積もることは妥当であろう。これより、

$$\frac{\Delta I}{I} \sim 3.4\times10^{-3}$$

となる。

$\Delta L, \Delta l$について　$\Delta L \sim 20\mu\mathrm{m}$, $\Delta l \sim 20\mu\mathrm{m}$ を工作精度で出す。

$\Delta T_{\mathrm{near}}, \Delta T_{\mathrm{far}}$について　この誤差の要因としては、時間の読み取り誤差と振子の周期の安定性の 2 つが考えられる。しかし、振子の周期の安定性については良く分からない。よって、G を 10%の精度で決定するという要請から、逆に、$\Delta T_{\mathrm{near}}, \Delta T_{\mathrm{far}}$についての制限を与えることにする。

パラメタの誤差のまとめ

$L = 19.60\mathrm{cm}$, $l = 11.50\mathrm{cm}$ を用いる。$T_{\mathrm{near}}, T_{\mathrm{far}}$ としては、$G = 6.67\times10^{-8}\mathrm{cm}^3\cdot\mathrm{g}^{-1}\cdot\mathrm{sec}^{-2}$として計算した値 $T_{\mathrm{near}} = 226.301\mathrm{sec}$, $T_{\mathrm{far}} = 226.572\mathrm{sec}$ を用いる。ただし、この周期の値は、重力源は球、振子のおもりは質点の場合の値である。以上の結果より、式 (4.15) は、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G}{G} &= \Big[(7.0\times10^{-4})^2 + (1.7\times10^{-3})^2 + (3.4\times10^{-3})^2 + (8.0\times10^{-4})^2 + (-5.0\times10^{-4})^2 \\ &\quad +(7.39\cdot\Delta T_{\mathrm{near}})^2 + (7.38\cdot\Delta T_{\mathrm{far}})^2\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big[1.583\times10^{-5} + (7.39\cdot\Delta T_{\mathrm{near}})^2 + (7.38\cdot\Delta T_{\mathrm{far}})^2\Big]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.22}$$

となる。この式より、G を 10%の精度で決定するには、$\Delta T_{\mathrm{near}} \sim \Delta T_{\mathrm{far}} \sim 0.01\mathrm{sec}$ 程度に抑える必要があることが分かる。

4.2.3　その他の誤差

G に誤差を与える要因としては、他に次のようなものが考えられる。

- 振子の支点の水平のずれ
- 振子の支点の垂直のずれ
- 振子の中立点のずれ
- 振子の水平からのずれ
- 環境による雑音

これらの要因を、振子の周期の誤差として評価する。ここでは、これらの要因による周期の変化を重力による変化量の1%程度で抑えることにする。ここで、式 (4.2) と、式 (4.3) を比べると、$|\delta K_{\rm far}|$ は $|\delta K_{\rm near}|$ に比べて十分に小さい。よって、$T_{\rm near}$についてのみ考えれば十分である。

表記を簡略化するため、

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{4.23}$$

$$R(\theta) = \sqrt{L^2+l^2-2Ll\cos\theta} \tag{4.24}$$

を定義しておく。

振子の支点の水平のずれ

振子の支点の位置が、

(1) 2 つの重力源の中心を結んだ線分上にはあるが、中点にない場合

(2) 2 つの重力源の中心を結んだ線分上にはないが、その 2 等分線上にある場合

の 2 つに分けて考える。 (図 4.2)

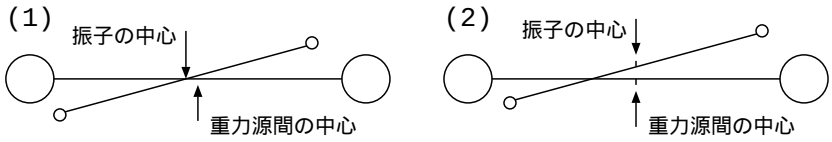

図 4.2: 水平のずれ

(1) の場合　ずれの大きさをΔx とする。このとき、重力ポテンシャル $V^{(1)}(\theta)$ は、

$$V^{(1)}(\theta) = -GMm\left[\frac{1}{(L-\Delta x)^2+l^2-2(L-\Delta x)l\cos\theta} + \frac{1}{(L+\Delta x)^2+l^2+2(L-\Delta x)l\cos\theta}\right] \tag{4.25}$$

となる。ポテンシャルの θ ついての 2 階偏微分係数が捩りバネ定数の変化量であるから、

$$\delta K^{(1)}_{\rm near} = \left.\frac{\partial^2 V^{(1)}(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} \tag{4.26}$$

$$= GMml\left[\frac{L-\Delta x}{(L-\Delta x-l)^3} - \frac{L-\Delta x}{(L-\Delta x+l)^3} + \frac{L+\Delta x}{(L+\Delta x-l)^3} - \frac{L+\Delta x}{(L+\Delta x+l)^3}\right] \tag{4.27}$$

を得る。

$L=19.6{\rm cm}$, $l=11.5{\rm cm}$, $M=8338.8994{\rm g}$, $m=106.781979{\rm g}$ のとき、縦軸に $T^{(1)}_{\rm near}$、横軸にΔx をとると、図 4.3のようになる。

これより、$\Delta x\sim 500\mu{\rm m}$ のとき、$\Delta T^{(1)}_{\rm near}\sim 0.00006{\rm sec}$ であることが分かる。

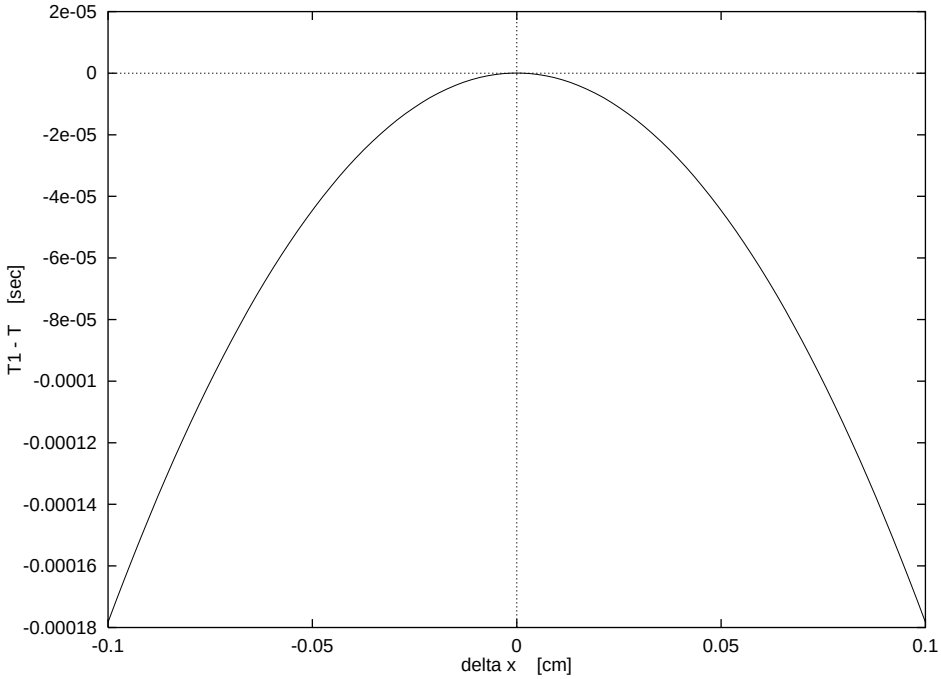

図 4.3: (1) のずれの場合の周期の変化 (near)

(2) の場合　ずれの大きさをΔyとする。このとき、2 つの重力源の中心を結んだ直線と、重力源の中心と振子の支点を結んだ直線のなす角をαとする。重力ポテンシャル $V^{(2)}(\theta)$ は、

$$V^{(2)}(\theta) = 2V(R(\theta+\alpha)) + 2V(R(\theta+\pi-2\alpha))$$

となる。ポテンシャルの θ ついての 2 階偏微分係数が捩りバネ定数の変化量であるから、

$$\begin{aligned}
\delta K^{(2)}_{\rm near} &= \left.\frac{\partial^2 V^{(2)}(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} && (4.28)\\
&= 2GMmLl\left[\frac{\cos\alpha}{(L^2+l^2-2Ll\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3Ll\sin^2\alpha}{(L^2+l^2-2Ll\cos\alpha)^{\frac{5}{2}}}\right.\\
&\quad \left. + \frac{\cos(\pi-2\alpha)}{(L^2+l^2-2Ll\cos(\pi-2\alpha))^{\frac{3}{2}}} - \frac{3Ll\sin^2(\pi-2\alpha)}{(L^2+l^2-2Ll\cos(\pi-2\alpha))^{\frac{5}{2}}}\right] && (4.29)
\end{aligned}$$

を得る。

$L = 19.6\mathrm{cm}$, $l = 11.5\mathrm{cm}$, $M = 8338.8994\mathrm{g}$, $m = 106.781979\mathrm{g}$ のとき、$\alpha \simeq \Delta y/L$ として、縦軸に $T^{(2)}_{\rm near} - T_{\rm near}$、横軸に$\Delta y$をとると、図 4.4のようになる。

これを見ると、$\Delta y \sim 4\mathrm{mm}$ のとき、$\Delta T^{(2)}_{\rm near} \sim 0.0015\mathrm{sec}$ であることが分かる。

振子の支点の垂直のずれ

これは、重力源の高さと振子の高さのずれのことである。ずれの大きさをΔh とすると、重力ポテンシャル $V^{(3)}(\theta)$ は、

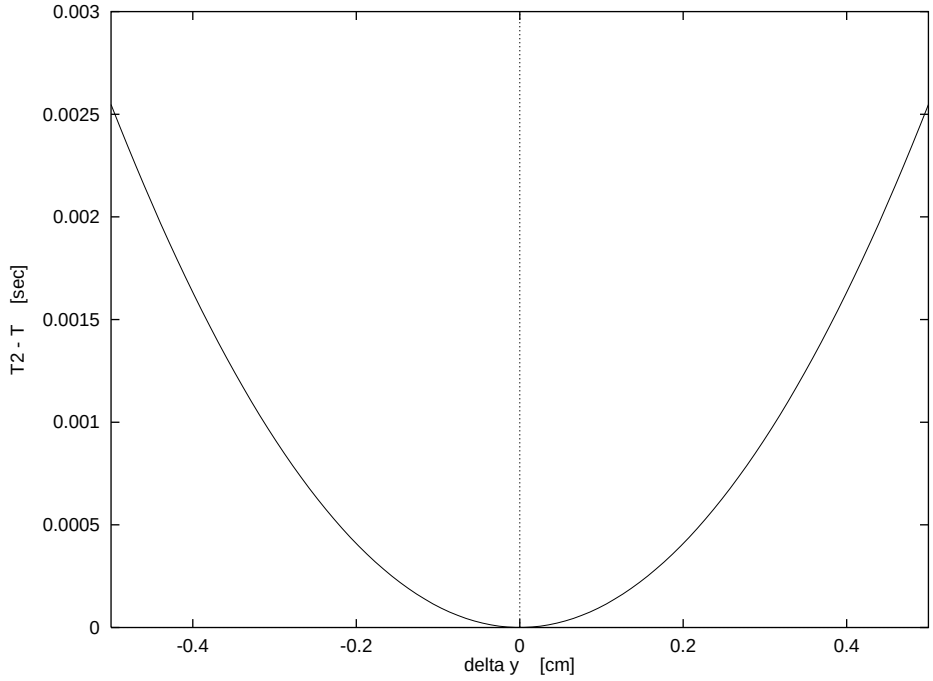

図 4.4: (2) のずれの場合の周期の変化 (near)

$$V^{(3)}(\theta) = 2V(R^{(3)}(\theta)) + 2V(R^{(3)}(\theta+\pi) \tag{4.30}$$

$$R^{(3)}(\theta) = \sqrt{L^2 + l^2 + (\Delta h)^2 - 2Ll\cos\theta} \tag{4.31}$$

となる。ポテンシャルの θ ついての 2 階偏微分係数が捩りバネ定数の変化量であるから、

$$\begin{aligned} \delta K^{(3)}_{\rm near} &= \left.\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} \\ &= 2GMmLl\left[\frac{1}{\left((L-l)^2+(\Delta h)^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left((L+l)^2+(\Delta h)^2\right)^{3/2}}\right] \end{aligned} \tag{4.32}$$

を得る。

$L = 19.6$ cm,$l = 11.5$ cm,$M = 8338.8994$ g,$m = 106.781979$ g のとき、縦軸に $T^{(3)}_{\rm near}$、横軸にΔh をとると、図 4.5のようになる。

これを見ると、$\Delta h \sim 4$mm のとき、$\Delta T^{(3)}_{\rm near} \sim 0.001$sec であることが分かる。

振子の中立点のずれ

ずれの大きさを β とすると、重力ポテンシャル $V^{(4)}(\theta)$ は、

$$V^{(4)}(\theta) = 2V\big(R(\theta+\beta)\big) + 2V\big(R(\theta+\beta+\pi)\big) \tag{4.33}$$

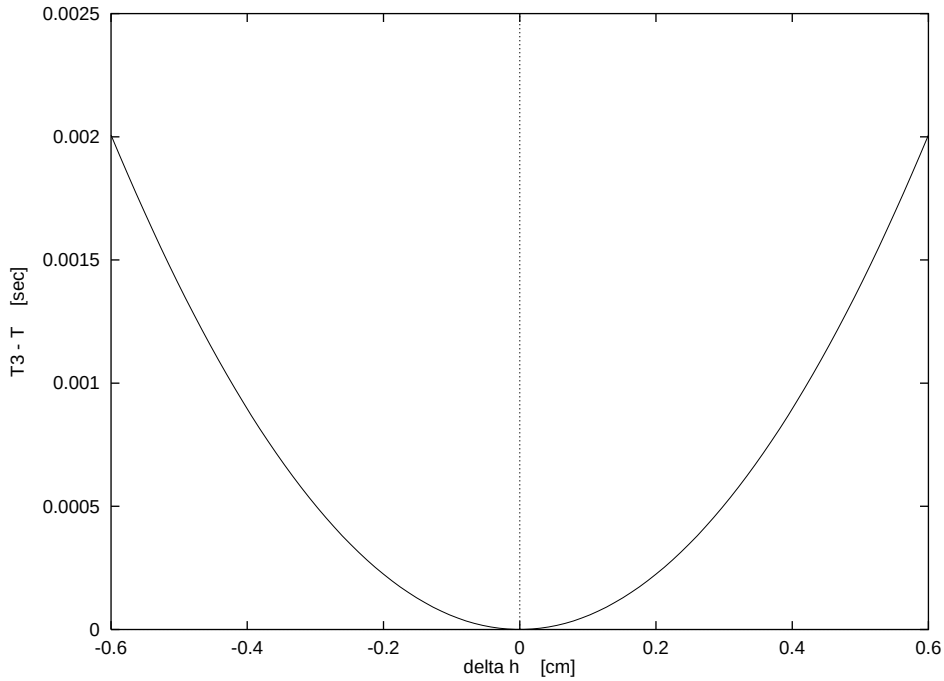

図 4.5: 垂直にずれた場合の周期の変化 (near)

となる。ポテンシャルの θ ついての 2 階偏微分係数が捩りバネ定数の変化量であるから、

$$\delta K^{(4)}_{\rm near} = \left.\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} \tag{4.34}$$

$$= 2GMmLl\left[\frac{\cos\beta}{(L^2+l^2-2Ll\cos\beta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3Ll\sin^2\beta}{(L^2+l^2-2Ll\cos\beta)^{\frac{5}{2}}} + \frac{\cos(\beta+\pi)}{(L^2+l^2-2Ll\cos(\beta+\pi))^{\frac{3}{2}}} - \frac{3Ll\sin^2(\beta+\pi)}{(L^2+l^2-2Ll\cos(\beta+\pi))^{\frac{5}{2}}}\right] \tag{4.35}$$

を得る。

$L = 19.6\text{cm}$, $l = 11.5\text{cm}$, $M = 8338.8994\text{g}$, $m = 106.781979\text{g}$ のとき、縦軸に $T^{(4)}_{\rm near}$、横軸にβをとると、図 4.6のようになる。

これを見ると、$\beta \sim 0.02\text{rad}$ のとき、$\Delta T^{(4)}_{\rm near} \sim 0.0015\text{sec}$ であることが分かる。

振子の水平からのずれ

振子が斜めに角度γだけ傾いている場合、トルクを無視すると、l が $l\cos\gamma$に縮み、振子の支点が垂直に $l\sin\gamma$だけずれていると考えることができる。式 (4.2.3) において、l を $l\cos\gamma$、Δh を $l\sin\gamma$に置き換えて、

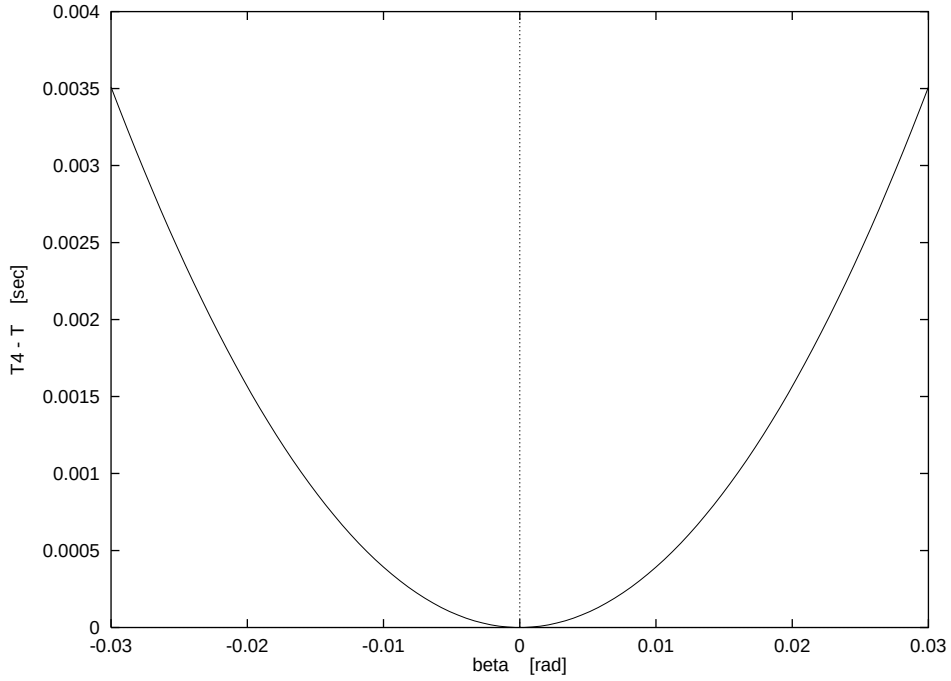

図 4.6: 中立点がずれた場合の周期の変化 (near)

$$\begin{aligned}\delta K^{(5)}_{\rm near} &= \left.\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} \\ &= 2GMmLl\cos\gamma\left[\frac{1}{\left((L-l\cos\gamma)^2+(l\sin\gamma)^2\right)^{3/2}}-\frac{1}{\left((L+l\cos\gamma)^2+(l\sin\gamma)^2\right)^{3/2}}\right] \quad (4.36)\end{aligned}$$

$$(4.37)$$

を得る。

$L=19.6\mathrm{cm}$, $l=11.5\mathrm{cm}$, $M=8338.8994\mathrm{g}$, $m=106.781979\mathrm{g}$ のとき、縦軸に $T^{(5)}_{\rm near}$、横軸にγをとると、図 4.7のようになる。

これを見ると、$\gamma\sim 0.02\mathrm{rad}$ のとき、$\Delta T^{(5)}_{\rm near}\sim 0.0006\mathrm{sec}$ であることが分かる。

環境による雑音

回りの環境から働く重力　テスト重力源以外の物体が、振子に影響を与える可能性がある。最も影響が大きいのは、この物体がテスト重力源と同じように振る舞うときである。質量 M_sの物体が、振子の支点から距離 r_sの場所にあるとすると、具体的には、このような影響を与えるものとして、近くにいる人間や月が考えられる。

このとき、式 (4.2) より、

$$\begin{aligned}\delta K^{s}_{\rm near} &= \left.\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} \\ &= 2GM_s m r_s l\left(\frac{1}{(r_s-l)^3}-\frac{1}{(r_s+l)^3}\right) \quad (4.38)\end{aligned}$$

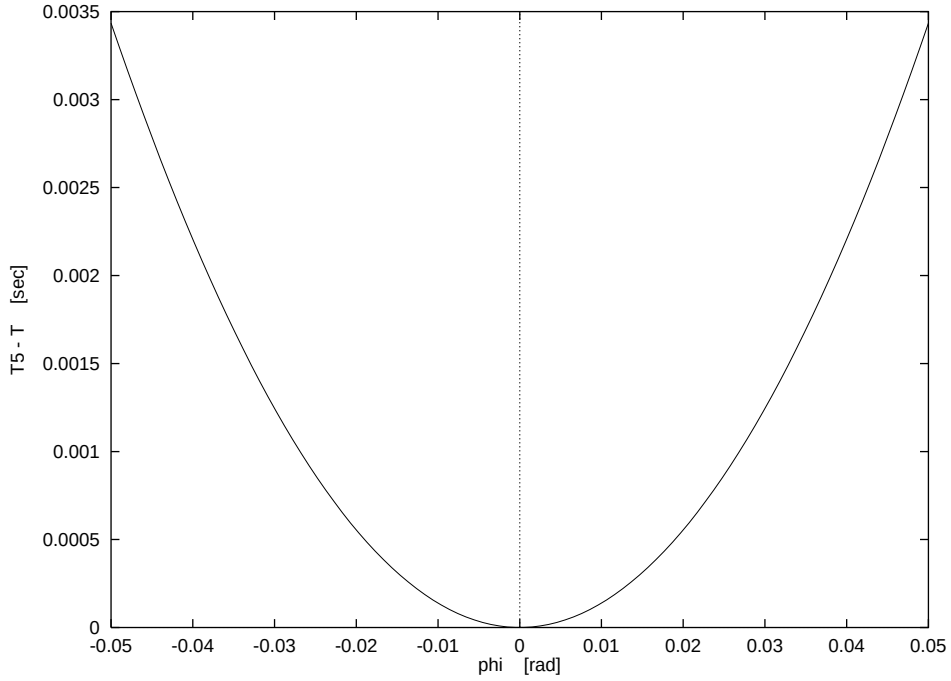

図 4.7: 振子が傾いた場合の周期の変化 (near)

を得る。

これより、例えば、体重 70kg の人が 2m の距離にいたとき、$T_{\rm near}$の変化量はおよそ 0.00048sec である。また、月の場合、質量 $M_s = 7.3483 \times 10^{25}$, 最も地球に近づく距離 $r_s = 3.56926 \times 10^{10}$を使うと、$T_{\rm near}$の変化量は 8.9×10^{-8}sec となる。よって、周囲 5m 程度に人が立ち入らないようにしておけば良い。また、大質量でも、それが遠くにある場合は気にしなくても良い。

4.2.4 誤差のまとめ

全ての誤差をまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G}{G} &= \left[1.494 \times 10^{-5} + 6.65 \times 10^{-4} + (7.39 \cdot \Delta T_{\rm near})^2 + (7.38 \cdot \Delta T_{\rm far})^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[6.8 \times 10^{-4} + (7.39 \cdot \Delta T_{\rm near})^2 + (7.38 \cdot \Delta T_{\rm far})^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.39}$$

これより、$\Delta T_{\rm near} = \Delta T_{\rm far} \sim 0.01$sec にすることができれば、$\frac{\Delta G}{G} \simeq 0.108 = 10.8\%$となり、我々の 10% を、ほぼ目標を達成できる。

以下に、許容される誤差をまとめておく。

$$\begin{aligned} \Delta L, \Delta l &\leq 20\mu{\rm m} \\ \Delta M &\leq 5.8{\rm g} \\ \Delta m &\leq 0.19{\rm g} \\ \Delta I &\leq 100{\rm g}\cdot{\rm cm}^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta x &\leq 500\mu\mathrm{m} \\
\Delta y, \Delta h &\leq 4\mathrm{mm} \\
\beta, \gamma &\leq 0.02\mathrm{rad} \\
\Delta T_{\mathrm{near}}, \Delta T_{\mathrm{far}} &\leq 0.01\mathrm{sec}
\end{aligned}
$$

4.3 装置

図 4.8のような装置を用意した。

振子をアルミ管の中にいれ、アクリルの板でふたをしてある。このアクリル板は透明で、レーザー光を通す。アクリル板の上におかれた鏡によりレーザー光はアルミ管の中へと導かれる。上から降りてきたレーザー光は、管内の鏡によりもう一度曲げられ、振子に真横からあたる。同じ経路を戻ってくることで、光てこを形成している。

振子のワイヤは長さ 46cm、直径 0.5mm の Cu-Be 線を用い、電動θステージに取りつけられている。

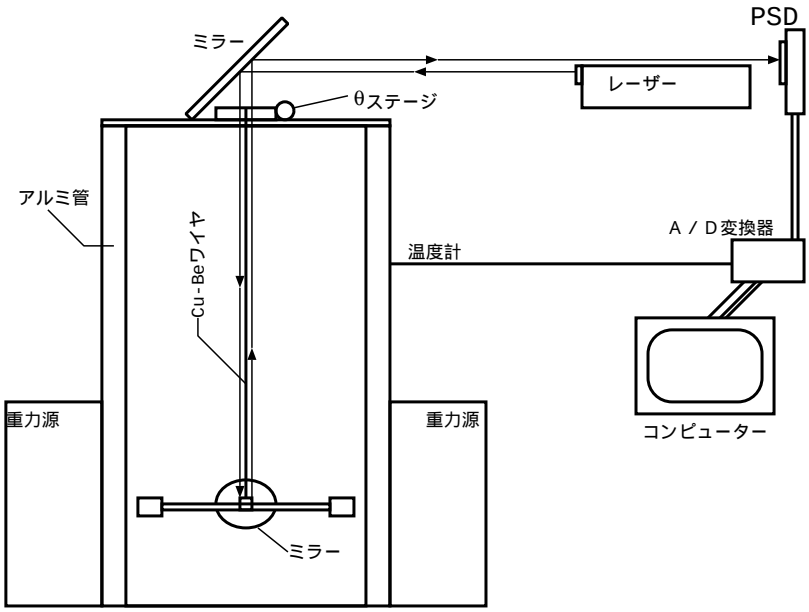

図 4.8: G 測定用装置 (全体)

装置を上から見た図を図 4.9に示す。ただし図 4.9では、アクリル板、θステージ等は書かれていない。

ワイヤ取り付け部には直角プリズムが取りつけられ、光てこの鏡の役割を兼ねている。 (図 4.10) 直角プリズムを用いることで、振子の軸回りの運動を除去することができる。

振子と重力源は真鍮製で、図 4.11のような大きさである。重力源は 8.34kg、振子は全体が 237.64g、先端部が片方で 106.78g である。その置き方も図 4.11に示してある。重力源をアルミ管壁に密着させることによって、2 つの重力源間の距離は、アルミ管の工作精度程度に保証される。

アルミ管と重力源は除震台の上に載せられ、± 0.1mrad の精度で水平が保たれている。除震台は時間とともに傾いて行くが、その変化は我々の測定時間に対して小さく、大きくても 3 時間で 0.1mrad 以下である。この傾きで振子の中心は 40μm 動くが、重心間距離の誤差の要求 $\pm 100\mu$m 以下である。

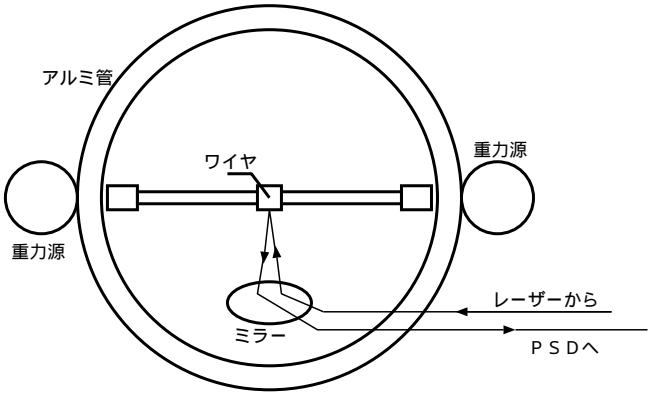

図 4.9: G 測定用装置 (上から見たところ)

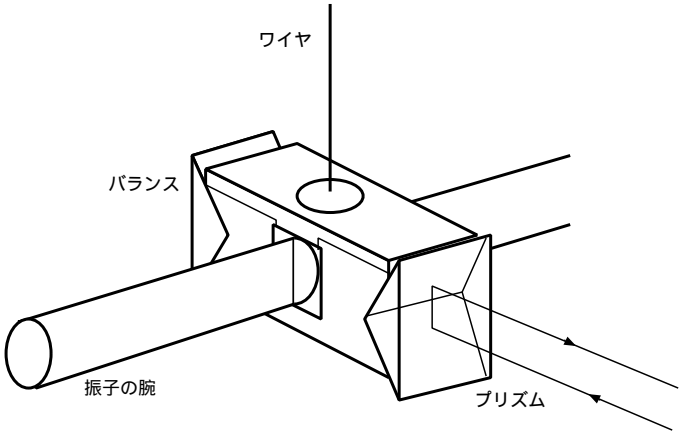

図 4.10: G 測定用装置 (ワイヤ取り付け部)

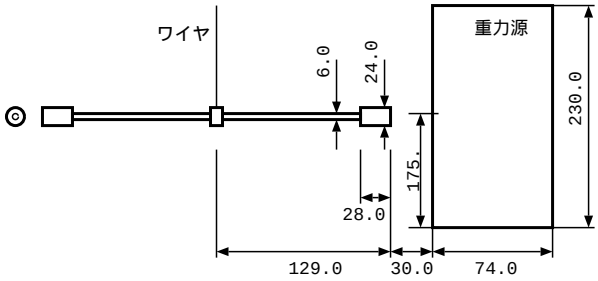

図 4.11: G 測定用装置 (振子と重力源のサイズと位置、near 位置)

レーザーは HeNe レーザーを用い、光てこのもう一端で Position Sensitive Detector により帰ってきたレーザー光の動きを検出する。PSD は入射するレーザー光の位置情報を、例えば中心から右に 1mm、上に 2mm なら出力 1 は 1V、出力 2 は 2V というように、電圧として出力する。PSD の測定範囲は 12mm 四方であり、特に中央 6mm 四方の位置精度が良く、分解能は 6μm、誤差は 60μm である。G 測定の際にはレーザー光の PSD 上でのふれがこの範囲におさまるような振子の振幅、光てこの腕の長さを選ぶ必要がある。

レーザーの位置と PSD の出力の線形性を見るため、レーザーを固定し、PSD をステージで移動させ、その出力を見た。図 4.12にその結果を示す。

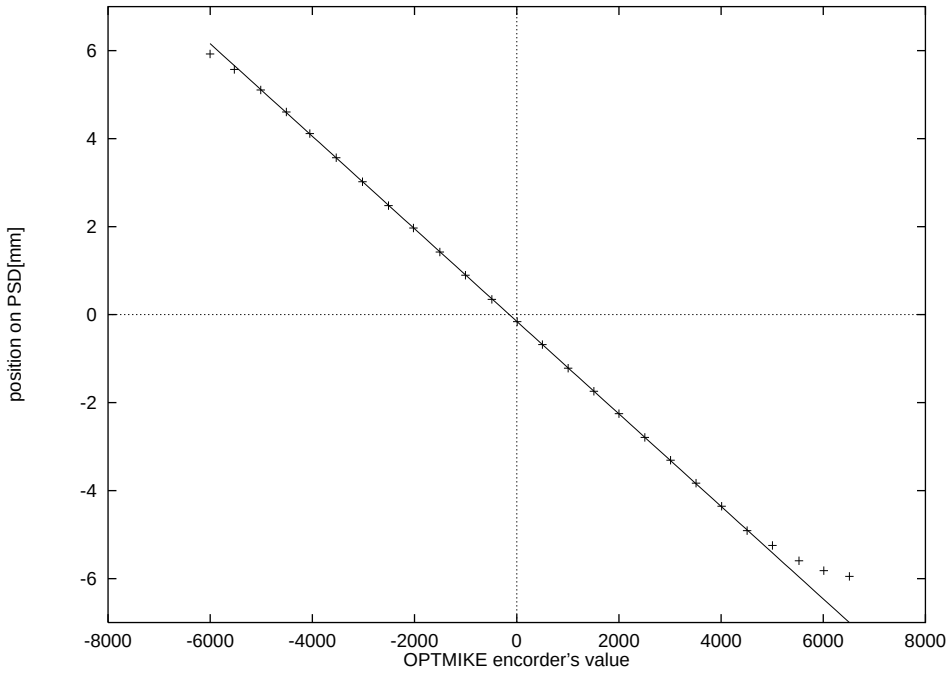

図 4.12: PSD の性能 (線形性)

これを見ると 5V 以下では直線でフィットできるが、5V 以上の出力のところで線形性からのずれが見られる。これより、実際のデータも 5V 以上の振幅の部分は破棄した。

なお、PSD の検出部にはフードが取りつけられ、外光を遮断している。

PSD の出力はデジタル信号に変換され、コンピューターに送られる。サンプリング周波数は 10Hz である。このクロックは、精度の良いクロックジェネレータ (HP 33120A 確度:90 日で 10 ppm) との比較により、我々の測定の必要精度を満たしている。

同時に装置の温度を記録するために、温度計がアルミ管に取りつけられている。

これらの装置の型番を表 4.1に示す。

4.4 万有引力定数 G の測定

4.4.1 中心位置の動きと制御

アルミ管の底面に対して正確に垂直にし、上面が底面に平行であれば、上面中央から垂らされた振子はおのずからアルミ管の中心に来る。アルミ管の垂直度は 10^{-4}rad 、上蓋の、ワイヤ取り付け位置の中心位

装置	型番
He-Ne レーザー	NEO ARK NEO-1M
PSD	hamaphoto C4674
A/D 変換器	KEYENCE NR-110
電動θステージ	SIGMA Σ-401-90KR-OME-B
白金抵抗温度計	OKAZAKI PT-100
除震台	Heltz DT-7060M-E
クロックジェネレータ	HP 33120A

表 4.1: 装置の型番

置の精度は$\pm 20\mu$m 装置全体の傾きが 1mrad で、我々の要求する条件を十分に満たす。

4.4.2 中立点位置の制御

振子は中立点から左右に $\pm$2mm の誤差が許される。アルミ管には、直径を示すけがき線が、管壁の内外に入れてあり、振子上部につけたけがき線と一致することを目でみて確かめる。

4.4.3 振子の高さと傾き

振子は重力源の重心の高さからから上下に $\pm$4mm の誤差が許される。アルミ管の内側には重力源の高さに円周のけがき線を入れてあり、振子上部と一致することを目でみて確かめる。

4.4.4 重力源の位置の確認と移動

除震台の上には、アルミ版が敷かれている。これには、振子の土台であるアルミ管の位置、重力源の近い位置、遠い位置がけがかれている。このけがき線によって、重力源の位置を確認する。重力源の移動は、手で行う。

4.4.5 得られたデータ

我々は、重力源の near 位置 と far 位置 の間の移動による Time of swing 法を計 2 回行い、一回目と二回目で捩れ振子のワイヤをはりかえた。

結果、図 4.13から図 4.24のようなデータが得られた。

4.5 解析方法とその結果

図 4.18等を見て分かるように、振子は減衰しながら振動している。各振動の極大点、極小点を取り出し、「仮想的な中立点」を作る。(図 4.25) すなわち、

$$x_{\max(\min)} = \text{極大点 (極小点) の変位} \tag{4.40}$$

$$t_{\max(\min)} = \text{極大点 (極小点) の時刻} \tag{4.41}$$

$$x_{\mathrm{center}} = (x_{\max} + x_{\min})/2 \tag{4.42}$$

$$t_{\mathrm{center}} = (t_{\max} + t_{\min})/2 \tag{4.43}$$

$$\tag{4.44}$$

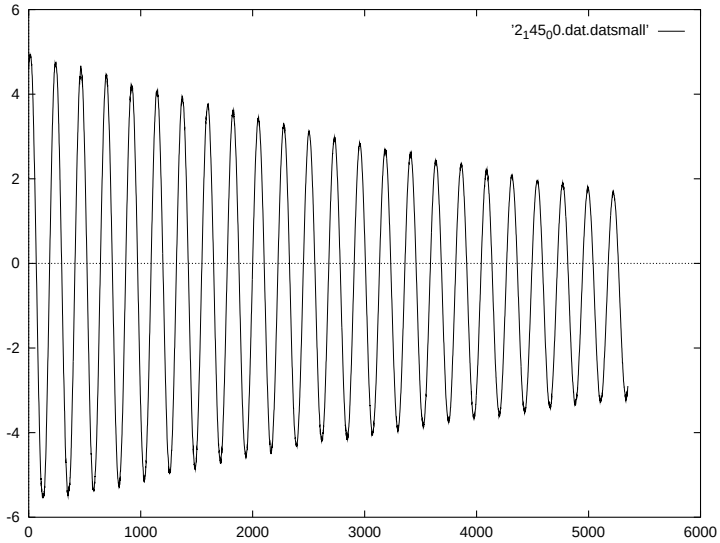

図 4.13: G 測定のデータ (一回目 near 位置 1)

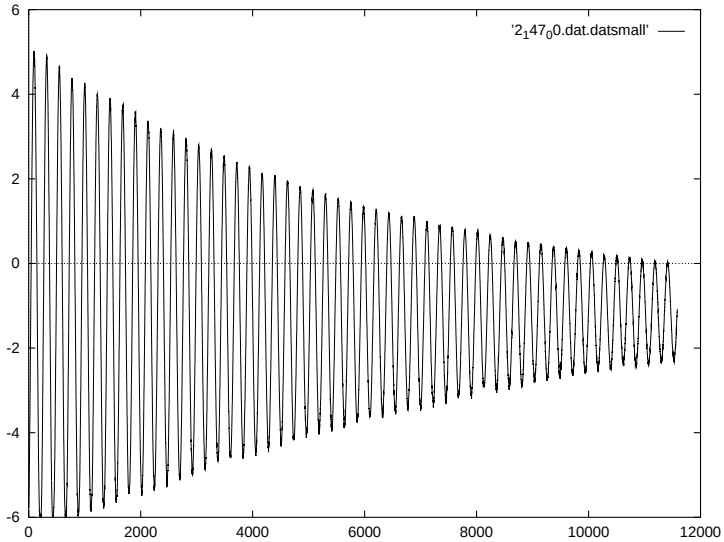

図 4.14: G 測定のデータ (一回目 near 位置 2)

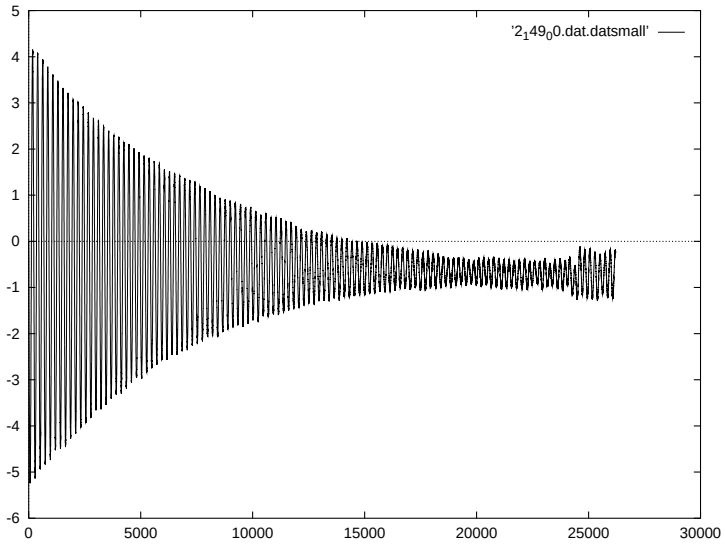

図 4.15: G 測定のデータ (一回目 near 位置 3)

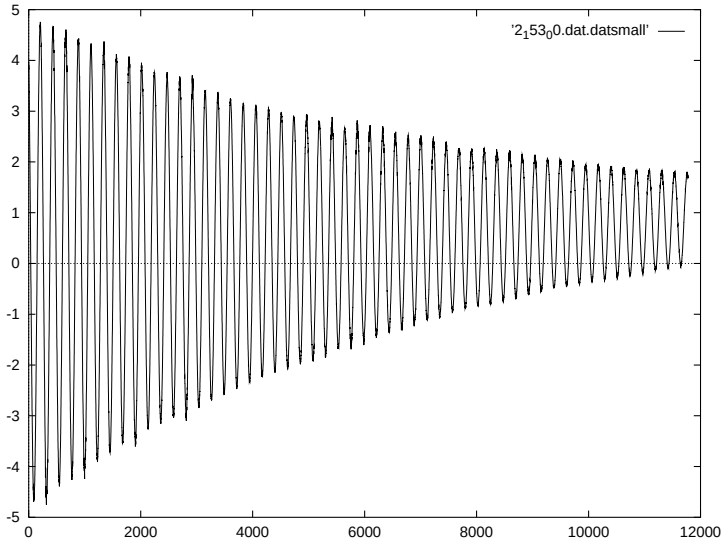

図 4.16: G 測定のデータ (一回目 far 位置 1)

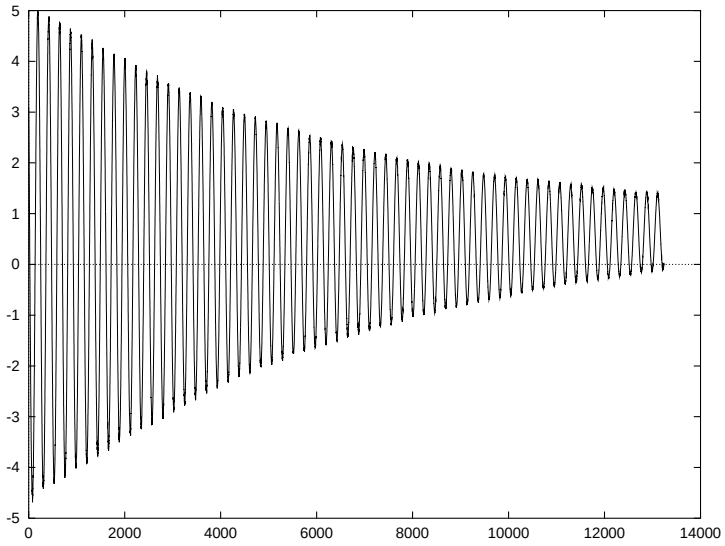

図 4.17: G 測定のデータ (一回目 far 位置 2)

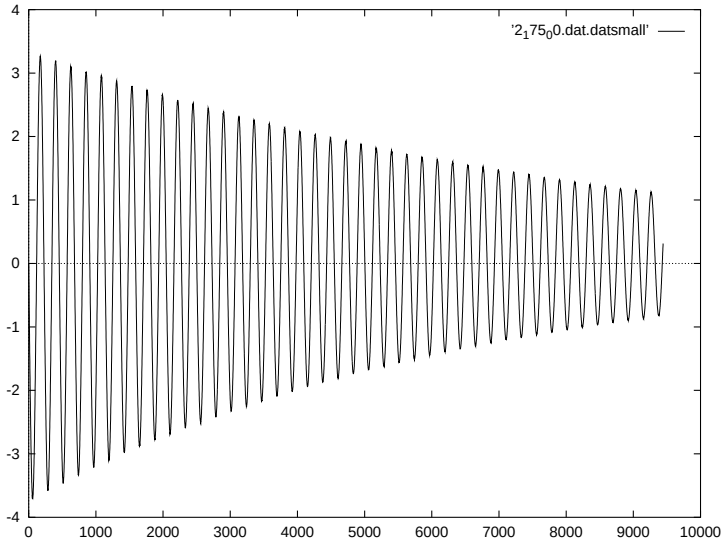

図 4.18: G 測定のデータ (二回目 far 位置 1)

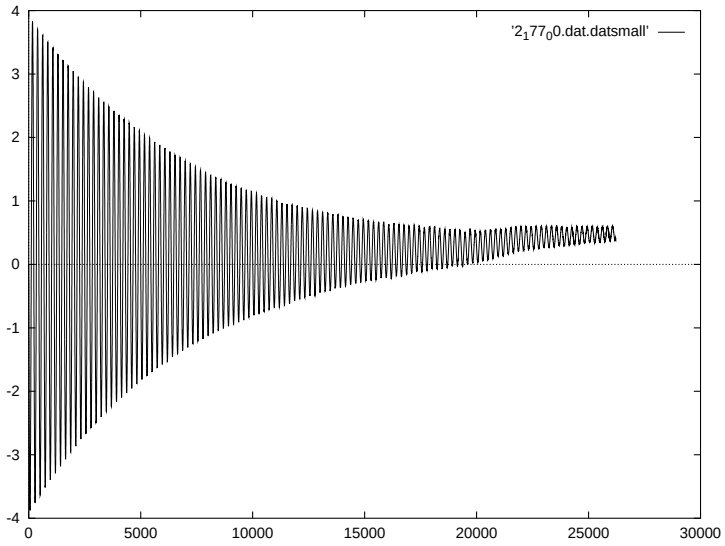

図 4.19: G 測定のデータ (二回目 far 位置 2)

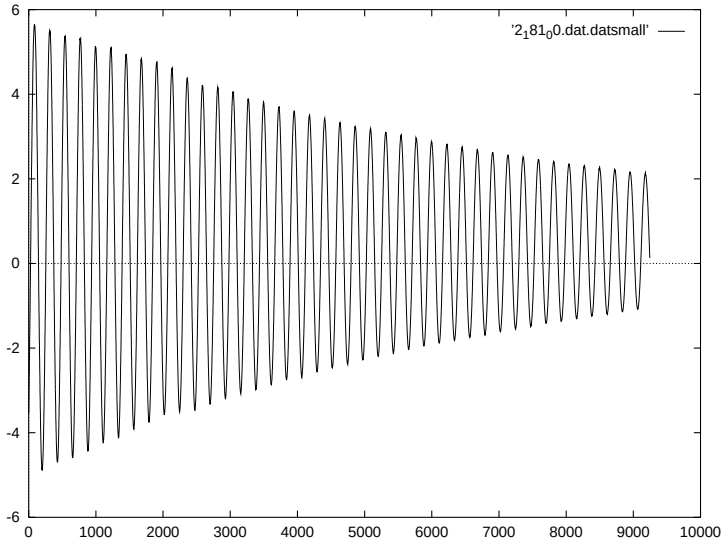

図 4.20: G 測定のデータ (二回目 far 位置 3)

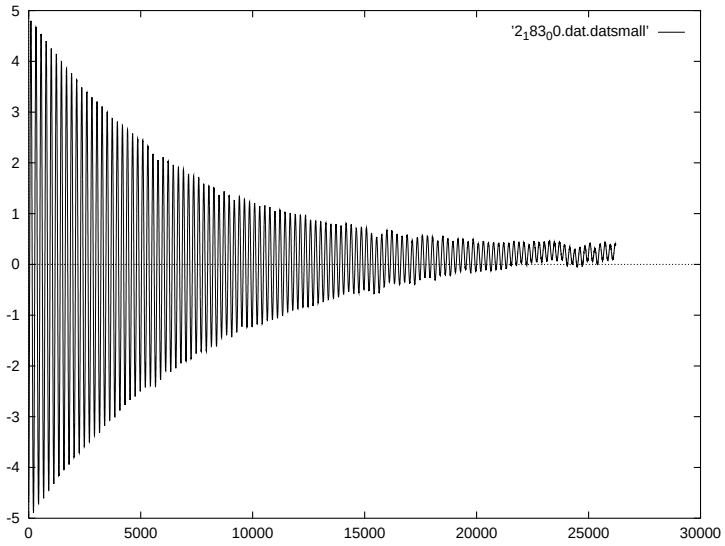

図 4.21: G 測定のデータ (二回目 near 位置 1)

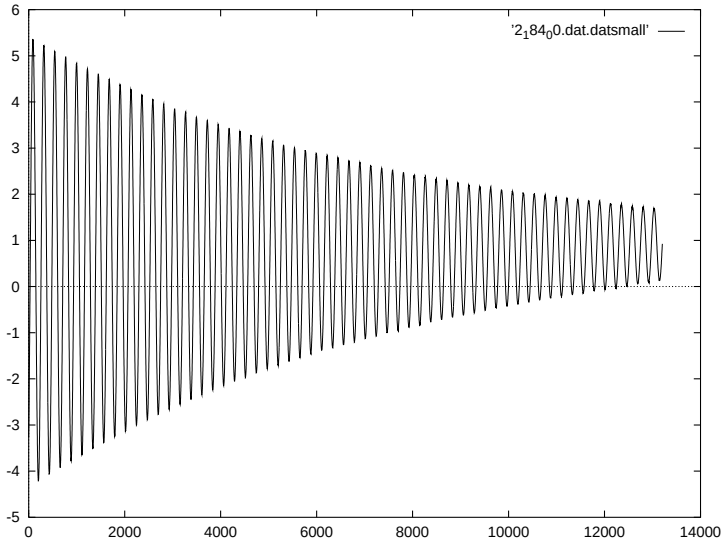

図 4.22: G 測定のデータ (二回目 near 位置 2)

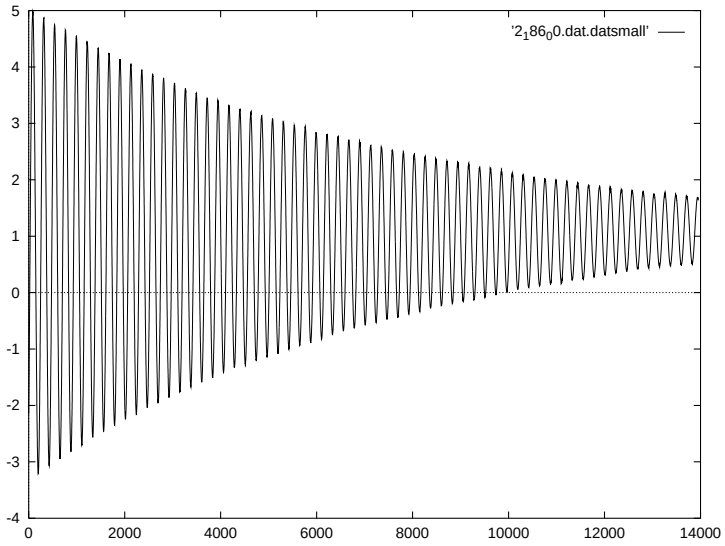

図 4.23: G 測定のデータ (二回目 near 位置 3)

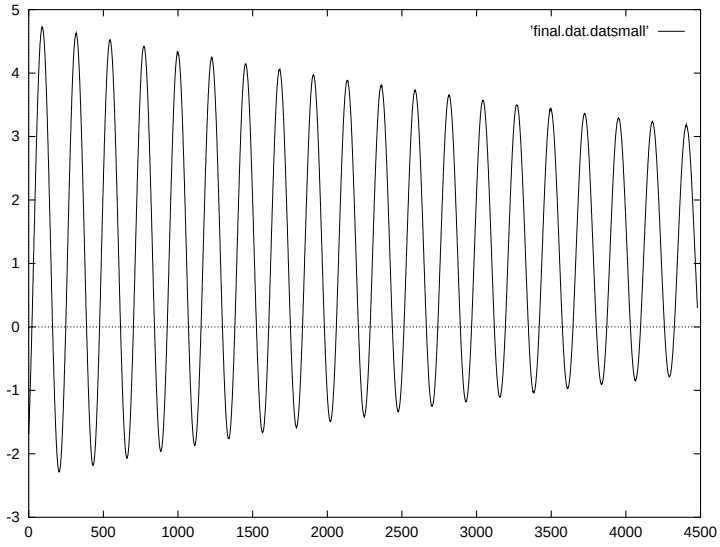

図 4.24: G 測定のデータ (二回目 near 位置 4)

とする。これを図示すると図 4.26となる。

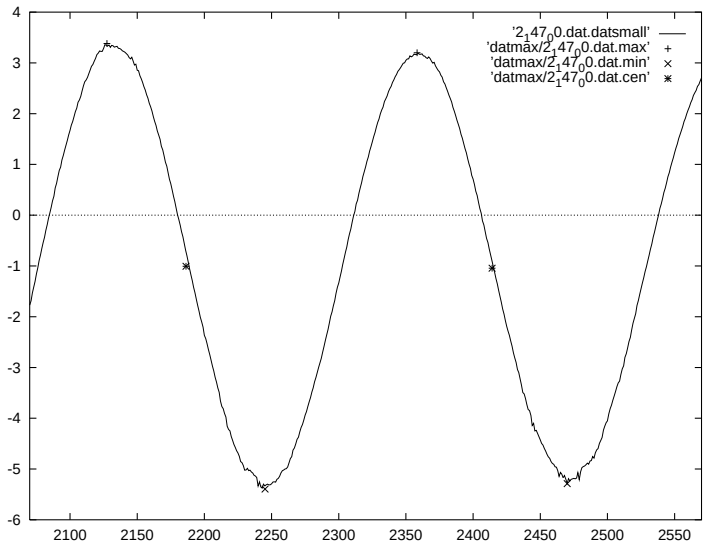

図 4.25: G 測定のデータ拡大図。 +が極大点、 ×が極小点、 ∗が仮想的な中立点

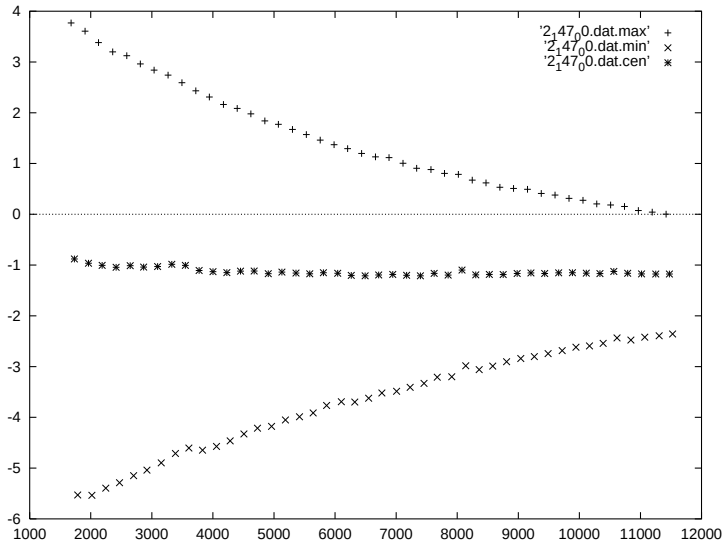

図 4.26: 極大点、極小点、中立点の動き

これを見ると、振幅は指数関数的に減衰しているようである。また、中立点がドリフトしているのが分かる。このドリフトの原因は良く分からない。これについては後に議論する。

以上から、得られたデータは、

$$x = p\exp(-qt) \times \sin(\frac{2\pi}{T}(t-\phi)) + \text{中立点のドリフト} \tag{4.45}$$

と書けそうである。

ここで、中立点のドリフトは一次関数であるという仮定をする。つまり、得られたデータは

$$x = p\exp(-qt) \times \sin(\frac{2\pi}{T}(t-\phi)) + ax + b \tag{4.46}$$

という形をしていると仮定し、この関数でデータをフィットする。フィットの様子を図 4.27に示す。これに

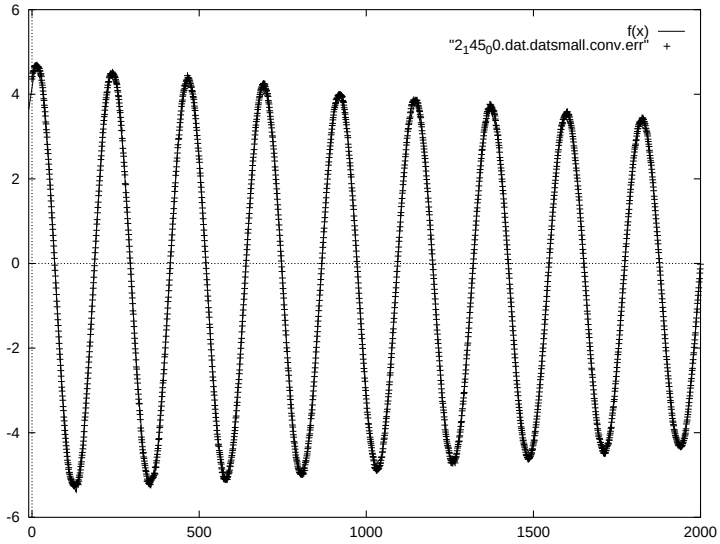

図 4.27: フィットの様子。

より、捩れ振子の周期 T が各測定結果につき 1 つづつ求まる。

先の測定結果を、この方法で解析した結果を、表 4.2に示す。

一回目			二回目		
重力源位置	周期 T (sec)	χ^2	重力源位置	周期 T (sec)	χ^2
near	226.40 ± 0.0003	8.157	near	227.03 ± 0.0001	11.22
near	226.36 ± 0.0002	15.06	near	227.08 ± 0.0001	1.485
near	226.41 ± 0.0002	13.30	near	227.11 ± 0.0001	3.888
			near	227.07 ± 0.0005	0.5479
far	226.57 ± 0.0002	11.24	far	227.31 ± 0.0002	9.035
far	226.56 ± 0.00001	5.297	far	227.28 ± 0.0002	3.009
			far	227.30 ± 0.0004	3.697

表 4.2: データを全域でフィットして求めた捩れ振子の周期。

次に、これら 1 回目と 2 回目の near と far の 4 グループで、それぞれ平均とその決定精度を求める。精度 ΔT は、データ点を T_i、データ点数を n、平均値を T とおき、$s_n \equiv \sqrt{\frac{\sum_i (T_i - T)^2}{n-1}}$として、

$$\Delta T = s_n/\sqrt{n} \tag{4.47}$$

で求めた。結果を表 4.3に示す。

	一回目	二回目
near	226.40 ± 0.015	227.07 ± 0.017
far	226.562 ± 0.006	227.30 ± 0.009

表 4.3: 捩れ振子の周期の平均とその精度。

これらのデータから万有引力定数 G とその誤差 ΔG を求める。まず G の値であるが、重力源は球、捩じれ振子のおもりが質点というモデルを用いず、重力源と振子のおもりが共に円柱という場合において、数値計算で値を算出した。次に ΔG であるが、$\Delta L, \Delta l, \Delta M, \Delta m$ による誤差はモデルを用いて計算した。$\Delta T_{\rm near}, \Delta T_{\rm far}$ による誤差については、微分係数 $\frac{\partial G}{\partial T_{\rm near}}$ を数値計算によって求め、$\frac{\partial G}{\partial T_{\rm near}} = \frac{\partial G}{\partial T_{\rm far}}$ と仮定して、その値を使って誤差を伝播させた。$\Delta x, \Delta y, \Delta h, \beta, \gamma$ については、それぞれの大きさについては、4.2.3で行ったように、モデルで $\Delta T_{\rm near} = \Delta T_{\rm far}$ として評価し、誤差の伝播に使う微分係数についてのみ、数値計算した値を使用した。

すると一回目とに回目それぞれにおいて $G \pm \Delta G$ が求まる。それを表 4.4に示す。

一回目	二回目
$(7.9 \pm 0.7) \times 10^{-8}$	$(9.7 \pm 0.8) \times 10^{-8}$

表 4.4: 1 回目と 2 回目それぞれから求めた万有引力定数 G

次にこの二つの値を結合する。

結果、

$$G = (8.7 \pm 0.5) \times 10^{-8}$$

を得た。

4.6 考察

我々の結果は、一般に知られている値 $G = 6.7 \times 10^{-8}$ と矛盾する。この原因として、中心値を移動させる誤差があるはずである。振子と重力源の間の距離が違っていたという可能性が、まず考えられるが、それだけでは、この違いを完全に説明することはできない。我々が見落としている誤差があるのかも知れない。

我々は、ΔG を評価する際に、重力源が球で振子のおもりが質点というモデルを用いた。我々の目標である「G を 10%の精度で決定する」を達成するにはこれで十分であろう。しかし、より良い精度でを決定する際には、重力源と振子のおもりを円柱として、きちんと計算する必要がある。

また、我々の測定では、周期の誤差が 最大で 0.02sec 程度あった。この原因として、$\Delta x, \Delta y, \Delta h, \beta, \gamma$ による誤差が考えられるが、これは、球と質点のモデルで見積もったところ、合計で 0.0025sec であった。これは、モデルによる計算なので、実際は数倍になる可能性もあるが、それでも説明がつかない。我々は経験的に、振子の平衡点の変化や、捩れ振幅の再励起などの現象があることを知っているが、我々の行った解析では、これらの現象が十分に考慮されていない。また、この実験では、重力源を近い位置から遠い位置に移動させる際、除震台を大きく揺らしてしまった。この揺れが、ワイヤーの物性や振子本体に影響を与えて、周期が変化したという可能性もある。これらがおおきな周期のばらつきの原因であると考えられる。振子の平衡点の変化や、捩れ振幅の再励起などを取り除くためには、次のような対策が考えられる。

- 除震設備の充実。

- 捩れ振子を真空中で振らせる。

加えて、重力源を静かに移動させる工夫を行えば、より良い G の値を求めることができるであろう。

Chapter 5

カシミール力測定への可能性の考察

Chapter 3 によると、我々の捩れ振子の周期はカシミール力によ って 0.015sec 変化する。当然、この変化を検出できるだけの周期の安定性が要求される。少なくとも 0.005sec 程度の精度があれば、カシミール力を検出できるであろう。

4.5によれば、周期 T の誤差は最も大きい場合で$\Delta T \simeq 0.017$sec 程度であ った。これは 4 回測定したときのものであるので、測定を 50 回繰り返せばこの精度は達成できる。

Chapter 6

結論

我々はカシミール力を検出するために、捩れ振子を使った実験計画を立てた。Chapter 3 によれば、もともと 198.5sec であった捩じれ振子の周期が、0.015sec 変化するはずである (周期変化率 0.008%)。

この計画を実証する目的で、我々は重力定数Gの測定を行った (Chapter 4)。この実験では、もともと 227.3sec であった捩れ振子の周期が変化し (周期変化率 0.07%)、結果重力定数Gは

$$G = (8.7 \pm 0.5) \times 10^{-8}$$

と測定された。

この結果、測定回数を 50 回に増やして周期決定精度を改善すれば、この方法でカシミール力を検出できることがわかった。しかし、捩れ振子の中立点の変化や、捩れ振幅の増大などを抑える方法を開発することが望ましい。

Chapter 7

付録

重力定数 G の測定機の捩れ振子の周期は、実際には振幅依存性を持つ。しかし我々は、本文中では、重力源によるポテンシャルを 2 次までで近似して、周期の振幅依存性を無視した。ここでは、それが正しい取り扱いであることを見るために、捩れ振子の周期変化の振幅依存性を計算する。

本文中の考察では、捩れ振子の周期変化を、重力源と捩れ振子のおもりが共に球であるとして解析的に計算を行っている。しかしここでは、重力源と、捩れ振子のおもりと、捩れ振子の二つのおもりをつなぐ丸棒、の 3 つの形状を考慮にいれた数値計算を用いた。その結果が図 7 である。横軸が捩れ振子の振幅、縦軸が、捩れ振子の振幅が 0 のときの周期変化、つまり我々が本文中で用いている周期変化の値を 0 として、そこからの違いを表している。

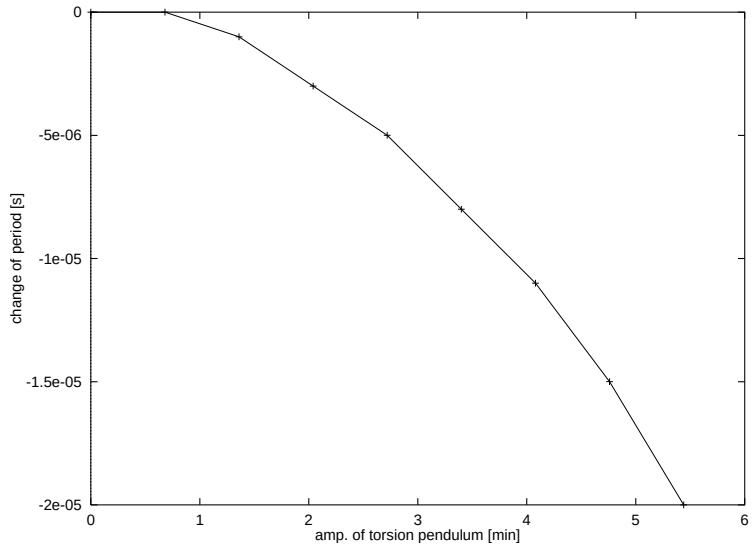

図 7.1: 捩れ振子の周期変化の振幅依存性。捩れ振子の振幅が 0 であるときの周期変化を 0 としてプロットした。

これをみれば、振幅 5 分のときの周期変化は、振幅 0 分のときの周期変化と 0.00002s 程度しか違わないことが分かる。よって、確かに捩れ振子の周期変化の振幅依存性は全く無視しても大丈夫である。

謝辞

この実験を行うにあたり、素粒子物性研究室の政池先生、延與先生、舟橋先生、宮下さんには、実験面で非常にご協力いただいた。素粒子論の九後先生には理論面での助言を賜った。高エネルギー研究室の坂本先生にはパルスジェネレーターなど実験装置を提供していただいた。松村さんの捩れ振子に関する論文や黒田研の G 測定の論文は大いに参考になった。㈱キーエンスの太田さんからは、高価な測定装置を無料でお借りした。アルミ管を提供してくださった舞原先生や、温度計、Piezo Stacks をお借りした海老沢先生、石英ファイバーの製作でお世話になったガラス室の春日さん、様々な工作をしていただいた多中さんなど、今回の装置作成には多くの方のご協力がある。

ここに厚くお礼申し上げる次第である。

参考文献

[1] H.B.G.Casimir Koninkl.Ned.Adak.Wetenschap.Proc. **51** 793(1948)

[2] The Casimir Effect and its Applications Oxford University Press (1997)

[3] S.K.Lamoreaux Phys.Rev.Lett. **78** 5(1997)

[4] L.D.Landau and E.M.Lifshitz THEORY OF ELASTICITY Pergamon Press Ltd. (1959)

[5] 黒田和明日本物理学会誌 **Vol.52,No.10** 753(1997)