Chapter 10 APPENDIX

1　ミューオンの崩壊

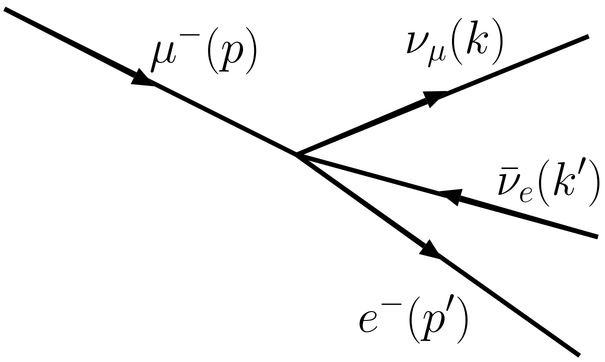

Fig.1.1　ミューオンの崩壊

不変振幅は

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}(k)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p)\right] \left[\bar{u}(p')\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(k')\right] \tag{1.1}$$

である。

崩壊率はこれから

$$d\Gamma = \frac{1}{2E}|\bar{M}|^2 d\mathrm{Lips} \tag{1.2}$$

と求める事が出来る。

それぞれの要素について、不変位相体積は

$$\begin{aligned} d\mathrm{Lips} &= \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'} (2\pi)^4 \delta(p - p' - k - k') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3p'}{2E'} \frac{d^3k'}{2\omega'} \theta(E - E' - \omega')\delta((p - p' - k')^2) \end{aligned} \tag{1.3}$$

不変振幅の二乗の平均は

$$\begin{aligned} |\bar{M}|^2 &= \frac{1}{2}\sum |M|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^2 \sum \left[\bar{u}(k)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu(1-\gamma^5)u(k)\right] \left[\bar{u}(p')\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(k')\bar{v}(k')\gamma_\nu(1-\gamma^5)u(p')\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^2 \mathrm{Tr}\left[\not{k}\gamma^\mu(1-\gamma^5)(\not{p} - m)\gamma^\nu(1-\gamma^5)\right] \mathrm{Tr}\left[\not{p}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\not{k}'\gamma_\nu(1-\gamma^5)\right] \\ &= 64G^2(k \cdot p')(k' \cdot p) \end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで $p-k'=p'+k$ であり、電子とニュートリノの質量を無視し、ミューオンの静止系を考えて

$$\begin{aligned}2(k\cdot p')(k'\cdot p) &= (p'+k)^2(k'\cdot p) \\ &= (p-k')^2(k'\cdot p) \\ &= (p^2-2(p\cdot k'))(k'\cdot p) \\ &= (m^2-2m\omega')m\omega'\end{aligned} \tag{1.5}$$

これから

$$\begin{aligned}d\Omega &= \frac{1}{2E}|\bar{M}|^2 d\mathrm{Lips} \\ &= \frac{1}{2m}64G^2\frac{1}{2}(m^2-2m\omega')m\omega'\delta(m^2-2mE'-2m\omega'+2E'\omega'(1-\cos\theta)) \\ &= \frac{G^2}{2m\pi^5}\frac{4\pi E'^2dE'2\pi\omega'^2d\omega'd(\cos\theta)}{2E'2\omega'}m\omega'(m^2-2m\omega')\delta(m^2-2mE'-2m\omega'+2E'\omega'(1-\cos\theta)) \\ &= \frac{G^2}{2\pi^3}\frac{E'dE'd\omega'\omega'd(\cos\theta)}{E'\omega'}m\omega'(m^2-2m\omega')\delta\left(\frac{m^2-2mE'-2m\omega'+2E'\omega'}{2E'\omega'}-\cos\theta\right) \\ d\Gamma &= \frac{G^2}{2\pi^3}dE'd\omega'm\omega'(m-2\omega')\end{aligned} \tag{1.6}$$

ここで、最後の式変形で δ 関数を積分するさいに、$-1\leq\cos\theta\leq 1$ の条件から

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m-E'\leq\omega'\leq\frac{1}{2}m \\ 0\leq E'\leq\frac{1}{2}m\end{aligned} \tag{1.7}$$

が出てくる。

$d\Gamma$ をさらに ω' で積分し

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{dE'} &= \frac{mG^2}{2\pi^3}\int_{\frac{1}{2}m-E'}^{\frac{1}{2}m}d\omega'\omega'(m-2\omega') \\ &= \frac{G^2}{12\pi^3}m^2E'^2\left(3-\frac{4E'}{m}\right)\end{aligned} \tag{1.8}$$

さらに、これを E' について積分する事により

$$\begin{aligned}\Gamma \equiv&= \int_0^{m/2}dE'\frac{d\Gamma}{dE'} \\ &= \frac{G^2m^5}{192\pi^3}\end{aligned} \tag{1.9}$$