

## 1 崩壊確率

Energy  $E$  で electron が放出される確率  $P(E)$  は Fermi 理論から

$$P(E)dE \propto F(\pm Z, E)pE(E_0 - E)^2dE \quad (1)$$

となる。ここで  $\pm Z$  の絶対値は  $\beta^\mp$  崩壊後の核の電荷、 $p$  は放出される electron の運動量である。崩壊における核の Coulomb 場の影響は Fermi 関数  $F$  の中に取り入れられている。

$$F(\pm Z, E) = 2(1 + \gamma)(2pR)^{2\gamma-2} \exp(\pm\pi\gamma) \frac{|\Gamma(\gamma \pm i\nu)|}{[\Gamma(2\gamma + 1)]^2} \quad (2)$$

ここで

$$\gamma = (1 - \alpha^2 Z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \nu = \frac{\alpha Z E}{p} \quad (3)$$

である。 $\Gamma$  は gamma 関数、 $R$  は原子核の半径 ( $\approx 5.42$  fm)、 $\alpha$  は微細構造定数 ( $\approx 1/137$ ) を示す。ただし、 $\hbar = c = m_e = 1$  という単位系を用いている。

実際の測定において、放射線源から energy  $E$  を持って electron が放出される確率  $P(E)$  は、その energy における  $\beta$  線の count 数  $N(E)$  に比例する。しかしながら、統計誤差の影響により end point  $E_0$  が不明瞭となる。そこで式 (1) を参照に  $K(E)$  を

$$K(E) = \sqrt{\frac{N(E)}{F(\pm Z, E)pE}} \quad (4)$$

と定義する。このとき  $K(E)$  は energy に比例し、 $K(E_0) = 0$  となる。そのため  $N(E)$  の統計誤差が十分小さい範囲については  $K(E)$  の fitting が容易であり、その式から  $K(E) = 0$  を計算することで end point が得られる。この手法を Kurie plot と言う。

## 2 エネルギー損失

荷電粒子が物質を通過する際の energy loss は Bethe-Bloch の公式により計算できる。

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[ \ln\left(\frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2}\right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z} \right], \quad (5)$$

ここで、定数部分は

$$2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 = 0.1535 \text{ MeVcm}^2/\text{g},$$

であり、それぞれの文字の意味は以下に示す。

$r_e$	: 古典電子半径 = $2.817 \times 10^{-13}$ cm.	$\rho$	: 媒体の密度.
$m_e$	: 電子の質量.	$z$	: 入射粒子の電荷.
$N_a$	: アボガドロ数 = $6.022 \times 10^{23}$ mol $^{-1}$ .	$\beta$	: 入射粒子の $v/c$ .
$I$	: 平均イオン化ポテンシャル.	$\gamma$	: $(1 - \beta^2)^{-1/2}$ .
$Z$	: 媒体の原子番号.	$\delta$	: 密度補正.
$A$	: 媒体の質量数.	$C$	: 殻補正.
$W_{max}$	: 単衝突での最大エネルギー移行.		

最大エネルギー移行は正面衝突により生成され、入射粒子の質量を  $M$  として

$$W_{max} = \frac{2m_e c^2 \eta^2}{1 + 2s\sqrt{1 + \eta^2 + s^2}}. \quad (6)$$

ここで  $s = m_e/M$ 、 $\eta = \beta\gamma$  である。

#### 殻および密度補正

密度効果とは、入射粒子の作る電場がその飛跡の周囲の原子に極性を与えることで、飛跡から離れた所にある電子が電場から保護される現象である。結果、外側の電子ほど energy loss が Bethe-Bloch の公式の値より小さくなる。これはエネルギーの高い入射粒子ほど重要になる。また、 $\delta$  が物質の密度に依存することは明らかで、公式は

$$\delta = \begin{cases} 0 & X < X_0 \\ 4.6052X + C_0 + a(X_1 - X)^m & X_0 < X < X_1 \\ 4.6052X + C_0 & X_1 < X, \end{cases} \quad (7)$$

であり、ここで  $X = \log_{10}(\beta\gamma)$ 。  $X_0$ 、 $X_1$ 、 $C_0$ 、 $a$ 、 $m$  は物質に依存する定数である。

殻補正  $C$  は、入射粒子の速度  $v$  が束縛電子の軌道速度と同等以下になったときに効いてくる。このような状況では、電子が入射粒子に対して止まっているという仮定は妥当ではなくなる。一般に、この補正は小さい。

#### 混合物における $\frac{dE}{dx}$

混合物に対しては一般に、それぞれの要素に属する電子の割合によって  $dE/dx$  の平均をとり、これは良い近似となる。 $w_1, w_2, \dots$  を要素 1, 2, ... の割合とすると、

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = \frac{w_1}{\rho_1} \left(\frac{dE}{dx}\right)_1 + \frac{w_2}{\rho_2} \left(\frac{dE}{dx}\right)_2 + \dots \quad (8)$$

さて、分子の  $i$  番目の要素の原子の数を  $a_i$ 、重さを  $A_i$  とすると、

$$w_i = \frac{a_i A_i}{A_m}, \quad (9)$$

であり、 $A_m = \sum a_i A_i$ 。これらの式をより明白に拡張することで、直接に式 (bethe-bloch) に使うことが出来る。

$$Z_{eff} = \sum a_i Z_i, \quad (10)$$

$$A_{eff} = \sum a_i A_i, \quad (11)$$

$$\ln I_{eff} = \sum \frac{a_i Z_i \ln I_i}{Z_{eff}}, \quad (12)$$

$$\delta_{eff} = \sum \frac{a_i Z_i \delta_i}{Z_{eff}}, \quad (13)$$

$$C_{eff} = \sum a_i C_i. \quad (14)$$

### 3 Scintillator histogram

以上の議論から、electron が scintillator に入射した場合の histogram を的確に予想できる。今回の実験で使用した scintillator は BC-400 であり、標的  $^{28}_{13}\text{Al}$  の  $\beta$  崩壊



による electron energy を \*\* 章に示す方法で測定する。BC-400 の定数については表 2 に示す。

表 1: Scintillator BC-400 における定数

H/C 比	1.103
密度	1.032 (g/cm <sup>3</sup> )
平均イオン化ポテンシャル	64.7 (eV)
$X_0$	0.1464
$X_1$	2.49
$C_0$	3.2
$m$	3.24
$a$	0.161

25mm scintillator には 3mm scintillator で energy loss した electron が入射することに注意し、式 (1),(4) を用いてそれぞれについて  $\beta$  線の histogram を求めた (図 a)。図 a との比較により、本実験で得られた histogram (図 b) に見える peak の様子は適当と言える。

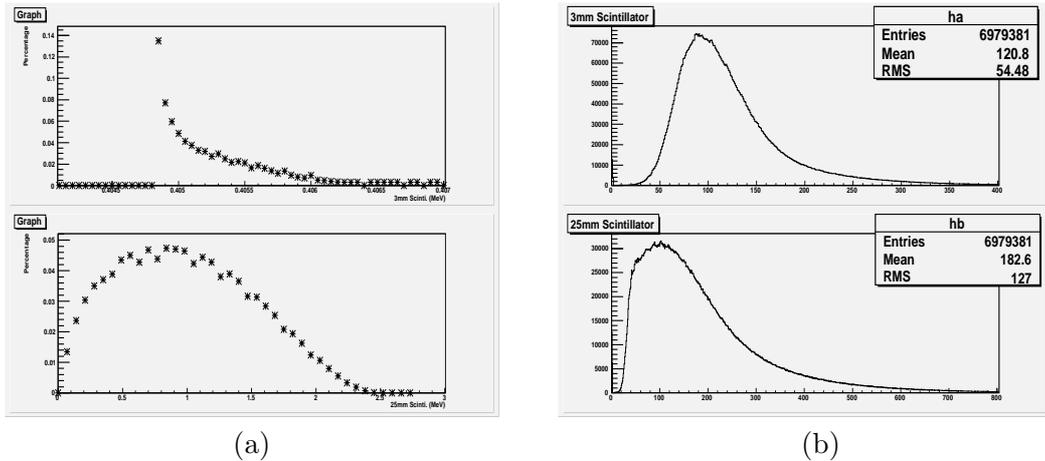


図 1:  $\beta$  線 histogram. (a) が式 (1) および (4) を用いて計算した結果であり、(b) が本実験の測定結果 (全 RUN) である。ともに上が 3mm scintillator を、下が 25mm scintillator を示す。

3mm scintillator については図より threshold level も得られる。ADC channel における threshold level は HV を変更した histogram を比較することで明瞭となり、これは 40ch 程度である (下図)。図 (a) より peak は 405 keV 程度に現れ、これは図 (b) において 90 ch に相当する。Pedestal は 1 ch であるから 1 ch = 4.5 keV であり、threshold level 40 ch = 180 keV と言える。それぞれの RUN に対する threshold level は表に示す。

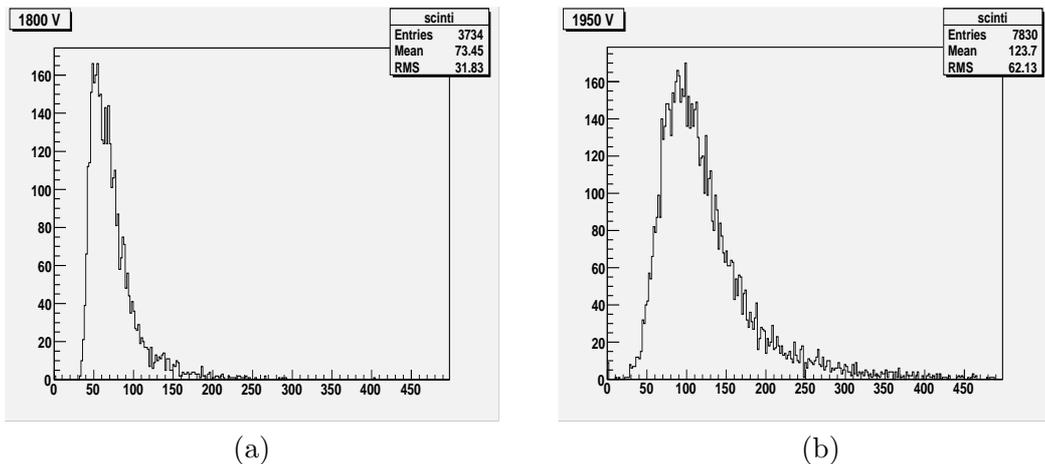


図 2: HV を変更した際の 3mm scintillator histogram. (a) は 1800V、(b) は 1950V に設定している。(a) の peak 立ち上がりの様子から、threshold level はおよそ 40 ch といえる。

25mm scintillator は Kurie plot により calibration を行った。まず、3mm scintillator を通過する  $\beta$  線は MIP であると考え、その energy loss (405keV) を補正

した上で式 (4) を用いる。このとき、(I) 適当な値  $a$  を用いて

$$E = a \times (\text{ADCchannel} - \text{Pedestal}) + 1.79 \quad (16)$$

を仮定し、Kurie plot により endpoint (ADC channel) を得る。(II) この endpoint と Table of Isotope による実験値との比較により係数  $a$  を算出し、再び Kurie plot を行う。(III) 過程 (II) を仮定した  $a$  が算出された  $a$  の誤差範囲に十分納まるまで繰り返す。これらの過程により係数  $a$  を取得し、threshold level を得た。ただし、Pedestal = 12 ch、threshold level = 30 ch としている。

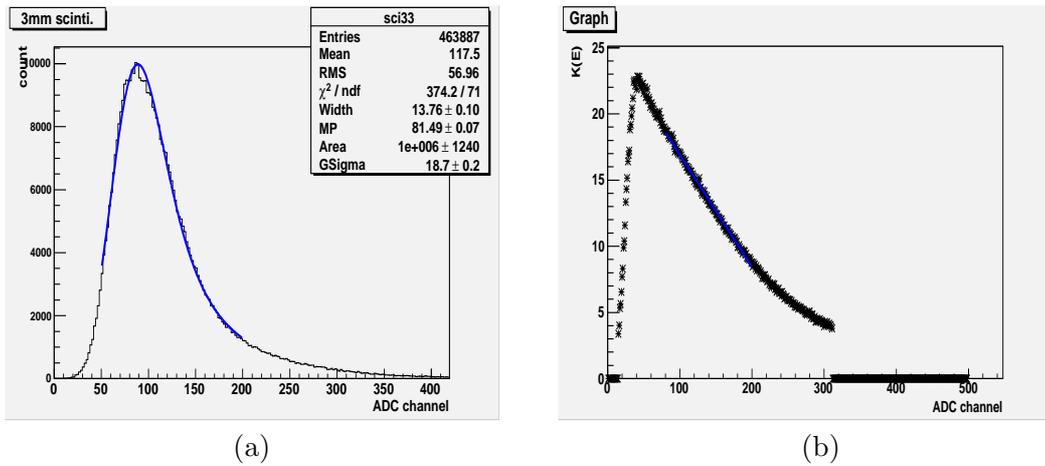


図 3: Fitting. (a) は 3mm scintillator に対して Gaussian 補正を施した Landau 分布で、(b) は 25mm scintillator に対する Kurie plot を直線でそれぞれ fit している。

RUN number	3mm THR (keV)	25mm THR (keV)
6	171	144 ± 6
7	177	144 ± 5
8	177	144 ± 5
9	175	144 ± 5
10	175	143 ± 6
11	174	145 ± 5
12	184	145 ± 4
13	181	144 ± 4
14	180	144 ± 5
16	184	145 ± 4
17	186	145 ± 4
18	185	146 ± 4
19	196	147 ± 4
20	195	148 ± 4
21	187	147 ± 4
22	187	147 ± 4
23	196	147 ± 4
25	186	145 ± 5
26	187	145 ± 4
27	192	146 ± 4
28	199	148 ± 4