

# INTRODUCTORY NUCLEAR PHYSICS

## 4 BULK PROPERTIES OF NUCLEI

### 4.7 NUCLEAR SHAPE AND ELECTROMAGNETIC MOMENTS

Multipole expansion of charge density

a point charge  $q$ (位置は  $\mathbf{r}'$ ) による potential を考える

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

\*1これを spherical harmonics を使って展開する

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\mu} \frac{4\pi q}{2\lambda + 1} \frac{(r')^\lambda}{r^{\lambda+1}} Y_{\lambda\mu}^*(\theta', \phi') Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$$

これは見慣れない形であるが

$$\sum_{\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta', \phi') Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) = \frac{2\lambda + 1}{4\pi} P_{\lambda}(\cos \alpha)$$

を考えると Legendre polynomial での展開のことである。

核の電荷分布を考えると potential は

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\mu} \frac{4\pi Z}{2\lambda + 1} \frac{1}{r^{\lambda+1}} Q_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad (4.49)$$

ここで multipole coefficient を

$$Q_{\lambda\mu} = \frac{1}{Z} \int e r^\lambda Y_{\lambda\mu}^*(\theta', \phi') \rho_{ch}(\mathbf{r}') dV' \quad (4.50)$$

と定義する。<sup>\*2</sup>

z-axis 沿いでは  $\cos \theta = 1$  なので  $Y_{\lambda\mu}(0, 0) = \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}}$  からなじみある形

$$\phi(r) = \frac{1}{r} \sum \sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda + 1}} \frac{Z Q_{\lambda\mu}}{r^\lambda}$$

\*3となること分かる。

---

\*1 括弧の中は SI unit の cgs なら不要

\*2 notation がややこしいが  $\rho_{ch}(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)$  を考えればただの点電荷のときに一致する事が分かる

\*3 訂正, Z が抜けている

もし、電荷分布がほぼ球状であるなら、高次のほど急速に小さくなるので低次の項ほど効いてくる、したがって、主に興味がある multipole moment は低い項に限られてくる。

(4-12) の normalization ( $\rho_e h = Z|\Psi|^2$ ) をつかうと multipole coefficient は

$$Q_{\lambda\mu} = \langle \Psi | er^\lambda Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) | \Psi \rangle \quad (4.51)$$

と表す事が出来る。この表現から operator として

$$O_{\lambda\mu}(E) = er^\lambda Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \quad (4.52)$$

ただし、この complex conjugate はあまり意味が無い、というのも主に取り扱うのは  $\mu = 0$  のみであり、spherical harmonics は real なので

更に、§6-6 でやるように核が single-particle の wavefunction の積として表せるならば、operator は各々の粒子についての和となり

$$O_{\lambda\mu}(E) = \sum e(i) r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}^*(\theta_i, \phi_i) \quad (4.53)$$

と表す事が出来る。ただし

$$e(i) \begin{cases} \text{eproton} \\ 0 \text{neutron} \end{cases}$$

この表記の利点は一般的に取り扱って electric multipole transition の議論に便利である

もし電荷分布が完全な球状ならば  $Q_{00} = e$  のみが nonzero で他の項はすべて零になる。つまり、finite multipole coefficient は spherical shape からのずれを示していることになる。

ただし、対称性から消える項もある、spherical harmonics の parity  $(-1)^\lambda$  より odd electric multipole coefficient は零である。

$$Q_{\lambda\mu} = \langle \Psi(\mathbf{r}) | er^\lambda Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) | \Psi(\mathbf{r}) \rangle \rightarrow (-1)^\lambda Q_{\lambda\mu}$$

ただし、これが零でないならば parity が破れている事になる。

electric dipole moment of a neutron が興味深い。charge zero なので  $Q_{00} = 0$  より dipole 測定がしやすい。もしこれが nonzero と分かったなら time-, parity-invariance symmetry が破れている事の証明になる。実験結果は  $(-1.1 \pm 0.8) \times 10^{-25} e \cdot \text{cm}$  となりほぼ零で、はっきりとした破れは未だ見つかっていない。

とりあえずは symmetry は守られているとして even-order のみをこれから議論していく

先ほどはパリティからの要請からの制限だったが、"angular momentum coupling" もまた制限を加える。multipole operator は angular momentum  $\lambda$  を持っている。spion J である状態での期待値は  $J, J, \lambda$  が三角形を成さなければその値を持つ事は無いしたがって、 $2J < \lambda$  ではゼロである。

このため、 $J=0$  では  $\lambda = 0$  のみが値を持つ。これは quantum mechanical phenomenon

次の議論から

古典的に形を見る事は、写真をとるなどすればよい。高角運動量で回転をしても exposure time を短くすればその回転を見る事が出来る。

しかし、量子論的な物体であれば exposure time を短くする事は Heisenberg uncertainty principle のために energy の揺らぎが大きくなり、多くの状態の重ね合わせが見える。????????

$J > 0$  については multipole coefficient の expectation value は  $M$  ( $J$  の quantization axis への projection) の関数でもあるが、 $M$  依存性というのは Wigner-Eckart theorem から、2つの部分に分解する事が出来る。

$$\langle JM | Q_{\lambda\mu} | JM \rangle = (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & \lambda & J \\ -M & \mu & M \end{pmatrix} \langle J || Q_\lambda || J \rangle$$

これは 3j-coefficient で、もう一方は reduced matrix element

### Electric quadrupole moment

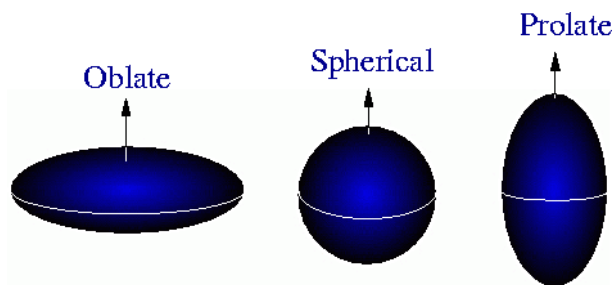
dipole moment は symmetry から消えるので  $\lambda = 2$  が形状の情報を与える最小のもの。これが存在していれば球形から変形している事が言える。

closed-shell nuclei はこの値が小さいが、そこからはなれば、この値は小さい\$6-3 でもう少しこの議論をする。M=J での quadrupole moment は

$$Q = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} e \langle J, M = J | r^2 Y_{20}(\theta, \phi) | J, M = J \rangle = e \langle J, M = J | (3z^2 - r^2) | J, M = J \rangle \quad (4.54)$$

spherical nucleus、 $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle$  なので、この値は零になる事が分かる。

- oblate なら  $Q < 0$
- prolate なら  $Q > 0$ 、deuteron はこれである。



次の multipole moment は hexadecapole moment ( $\lambda = 4$ )<sup>\*4</sup>であるが”angular momentum coupling”より  $J \geq 2$  でないと値は持たない。

ただし、quadrupole moment もありこの測定は難しい。その理由は高次の moment は急激に小さくなるためもう一つは、測定は ground state にならば楽であるが、ground state で  $J \geq 2$  のような核は僅かしか存在しない。したがって、励起状態を見ないと行けなくなる。

hexadecapole momentum の分かっている値としては model によって計算し推定されたものがほとんどである。

### Magnetic moments

変形核は”magnetic charge” distribution も持つ

その由来は

- intrinsic magnetic dipole moment
- proton の orbital motion

magnetic charge density を electric charge density との analogy をつかい magnetization density M から

$$\rho_m(r) = -\nabla \cdot M(r) \quad (4.55)$$

\*4 hexa- 6, deca- 10?

さらに magnetization current で

$$\mathcal{I}(r) = c\nabla \times M(r)$$

と書ける。ここで核子を点とみなして、neutron(proton) の magnetic dipole moment  $g_n/2$  などとおくと

$$\mathcal{I}(r) = \sum \left\{ egl_i \frac{\mathbf{p}(i)}{M_N} + \frac{e\hbar}{2M_N} g_s(i) \nabla \times \mathbf{s}(i) \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(i)) \quad (4.56)$$

charge distribution との analogy で magnetization density distribution による multipole coefficient を得る事が出来る。

$$\mathcal{M}_{\lambda\mu} = - \int r^\lambda Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \rho_m(r) dV = - \int r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \nabla \cdot \mathbf{M}(r) dV \quad (4.57)$$

この (1) の符号のために parity は  $(-1)^{\lambda+1}$  となる。対称性の議論から even-order が消える。

したがって最低次は magnetic dipole となる、これは

$$\mathcal{M}_{1\mu} = - \int r Y_{1\mu}^* \nabla \cdot M dV = \int M_\mu dV$$

この計算するにあたって、intrinsic dipole, orbital motion の二つに分けて考える

$$\mathcal{O}_{1\mu}(M1, s) = \frac{e\hbar}{2M_N c} \sum g_s(i) \mathbf{s}_\mu(i) \quad (4.58)$$

orbital motion については

$$\mathcal{M}_{1\mu}(l) \equiv \int \mathbf{M}_\mu(l) dV = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M}(l)))_\mu dV = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r} \times \mathcal{I}(l))_\mu dV$$

これから、

$$\mathcal{O}_{1\mu}(M1, l) = \frac{1}{2c} \left( \mathbf{r} \times \sum egl_i \frac{\mathbf{p}_i}{M_N} \right)_\mu = \frac{e\hbar}{2M_N c} \sum g_l(i) \mathbf{l}_\mu(i) \quad (4.59)$$

これを合わせる事で

$$\mathcal{O}_{1\mu}(M1) = \mu_N \sum \{ g_l(i) \mathbf{l}_\mu(i) + g_s(i) \mathbf{s}_\mu(i) \} \quad (4.60)$$

一般的な表現は

$$\mathcal{O}_{\lambda\mu}(M\lambda) = \mu_N \sum \left\{ \frac{2}{\lambda+1} g_l(i) \mathbf{l}(i) + g_s(i) \mathbf{s}(i) \right\} \cdot \nabla_i (r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}^*(\theta_i, \phi_i)) \quad (4.61)$$

この導出については参考文献

## 4.8 MAGNETIC DIPOLE MOMENT OF ODD NUCLEI

the magnetic dipole operator  $\mathcal{O}_{1\mu}(M1)$  は前節であたえられている。これは単位角運動量を持ち去る operator であり、 $J \geq \frac{1}{2}$  でのみ値をもつ  $M = J$  について magnetic dipole moment を定義すると

$$\mu = \langle J, M = J | \mathcal{M}_{10} | J, M = J \rangle = \sum \langle J, M = J | g_l(i) l_0(i) + g_s(i) s_0(i) | J, M = J \rangle \quad (4.62)$$

となるが、これは幾つかの仮定を入れる事で ground state について具体的に計算できる。

詳しくは次節で説明するが、ground state において proton,neutron はそれぞれ angular momentum zero となるような zero-coupled pair を形成しているために、magnetic dipole への寄与は零となる。これは次のようにすれば分かる。

同種粒子の対なので Pauli principle から  $(L,S) = (0,0),(1,1)$  の組しか無い ( $S=0$ ,antisym, $S=1$ ,sym) ground state なので、 $(0,0)$  したがって  $J=0$  の pair をつくる。 $S=0$  であるから核子の magnetic dipole はキャンセルし合う

したがって、even-even nuclei では magnetic dipole は零である。一方 odd-mass nuclei では 1 つだけペアを組んでいない核子があるのでそれが寄与する。

(4-62) 式はただペアを組んでない 1 つの核子のみが寄与し

$$\mu_{s.p.} = \mu_N \langle j, m = j | g_l l_0 + g_s s_0 | j, m = j \rangle \quad (4.63)$$

Landé formula より

$$\mu_{s.p.} = \frac{1}{j(j+1)} \langle j, m = j | (\mu \cdot j) j_0 | j, m = j \rangle \quad (4.64)$$

これを計算して

$$\mu_{s.p.} = j \left\{ g_l \pm \frac{g_s - g_l}{2l + 1} \right\} \quad \text{for } j = l \pm \frac{1}{2} \quad (4.65)$$

つまり odd-mass nuclei であれば unpaired nucleon の  $j, l$  で決定されることになる。

この single-particle model は the unpaired nucleon の spin,orbital angular momentum の推定に使う事が出来る。

total angular momentum への寄与はこの核子のみなので  $J = j, 1$  については  $l = j \pm \frac{1}{2}$  の 2 つの値があるがこれは parity から決定する事ができる。つまり  $\pi = (-1)^l$  から

したがって、spin,parity から (odd-mass) については  $j, l$  が決定する事が出来 magnetic dipole を決定できる

Schmidt value ???????????????????

## 4.9 GROUND STATE SPIN AND ISOSPIN

ground state は energy が最小の状態である

- 最も安定
- 最も調べやすい

その特徴については

- binding energy これは次節にて
- spin
- isospin
- static electromagnetic moment これは前節で

が挙げられる。

また、ground state がかわる transition rate や reaction については Chapter 5,7 にて扱う。この節にて取り扱うのは spin と isospin についてである。

Ground state spin

各々の核子は

- intrinsic spin  $s = 1/2$
- orbital angular momentum  $\ell$

を持ち total angular momentum  $\mathbf{j} = \mathbf{s} + \ell$  この大きさは half-integer

核全体では、その和

$$\mathbf{J} = \sum \mathbf{j}_i \quad (4.66)$$

これは odd-mass なら half-integer

isospin も同様に考えて

$$\mathbf{T} = \sum \mathbf{t}_i \quad (4.67)$$

ここで核を次のように分類する

- even-mass
  - even-even nuclei
  - odd-odd -nuclei
- odd-mass

#### even-even nuclei

この ground state は spin 0 である。(例外はない)

それは、"pairing" という核子間の相互作用に由来する。ただし、odd-odd nuclei の ground state が必ずしも spin zero でないことから p-p, n-n と同種粒子間のみならず重要である相互作用と分かる。

これを、isospin をつかって述べると  $T=1$  でのみ pairing force が働き、 $T=0$  ではそうで無い事が分かる。

例として、deuteron を考えると、これは ( $J=1, T=0$ ) であるこれは pairing force が p-n で働くのなら  $J=0$  となるはずである

というのも fermion なので反対称性から ground state  $l=0$  では空間部分の波動関数は対称なので、isospin, spin 部分の積が反対称になっていないといけない。

$T = 0, T_0 = 0$  の isoscalar の場合は isospin 部分の波動関数は

$$\chi_\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_\tau |\downarrow\rangle_\tau - |\downarrow\rangle_\tau |\uparrow\rangle_\tau)$$

これは反対称なので、spin 部分  $\chi(S, S_0)$  は  $S = 1$  で対称でなければならないので

$$\begin{aligned} \chi(1, 1) &= |\uparrow\rangle |\uparrow\rangle \\ \chi(1, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle) \\ \chi(1, -1) &= |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle \end{aligned}$$

一方  $T = 1, T_0 = 0$  の isovector の場合は isospin 部分の波動関数は

$$\chi_\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_\tau |\downarrow\rangle_\tau + |\downarrow\rangle_\tau |\uparrow\rangle_\tau)$$

これは対称であるから、spin 部分は反対称より

$$\chi(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)$$

これから isoscalar と isovector の統計的重みが 3:1 になる事が分かる。neutron-proton pair では T=1 での paring force が弱いと考える事が出来る。

### odd-mass nuclei

paring force のために ground state での spin は unpaired nucleon の j-value となるというのも、odd-mass nuclei は (even-even nuclei)+nucleon の系と考えられる (この考え方は\$4-8 ですすでに取り扱った) chap.6 でこの j-value が energy-spectrum から分かる事をみる。

### odd-odd nuclei

この場合は ground state spin を予想するのは難しいこの系を考えるのにも even-even nuclei + proton + neutron と考えるがこの core の外の spin を  $j_p, j_n$  とすると可能な値については

$$|j_p - j_n| \leq J \leq j_p + j_n$$

と考えられる。それぞれの値については近傍の odd-mass の核から推定する事が出来る。

J を得るための empirical Nordheim rules がある

$$\begin{aligned} \text{Strong rule } J &= |j_p - j_n| \quad \text{for } \eta = 0 \\ \text{Weak rule } J &= \text{either } |j_p - j_n| \quad \text{or } j_p + j_n \quad \text{for } \eta = \pm 1 \end{aligned} \quad (4.68)$$

ここの  $\eta = j_p - \ell_p + j_n - \ell_n$  である。実用的には、多くの例外があり、あくまで一般的な目安を与えるにすぎない。

### Ground state isospin

isospin の値は neutron, proton の数で推定する事が出来る。isospin projection は

$$T_0 = \frac{1}{2}(Z - N) \quad (4.69)$$

$|T_0|$  は isospin の最小値である。isospin の最大値は nuclei の nucleon 数で制限され

$$\frac{1}{2}|Z - N| \leq T \leq \frac{1}{2}(Z + N) \quad (4.70)$$

核力の isospin 依存性は弱く、T が異なる準位を分裂させるほどではないが、各 T についての最低準位では odd-odd nuclei を除いては分裂している。

deuteron では T=0 であるから基底状態において、核力は T を最小化 ( $T = \frac{1}{2}|Z - N|$ ) するのでないかと推定する事が出来る。実際 Fig.4.7 を見れば分かる通り  $^{16}\text{O}$  では ground state T=0, T=1 は 13MeV 以上、T=2 は 23MeV 以上となっている。

odd-odd nuclei では 2 つの最低 isospin 間のエネルギー差はとても小さい。これは nuclear force の T-, J-依存性の競争によるものである。<sup>\*5</sup>このために、ground state の isospin は  $\frac{1}{2}|Z - N|, \frac{1}{2}|Z - N| + 1$  を取る。

<sup>\*5</sup> odd-odd nuclei では J は余剰 neutron, proton により決定される

例としては  ${}^{26}_{13}\text{Al}$  の ground state は  $(J^\pi, T) = (5^+, 0)$  として、第一励起状態は 0.229 MeV で  $(J^\pi, T) = (0^+, 1)$ 、他にも  ${}^{42}_{21}\text{Sc}$  においては ground state  $(J^\pi, T) = (0^+, 1)$  として、第一励起状態は 0.6MeV で  $(J^\pi, T) = (7^+, 0)$

nuclear force は charge にはよらないが、isospin にはよるとして仮定してきた。nuclear force に加えて核内では、proton 間に働く Coulomb force が存在する。その荷電依存の力は proton-neutron の対称性を壊す。確かに、nucleon-nucleon のみでみると Coulomb interaction は十分に弱い、核全体を考えるとその効果は変わってくる。nuclear force が short range のために核子の数に linear に増えるのに比べて、Coulomb force は long range のために quadratically に強くなるので、重い核ではその効果は支配的になり、isospin はもはや良い量子数ではなくなる。

### Isospin mixing

isospin が良い量子数であるかどうか、異なる isospin 間の混合を調べる。

Hamiltonian のうちまず、isospin を保存する項についての 2 つの eigenstate を考えて

$$|JT_x\rangle, |J'T'y\rangle$$

と表す。  $x, y$  は spin, isospin 以外の量子数。もし完全な Hamiltonian に isospin symmetry をこわす項が存在するなら (eg. Coulomb term) このとき、この 2 つは eigenstate ではなくなる。完全な eigenstate  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$  を  $|JT_x\rangle, |J'T'y\rangle$  の基底を使って解く事を考える。

Hamiltonian matrix を使い計算する。

$$\{H\} = \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

ここで、diagonal elements

$$H_{xx} \equiv \langle JT_x | H | JT_x \rangle \quad H_{yy} \equiv \langle J'T'y | H | J'T'y \rangle$$

そして、この off-diagonal term が零でないなら isospin-breaking が起きている。

$$H_{xy} \equiv \langle JT_x | H | J'T'y \rangle \quad H_{yx} \equiv \langle J'T'y | H | JT_x \rangle$$

Coulomb force は rotation, time-reversal symmetry を持つので”Hamiltonian matrix”は実\*6かつ対称行列

$$H_{xy} = H_{yx} = S\delta_{JJ'}$$

であり、Hamiltonian の eigenvector は 2 つの基底の linear combination で

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \cos\theta |JT_x\rangle + \sin\theta |J'T'y\rangle \\ |\psi_2\rangle &= -\sin\theta |JT_x\rangle + \cos\theta |J'T'y\rangle \end{aligned} \quad (4.72)$$

---

\*6 time-reversal



で

$$\begin{aligned}\langle \psi_2 | H | \psi_1 \rangle &= \dots \\ 0 &= -\sin \theta \cos \theta H_{xx} + \sin \theta \cos \theta H_{yy} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \delta_{JJ'} S \\ \therefore \tan 2\theta &= \frac{2S \delta_{JJ'}}{H_{xx} - H_{yy}} \\ \tan 2\theta &= \frac{2S}{H_{xx} - H_{yy}} \quad (4.73)\end{aligned}$$

となり、混合の度合いは off-diagonal の大きさと、diagonal の大きさの差に依存する事が分かる。

実際の核では、多くの状態が isospin-breaking で混合しているがその基本は今の二次元でのモデルと変わらない。

- 非摂動での energy level が非常に近いと混合しやすい
- isospin breaking term (Coulomb interaction) は rotation invariant なので異なる J の間では混合しない

off-diagonal elements について

??????

isospin mixture は

- spin が同じ
- 空間的に重なりが大きい wavefunction

でのみ有効

light nuclei では

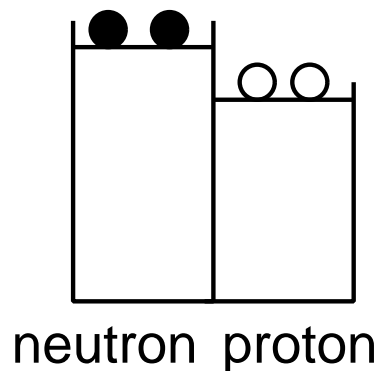
- Coulomb force は相対的に小さいため S は小さい
- 状態密度が低いため、wave function overlap が起こりにくい

したがって、isospin 混合は起こりにくい

heavy nuclei

ground state と幾つかの低励起状態では混合は起きない。

それは、neutron excess のために、Fermi energy の neutron は proton よりも高い準位にいる。



ground state では各々の nucleon は出来る限りの最低エネルギーにいる  $T_{min} = |T_0| = \frac{1}{2}|Z - N|$  で混合は  $T = T_{min} + 1$  との間起こる。

その状態は isobaric analogue state から推定できる (p を n に変える)、がそれはより高いエネルギー準位にいたるために混ざりにくい。

したがって heavy nuclei では isospin はもはや意味のある対称性ではない。さらに、isospin purity の議論も低準位でしか成立しない、高い準位では Coulomb effect のために混合が起こってしまう。

### Isobaric analogue state

light nuclei では isobar の核の性質は非常に良く似ている

Fig.3-1 の mirror nuclei の energy spectrum

Fig.4-7 の A=16 の isobar の energy spectrum について

まず  $^{16}N$  の ground state  $T = 1, T_0 = -1$  でこれに  $T^+$  を作用させると  $T = 1, T_0 = 0$  が出来るが  $^{16}O$  の ground state は  $T = 0$  なのでこれは励起状態に対応する。核の構造自体は同じであるこの、isospin ladder operator でできる状態を isobaric analogue state(IAS) という。

$^{16}O$  の励起状態を estimate できる。核力の電荷の非依存より、IAS の energy は binding energy の差より決まる。

$$E_B(^{16}O) = 127.62\text{MeV}$$

$$E_B(^{16}N) = 117.98\text{MeV}$$

これだけでは不十分なので補正を加える。

Coulomb energy について

一樣な球を考えて  $R = 1.2 \times A^{1/3} = 3.02\text{fm}^{*7}$  であるから  $E_C = \frac{3}{5}\alpha\hbar c \frac{Z(Z-1)}{R}$  この差は 4MeV

したがって IAS は 13.64MeV となるが、

もう一つの補正は proton,neutron mass の差 0.78MeV 小さくなる  $13.64 - 0.78 = 12.86\text{MeV}$  となる。

$^{16}N$  の ground state は  $J^\pi = 2^+$ 、 $^{16}O$  の T=1 では 12.97MeV,  $J^\pi = 2^-$  と非常によく似ているのが分かる。

実測値との誤差は 0.11MeV

- Coulomb energy の計算
- wavefunction の  $T^+$  の作用による変化

にゆらいずると考えられる。

fig.4-7 にもどると 12.97MeV の準位において 4 つの状態が存在する事が分かる事からも、実際の核では IAS の考え方はわずかに破れている事が分かる。

T=1 の IAS とどのように T=2 の IAS も存在する事が分かる。 $^{16}C, T_0 = -2$  の IAS が N,O で存在している事が分かるが、F では不安定なのではっきりとは見れていない。

---

\*7 text 訂正

## 4.10 NUCLEAR BINDING ENERGY

- the binding energy

核から全ての核子を取り除きバラバラにするのに必要なエネルギー、質量差から与えられる

$$E_B(Z, N) = (ZM_H + NM_n - M(Z, N))c^2 \quad (4.74)$$

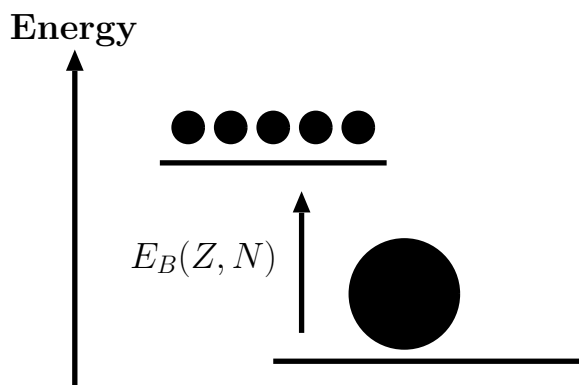


Fig.4.1 nuclear binding energy

注意点  $M_H$  は水素原子の質量であって電子の質量を含む、また  $M(Z, N)$  も電子を含み中性での質量。というのも中性の原子が測定の基本であるからである。ただし、Q-value の計算では電子の影響を考えなければならない場合もある (eg.  $\beta$ -decay)

- atomic mass unit (amu)

これは mass を測るに便利な単位

$^{12}\text{C}$  の質量を標準として考える単位で定義は

$$\begin{aligned} u &= \frac{\text{mass of } ^{12}\text{C atom}}{12} = \frac{1\text{kg}}{N_A} \\ &= 1.6605402(10) \times 10^{-27}\text{kg} = 931.49432(28)\text{MeV}/c^2 \end{aligned} \quad (4.75)$$

教科書で、使っている Avogadro's number は kg 単位なので注意

amu を使うと proton, neutron の mass は

$$M_p = 1.007276470(12)u, M_n = 1.008664904(14)u$$

として表す事が出来る。当然定義から  $^{12}\text{C}$  は 12u

binding energy は rest mass energy に比べればわずかであるから、amu で表した質量は僅かにしか質量数 A からのずれはないため、nuclear mass を amu で表すのは不便である。そこで mass excess で表す。その定義は

$$\Delta(Z, N) \equiv (M(Z, N)\text{in } u - A) \times 931.49432\text{MeV} \quad (4.76)$$

\*8

で、具体的な例として Hydrogen, neutron の計算が書いてある。Hydrogen では free proton (1.007276470 u) なので電子の質量が足されていることに注意

mass excess を使い binding energy を表すと

$$\begin{aligned} E_B(Z, N) &= (ZM_H + NM_n - M(Z, N))c^2 \\ &= Z(u + \Delta(H)) + N(u + \Delta(n)) - (Au + \Delta(Z, N)) \\ &= Z\Delta(H) + N\Delta(n) - \Delta(Z, N) \end{aligned} \quad (4.77)$$

巻末に mass excess table があるので、それから様々な nuclei に対する binding energy を計算できます。

- Saturation of nuclear force

Fig.4-9\*9を見れば分かる通り  $A < 30$  の light nuclei を除いて binding energy per nucleon はほぼ一定の  $8 \sim 8.5 \text{ MeV}$  となっている事が分かる。

このことは nuclear force は短距離力であることの現れと考える事が出来る。

- なぜならば、two-body infinite range interaction を考えると binding energy は相互作用する対の数に比例するが、これは核の数の二乗に比例 ( $\propto A(A-1)/2$ ) すると考えられる。つまり、binding energy per nucleon は核の数に比例する事になる。
- したがって、 $E_B/A$  がほぼ一定とみなせるということは、ごく近傍の核としか相互作用しないことを意味する。

- heavy nuclei について

$A \approx 56$  で binding energy は最大となり徐々に小さくなっていく事が分かる。これは Coulomb repulsion のためである。Coulomb force は infinite range のため累積してその影響が大きくなり  $Z=82$  の Pb 以上ではもはや安定核は存在しなくなる。この領域の heavy nucleus は分裂することにより、より軽くて安定な核へなり energy が解放される。

- light nuclei

$A = 4n$  でのピークが見られる。具体的に挙げると  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^8\text{Be}$ ,  ${}^{12}\text{C}$ ,  ${}^{16}\text{O}$  である、これらは近傍の核とくらべて非常に大きな binding energy を持っている。例として

$A=4$  の近傍について

nuclei	binding energy
${}^4_2\text{He}$	7.07 MeV
${}^3_1\text{H}$	2.83 MeV
${}^3_2\text{He}$	2.57 MeV
${}^5_2\text{He}$	5.48 MeV
${}^5_3\text{Li}$	5.27 MeV

\*8 text では 931.5016 と数字の間違いがある

\*9 横軸は A であるが、isobar のうち最も安定な binding energy が書かれている

となっており、非常に  ${}^4_2\text{He}$  が大きくなっている事が分かる。他の 4n-nuclei も 7MeV 程度の binding energy per nucleon を持っている。

このことを saturation of nuclear force という。つまり核力は alpha-particle-like cluster では非常に強いが、alpha-particle-like cluster 間では弱い。

この事を一番よく表している例が  ${}^8\text{Be}$  である。この核は非常に不安定で  $\tau = 2.6 \times 10^{-16}\text{s}$  で二つの alpha に崩壊する。

他の 4n-nuclei についても

${}^{12}\text{C}$	7.68 MeV
${}^{16}\text{O}$	7.98 MeV

のようにやはり、alpha-cluster への binding energy 7.07MeV がほとんどの binding energy を占める事が分かる。

- "saturation"

これは nuclear force の fundamental symmetry に由来する。その対称性を  $SU_4$ , Wigner supermultiplet symmetry という。<sup>\*10</sup>

ただし、 ${}^{16}\text{O}$  以上では核子の数が多く、この効果は見えにくくなる。それでも、Fig.6-14 で出てくるが核子を取り出す energy は局所的な増減を起こす事が知られている。

- separation energy

これは核子一つのみを取り除くのに必要な energy である。

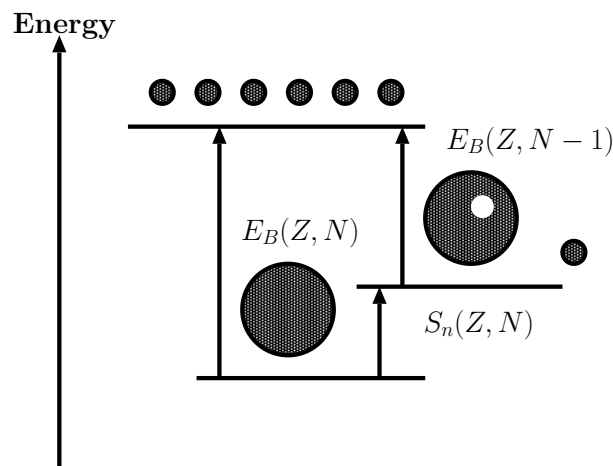


Fig.4.2 separation energy

これは、binding energy の差で与えられて

$$S_n(Z, N) = E_B(Z, N) - E_B(Z, N - 1) \quad (4.78)$$

<sup>\*10</sup> 時間がなくて調べきれませんでした。E.Wigner:Phys.Rev.51(1937)106 を参照

proton についても

$$S_p(Z, N) = E_B(Z, N) - E_B(Z - 1, N) \quad (4.79)$$

separation energy の特徴について次のような事が言える

- saturation  
4n-nuclei では separation energy は増加する。(alpha-cluster を壊すのは難しい)
- pairing energy  
 $S_n(Z, N)(S_p(Z, N))$  は even N(Z) で odd N(Z) よりも大きくなる、それは核子は対をつくって安定化しているため、それをバラすのに必要な energy は大きい
- magic number  
2,8,20,50(40),82,126 で separation energy は大きい、これは原子核の shell structure に由来する。  
magic number で closed shell をつくるため、それをばらすのは難しい

- valley of stability

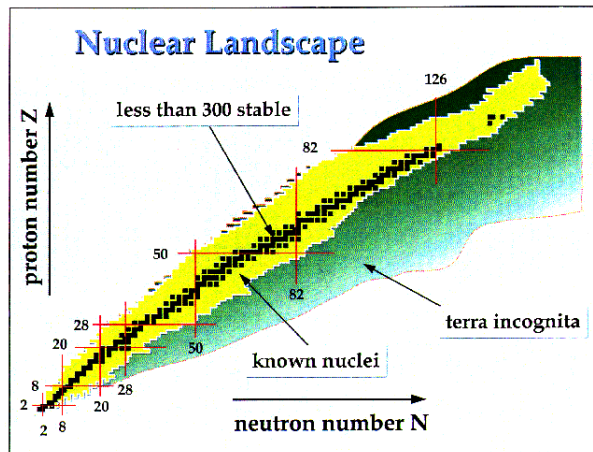


Fig.4.3 valley of stability

binding energy per nucleon ではなく、negative of the binding energy を Z-N の function として plot する。その 2-dimentional plot が Fig.4-10 である。

この Fig.4-10 で安定核は空白の四角、不安定はただの四角で plot される

この図から分かる事

- stable nuclei は  $N \simeq Z$  に沿って極僅かにしか存在しない。  
ただし、heavy nuclei ほど neutron excess が大きい、つまり proton Coulomb repulsive force に対抗するためである。
- 安定性について  
stable nucle いかから外れるほど寿命は急激に減少していく。  
(N,Z)-plane の stable nuclei のわずかな領域を”valley of stability”と呼ぶ。  
この安定領域からのずれにより、崩壊の仕方が決まる。
  - Weak interaction

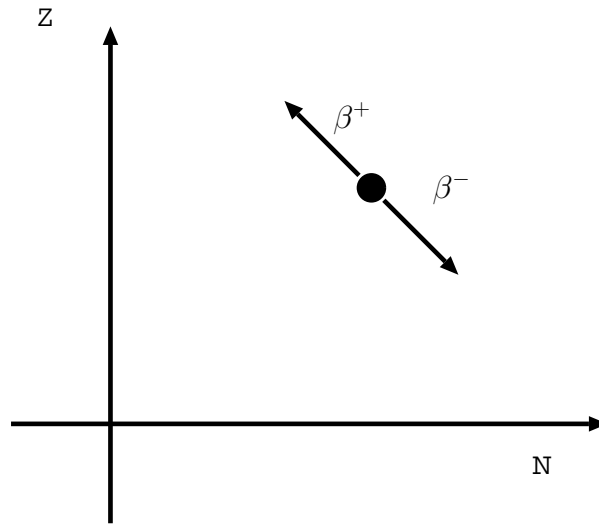


Fig.4.4  $\beta$ -decay による遷移

neutron が過剰なら  $\beta^-$ -decay、proton excess なら  $\beta^+$ -decay で安定核へ遷移する。したがって、 $\beta$ -decay が lifetime を決定する

– Strong interaction

neutron, proton excess が非常に大きくなれば、それを放出する channel が開く。 $\beta$ -decay による遷移に比べ寿命は急激に短くなる。

また、“valley of stability”の Z,N 上限は alpha-decay や fission に対する不安定性から制限がくる。 $N \approx Z$  に stable nuclei が固まって存在している。これは chap.3 での two-nucleon system の discussion から分かる。

– 異種粒子間

nuclear force は attractive force となるので、 $NZ$  に比例して binding energy は増加する

– 同種粒子間

nuclear force は repulsive force となるので、 $N^2, Z^2$  それぞれに比例して binding energy は減少する

というわけで  $N=Z$  でより安定になる。

これは、Coulomb force を無視した見積もりである、proton の数が多いほど、Coulomb repulsive force が強くなり、attractive force を強くするために neutron の数を多くして安定化する必要である。

そして、核力が short range なので  $Z$  が大きい領域では、Coulomb force が支配的になり、 $Z=82$  以上ではもはや安定核では自然に存在しない。

the valley of stability の局所的な厚さ（つまり、 $Z, N$  や  $A$  を与えられたときの安定な核の数）を考えると、これは核力の性質の反映であることが分かる。例としては

– pairing interaction

even-even nuclei のほうが、odd-mass, odd-odd nuclei より安定核の数が多い

– shell structure

magic number の近くでは安定核の数が多い

## 4.11 SEMI-EMPIRICAL MASS FORMULAE

前節までで、”nuclear binding energy”は近似的に nuclear number と他の macroscopic な自由度 (proton number や neutron number, nuclear radius) の関数とみなせる事を示した。

このことから、小さな例外を除けば  $E_B(Z, N)$ (または  $M(Z, N)$ ) の式をこのような”bulk coordinates”で表す事が可能となる。

ただし、出来る限り式を簡単なものにしておくために、核子間の相互作用の複雑な計算はさけないので、semi-empirical<sup>\*11</sup> approach はとても興味深いものである。

この section では Weizacker mass formula と Kelson-Garvey mass formula の二つについて説明する。

### Weizacker mass formula

この基本的な考え方は、”liquid drop” model である。つまり nuclei を”a drop of incompressible fluid”とみなす。

この根拠は

- volume が nuclear number に比例する

点にある。

#### 1. volume term

binding energy per nucleon はほぼ一定なので

$$E_B(Z, N) = \alpha_1 A \quad (4.80)$$

この A は volume を示しているので、 $\alpha_1$  これは volume parameter、これは実測値と fit させる。

#### 2. surface term

表面の核子は内部よりも束縛はゆるい、したがって表面積に比例して binding energy は減少するので

$$E_B(Z, N) = \alpha_1 A - \alpha_2 A^{2/3} \quad (4.81)$$

ここで、 $\alpha_2$  は surface energy parameter である。

#### 3. Coulomb term

repulsive electrostatic interaction を考える (between proton)  $R = 1.2A^{1/3}$  を使い、Coulomb energy は

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)e^2}{R} = \frac{3\alpha\hbar c}{5r_0} \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (4.82)$$

これは一様電荷の球を考えたが、実際の核は拡散した表面領域を持ち必ずしも球形ではない、Z,A 依存性はこれで適当であると考えて

$$E_B(Z, N) = \alpha_1 A - \alpha_2 A^{2/3} - \alpha_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (4.83)$$

この 3 項は純粹に古典的類推から導きだした。さらに、quantum mechanical な効果も考えねばならない

---

\*11 半経験的



#### 4. symmetry energy

nuclear force の isospin dependence についてであるが、以前見たように stable nuclei は  $N \approx Z$  にあるので、 $N - Z$  の二乗の項が入ると考えられる。

$$E_B(Z, N) = \alpha_1 A - \alpha_2 A^{2/3} - \alpha_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \alpha_4 \frac{(N-Z)^2}{A} \quad (4.84)$$

この  $A$  で割るといのは  $N-Z$  は  $A$  とともに増加するのが isospin effect は  $A$  に依らないと考えられから。この項を symmetry energy という

#### 5. paring energy

paring force を考えるが同じ  $A$  の核を考えると even-even nuclei は odd-odd nuclei よりも binding energy が大きく、odd-mass nuclei はその中間程度の binding energy であることから

$$E_B(Z, N) = \alpha_1 A - \alpha_2 A^{2/3} - \alpha_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \alpha_4 \frac{(N-Z)^2}{A} + \Delta \quad (4.85)$$

ここで paring energy parameter

$$\Delta = \begin{cases} \delta & \text{for even-even nuclei} \\ 0 & \text{for odd-mass nuclei} \\ -\delta & \text{for odd-odd nuclei} \end{cases}$$

最終的にでたこの式を Weizacker mass formula という、実測値と fit することで、parameter は<sup>\*12</sup>

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 16\text{MeV} & \alpha_2 &= 17\text{MeV} & \alpha_3 &= 0.6\text{MeV} \\ \alpha_4 &= 25\text{MeV} & \delta &= \frac{25}{A}\text{MeV} \end{aligned} \quad (4.86)$$

この公式の利点としては、fission energies の様々な核についても全体的な  $A, Z, N$  への依存性を計算したりできる点である。

問題点は closed shell 近辺での biding energy の増加の効果 (shell effect) が全く考えられていない点であるが、それを含めた式が Myers, Swiatecki, Strutinsky により提唱されている。

#### 参考

今回実験で energy level を調べる事を予定している  $A = 10, A = 11$  の isobar について Weizaker mass formula を当てはめてみた。

	実測値	Weizacker formula
${}^{10}_4\text{Be}$	65.0 MeV	70.3 MeV
${}^{10}_5\text{B}$	64.8 MeV	73.0 MeV
${}^{10}_6\text{C}$	60.3 MeV	65.2 MeV

<sup>\*12</sup> ただし、これらの parameter の値は fitting する binding energy に依存するため、ここで挙げた値は一般的なものである。

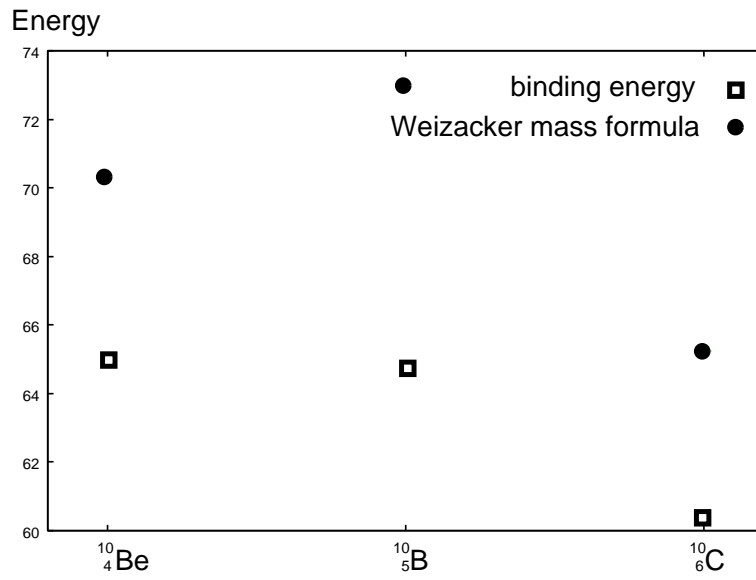


Fig.4.5 A=10

	実測値	Weizacker formula
$^{11}_5\text{B}$	76.2 MeV	73.0 MeV
$^{11}_6\text{C}$	65.4 MeV	70.2 MeV

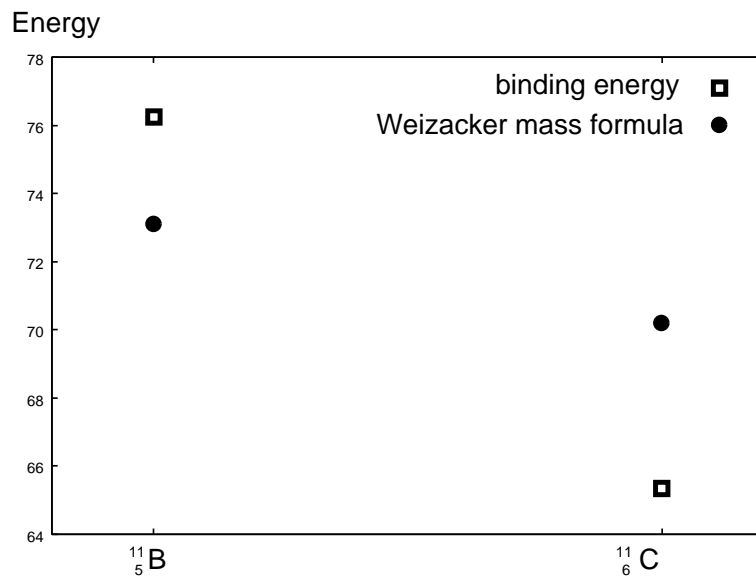


Fig.4.6 A=11

### Kelson-Garvey mass formula

Weizacker mass formula では global な  $A, Z, N$  依存性を求めたのにすぎないため、多くの実用において重要である、近傍での binding energy の測定には必ずしも良い結果を出すとは限らない。Weizacker formula では liquid drop model を出発点にしたのに対して、microscopic model から binding energy を出したのがこの formula である。

具体的には binding energy を核子間の相互作用に由来すると考えて、既知の binding energy から外挿して近傍の binding energy を求める

まず、nuclear reaction を単に one-body term のみと考えると (当然現実的ではない、単にこの方法を説明するため)

$$E_B(Z, N) = \alpha N + \beta Z \quad (4.87)$$

$\alpha, \beta$  はそれぞれ neutron, proton の相互作用の平均値

$\alpha, \beta$  を近傍の核との差から

$$\alpha = E_B(Z, N + 1) - E_B(Z, N), \quad \beta = E_B(Z + 1, N) - E_B(Z, N) \quad (4.88)$$

これより、

$$E_B(Z + 1, N + 1) - E_B(Z, N) = \alpha + \beta = E_B(Z, N + 1) - E_B(Z, N) + E_B(Z + 1, N) - E_B(Z, N)$$

つまり、4 つの近傍の binding energy の関係は

$$E_B(Z + 1, N + 1) + E_B(Z, N) - E_B(Z, N + 1) - E_B(Z + 1, N) = 0 \quad (4.89)$$

ともとまるために、3 つが分かれば残りの 1 つを導きだす事が出来る。

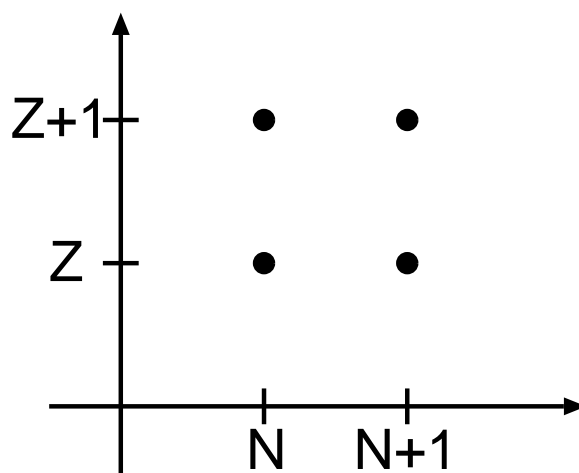


Fig.4.7 one-body Kelson-Garvey mass formula

核力が one-body として計算した、この近似の精密性は次を確かめれば良い

$$\Delta E_B = E_B(Z + 1, N + 1) + E_B(Z, N) - E_B(Z, N + 1) - E_B(Z + 1, N) \quad (4.90)$$

実際にはこの値は大きく、この近似では良い結果が出ない事が分かる。

次に two-body 相互作用を効果にに入れて計算してみる。

$$\text{Number of pairs} = \begin{cases} \frac{1}{2}Z(Z-1) & \text{for protons} \\ \frac{1}{2}N(N-1) & \text{for neutrons} \\ NZ & \text{for neutron-proton} \end{cases}$$

次のような形で binding energy は表せる

$$E_B(Z, N) = aN + bZ + cN(N-1) + dZ(Z-1) + eNZ \quad (4.91)$$

これらの parameter は先ほどと同様にして計算できる、結果は

$$E_B(Z+1, N-1) + E_B(Z-1, N) + E_B(Z, N+1) - E_B(Z, N-1) - E_B(Z+1, N) - E_B(Z-1, N+1) = 0 \quad (4.92)$$

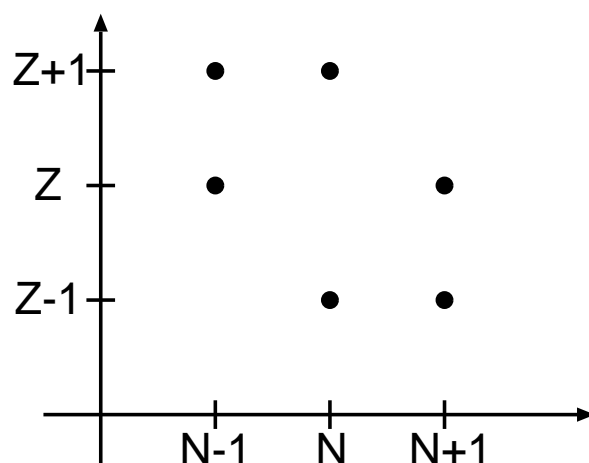


Fig.4.8 two-body Kelson-Garvey mass formula

以下 text ではこの計算について書かれているが省略 (楽な方法としては neutron の数ごとに 3 つのグループに分けて計算する)

この近似の精度についてだが

$$\Delta E = E_B(Z+1, N-1) + E_B(Z-1, N) + E_B(Z, N+1) - E_B(Z, N-1) - E_B(Z+1, N) - E_B(Z-1, N+1) \quad (4.93)$$

を調べれば分かる。これが完全に零になるとは思えないが、これを導きだした仮定が正しいならば、この分布は零周りになるはずである、この標準分散は

$$\frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^N (\Delta E_i)^2 \right\}^{1/2} \approx 100 \text{keV}$$

となり、だいぶ良い結果となることが分かる。

この式の利点としては、既知の領域だけではなく、"valley of stability" から大きくはなれた領域も計算が出来る点である。ただし、不確定性は  $\sqrt{N}$  に (step 数 N) に比例する。

また、one-body,two-body だけでなく、実際の核子で起こっていると思われる three-body などのより高次の項について計算することができる。多くの binding energy は分かっているので、このような高次の計算は valley of stability からはるかにはなれた未知の核まで進める事が出来る。

## 4.12 DENSITY OF EXCITED STATES

核の状態密度  $\rho_A(E)$

核の単位エネルギーあたりの状態数

- 反応率を決定する
- 状態にある確率を決める

と重要な量である。ただし統計的な量であるから、低エネルギー領域ではエネルギー準位は離散的で間隔広い  
ためあまり意味が無い。

しかし、励起エネルギーの増加とともに  $\rho_A(E)$  は急激に増加する。Fig.4-7 を見れば分かる。

Bethe が nucleon を noninteracting fermion を使って状態密度の式を導出した

$$\rho_A(E) = \frac{1}{12a^{1/4}E^{5/4}}e^{2\sqrt{aE}} \quad (4.94)$$

$a$  は level density parameter といいいfitting で得られる。

これは今日では Fermi-gas model formula と呼ばれている。この公式の利点は様々なエネルギーにおいて  
状態密度の推定に使えて、多くの核反応の計算に使われている。

ここで用語の確認しておく

- state density  
これは縮退を考えたうえでの状態についての密度
- level density  
これは縮退を無視し、準位のみを考えた密度

具体的にはまず、isospin を無視して、nuclear Hamiltonian は rotational invariance なので、同じ spin  $J$  状  
態でもその射影  $M$  の値が  $2J+1$  通りの状態が存在する。つまり、 $2J+1$  通りの状態は一つの level として観  
測される。単位エネルギー間隔あたりの angular momentum  $J$  についてエネルギー  $E$  における level の数を  
 $\omega_J(E)$  とおくと total level density は

$$\omega_A(E) = \sum_J \omega_J(E) \quad (4.95)$$

一方 state density  $\rho_A(E)$  は  $(2J+1)$  の weight を掛けなければならない。

$$\rho_A(E) = \sum_J (2J+1)\omega_J(E) \quad (4.96)$$

この state density と level density の関係は平均スピンの依存し

$$\omega_A(E) = \frac{\rho_A(E)}{\sqrt{2\pi\sigma_J^2(E)}} \quad (4.97)$$

ここで  $\sigma_J^2(E)$  は spin cutoff factor。主に物理的に意味がある量は  $\rho_A(E)$  の方である。

この spin cutoff factor と式の意味は次のようにして導く事が出来る。

spin  $J$  についてその射影  $M$  は  $M = -J, \dots, J$  までの値を取るが、その平均は零である。その分布は  
Gaussian と考える事が出来る、この仮定は統計の中心極限定理により正当化されるが、あまりこのことには

深入りはしない。

$$p(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle M^2 \rangle}} e^{-\frac{M^2}{2\langle M^2 \rangle}} \quad (4.98)$$

ここで、J の分布は

$$q(J) = p(M=J) - p(M=J+1) \approx -\left(\frac{\partial p(M)}{\partial M}\right)_{(M=J+1/2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle M^2 \rangle}} \frac{2J+1}{2\langle M^2 \rangle} e^{-\frac{(J+1/2)^2}{2\langle M^2 \rangle}} \quad (4.99)$$

となり、spin J での縮退は  $2J+1$  なので、高い準位密度の極限では準位あたりの平均状態数は

$$\langle(2J+1)\rangle = \frac{\int(2J+1)q(J)dJ}{\int q(J)dJ} = \sqrt{2\pi\langle M^2 \rangle} \quad (4.100)$$

この式を比較する事により、spin cutoff factor は

$$\sigma_J^2(E) = \langle M^2 \rangle \quad (4.101)$$

と分かる。つまり、状態分布の分散のことである。

状態密度を独立粒子模型で導出してみる。

このモデルでは Hamiltonian は one-body term のみであり、energy は各々の粒子が占める energy の和となる。単純化のために、個々のエネルギー準位の縮退は無視し、各々の状態には一つの核子のみが対応するとする。

”occupancy of single-particle” を次のように表記する

$$m_i = \begin{cases} 1 & \text{if state } i \text{ occupied} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

これを vector として略記  $\mathbf{m} \equiv (m_1, m_2, \dots)$ 、これにより特定の核子の配置を表す。核子の数は

$$\sum_i m_i = A \quad (4.102)$$

エネルギーは

$$E_{\mathbf{m}} = \sum_i m_i \varepsilon_i \quad (4.103)$$

この  $\{\varepsilon_i\}$  エネルギースペクトルは下限のみで上限はないとする。これは、(4.94) 式ですでに仮定されている。(Fermion のとした事だと思われる)

状態密度はこの表記を使う事で

$$\rho_A(E) = \sum_m \sum_{\mathbf{m}} \delta(A-m) \delta(E-E_{\mathbf{m}})$$

と表記する事ができる。

ここで、統計力学の手法を使って状態密度を計算する。

もし、系が十分な energy state を持っているなら、その状態にいる確率は Boltzmann factor ( $\exp(-E_r/kT)$ ) に比例する。Boltzmann factor の可能な準位についての和が partition function

$$z(T) = \sum_r e^{-E_r/kT}$$

である。もし、系の粒子数が変化するなら Gibbs factor( $\exp((\mu m - E_r)/kT)$ ) となり、grand partition function

$$Z(\mu, T) = \sum \sum e^{(\mu m - E_r)/kT} \quad (4.104)$$

これに、inverse Laplace transform を書ける事で状態密度が求める事が出来る。<sup>\*13</sup>

ただし、chemical potential や temperature は macroscopic な系で平衡状態について定義するものであり、これを subatomic physics へと適用は出来ない。

したがって、単に 2 つのパラメータを使って grand partition function を

$$Z(\alpha, \beta) = \sum_{mm} e^{\alpha m - \beta E_m}$$

と表す。

これを計算すると、 $m_i = 0, 1$  であるので

$$Z(\alpha, \beta) = \sum_{mm} \exp \left\{ \sum_i m_i (\alpha - \beta \varepsilon_i) \right\} = \prod_i \{1 + e^{\alpha - \beta \varepsilon_i}\} \quad (4.105)$$

この各粒子についての積を対数を取る事で、和にする事が出来るが、この和は次のような single-particle spectrum をつかうことで、積分に出来る。

$$g(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i)$$

これを連続的なものとみなすと (これは single-particle states が十分に近くにあれば、良い近似である)、grand partition function の log は

$$\begin{aligned} \ln Z(\alpha, \beta) &= \sum \ln \{1 + e^{\alpha - \beta \varepsilon_i}\} \\ &\rightarrow \int g(\varepsilon) \ln \{1 + e^{\alpha - \beta \varepsilon}\} d\varepsilon \end{aligned} \quad (4.106)$$

ただし、 $g(\varepsilon) = 0, \varepsilon < 0$  とする。

この積分は  $\varepsilon > \alpha/\beta$  で急速に log の factor は零になるので、Taylor 展開をすることで

$$\ln Z(\alpha, \beta) = \int_0^{\alpha/\beta} g(\varepsilon) (\alpha - \beta \varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6\beta} g(\alpha/\beta) + \frac{7\pi^4}{360\beta^3} g''(\alpha/\beta) + \dots \quad (4.107)$$

( $g'(\alpha/\beta)$  は消える)

状態密度は inverse Laplace transform で求められるが

$$\rho_A(E) = \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \iint_{-i\infty}^{+i\infty} Z(\alpha, \beta) e^{-\alpha A + \beta E} d\alpha d\beta$$

この計算には鞍点法が用いられる。というのも、この積分の寄与は主に

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \ln Z(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0} - A = 0 \\ \left. \frac{\partial \ln Z(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0} + E = 0 \end{cases}$$

<sup>\*13</sup> 統計力学の教科書を参照



の近傍に限られるからである。

$$\rho_A(E) = \frac{Z(\alpha_0, \beta_0)}{2\pi\sqrt{|D|}} e^{-\alpha_0 A + \beta_0 E} \quad (4.108)$$

\*14 という結果が得られる。ここで  $D$  は

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta \alpha} & \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \end{vmatrix}_{\alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0}$$

独立粒子モデルでは基底状態はすべての粒子を Fermi energy  $\varepsilon_F$  までに詰め込んで得られるので、核子数とエネルギーが次のように得られる。

$$A = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon) d\varepsilon \quad (4.109)$$

エネルギーは

$$E_0 = \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon \quad (4.110)$$

これから先の計算は、 $g(\varepsilon)$  の形について仮定をしなければならない。

一般的に使われるものは

- $\varepsilon = \varepsilon_F$  付近でほぼ一定、したがって微分からの寄与は零

この結果から鞍点において

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\alpha_0/\beta_0} g(\varepsilon) d\varepsilon \\ E_0 &= \int_0^{\alpha_0/\beta_0} \varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6\beta_0^2} g(\alpha_0/\beta_0) \end{aligned} \quad (4.111)$$

この比較から、Fermi Energy が決定される。

$$\varepsilon_F = \alpha_0/\beta_0$$

のように、決定される。これは macroscopic system での chemical potential に対応し、 $\beta_0 = (kT)^{-1}$  に対応すると分かる。

結局励起エネルギーを

$$E_x = E - E_0 = \frac{\pi^2}{6\beta_0^2} g(\alpha_0/\beta_0) \quad (4.112)$$

同様に、 $Z(\alpha_0, \beta_0)$ ,  $D$  も計算でき状態密度が導きだせる。最終的に状態密度を次の式で表せる。

$$\rho_A(E_x) = \frac{1}{E_x \sqrt{48}} e^{2(\frac{\pi^2}{6} g(\varepsilon_F) E_x)^{1/2}} \quad (4.113)$$

ここで zero point energy  $E_0 = 0$  とした。したがって level density parameter が

$$a = \frac{\pi^2}{6} g(\varepsilon_F) \quad (4.114)$$

---

\*14 (4.108) 式訂正、 $\beta$  の符号

が導出できた。

これまでの、導出では neutron,proton の区別をしなかったが、実際は Fermi energy は異なるため、single-particle state density  $g(\varepsilon_F)$  は neutron,proton の Fermi energy での密度の和としなければならない。

この式を導くにあたって、問題点となる仮定は two-body interaction を無視し、single-particle spectrum を Fermi energy 近傍で定数とみなした点である。

これが、この Fermi-gas formula があまり実測値に合致した結果を出せない原因かもしれない、

Fig.4-11

- $^{56}\text{Fe}$  の測定結果
- このグラフは Fermi-gas formula(4.94) を曲線で、independent particle model を stair-case plot で描いたものである、測定値は histogram で描かれている。

より良い結果を得るために、補正としては back-shifted Fermi-gas model formula がある。

$$\rho_A(E) = \frac{1}{12a^{1/4}(E - \Delta)^{5/4}} e^{2\sqrt{a(E-\Delta)}} \quad (4.115)$$

この parameter は fitting で決定される。(Δ は経験的に負の値である) この原因は two-body interaction を無視したかもしれない、というのも、一般的には、ground state は two-body correlation で押し下げられる。したがって、励起エネルギー自体は independent-particle model よりも大きくなるからである。

level density parameter a についても実測値と計算があまりよくは一致しない

この理由としては

- single-partilce spectrum を constant として近似した事で \$6-5\$ でみるが実際のスペクトルはそうではない

実験的には状態密度は直接的には 2 つの energy 領域でしかみれない

#### 1. 低エネルギー領域

バラバラのエネルギー準位が見る事が出来る。単純に数えれば良い。この領域では状態密度は低いために、統計的取り扱いをするには不十分である。

#### 2. slow neutron resonance region

neutron separation energy の少し上に存在する。それを見るためには odd-neutron nuclei( $J=1/2$ , one less neutron) に s-wave,slow neutron を吸収させれば良い。この領域では状態密度は非常に高い ( $10^6$  per MeV) であるが、精密な slow neutron 測定が可能のために、高精度でエネルギーと準位の特 定が可能である。

他の領域では、直接測定はできず、反応率の測定などから間接的に行う必要がある。

## 4.13 LOW-LYING EXCITED STATES

ground state と low-lying excited states については多くの核について調べられている。その準位の数膨大で核によっては数十の準位が存在する。このような多くの情報を取り扱うにあたって、基本的には二つの手法がある

### 1. 統計的手法

その集団の平均的な振る舞いについて調べる方法であり、前節での状態密度の議論の基礎となっている。

### 2. もう一つの手法は核の状態の特徴と代表するような幾つかの準位を選び出す方法である。

その選択には多くの情報の中から物理的観点を失わないようにする必要があり、この手法が一般的な研究の手法である。

核の励起状態には 2 つのまったく異なった特徴がある

1. single-particle motion
2. collective motion

この二つが同じ核のなかに共存している。

- single-particle

少数の核子が各々の軌道を運動しているとして理解される。

– 例としては

$^{17}\text{F}$  これは  $^{16}\text{O}$  の core の周りを proton が運動していると解釈できる。電磁氣的遷移はこの proton が軌道を変えるときに起こっている。

- collective

一方で  $^{20}\text{Ne}$  のような場合はその電磁氣的遷移を説明するのに集団的な運動を必要とする。

実際のところは、たいていの原子核はこの 2 つの合わさった振る舞いをするので、その原因を理解したいならば、どちらか一方の特徴を持った状態を調べるのが効率的である。<sup>\*15</sup>

single-particle の状態について、この状態を調べるなら直接 one-nucleon transfer reaction で見る事が出来る。

- stripping reaction

(d,p),(d,n) 反応<sup>\*16</sup>等でこれは核内に nucleon を置いていく反応、これにより single-particle による励起 (one-particle state) をつくりだすことができる。

- pick-up reaction

stripping reaction の逆で (p,d), (t,  $^4\text{He}$ ), ( $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ) 反応等で、核子を取り除く反応である。残った核子の状態を one-hole state という

<sup>\*15</sup> single-particle なら closed-shell + 1, collective なら magic number

<sup>\*16</sup> つまり、deuteron を衝突させて出てくる proton(neutron) を測定する方法

これらの single-particle behavior は one-particle one-hole(1p1h) 励起という。この励起状態はある一つの核子が元々入っていた single-particle state から他の核子によって占められていなかった single-particle state へ移る事により形成される。

そのことは、pickup や stripping reaction でつくられる状態に非常に似ている事から分かる。

これらの状態は中間領域のエネルギー<sup>\*17</sup>electron や nucleon の散乱により励起される。というのも、ビームの通過時間が非常に短いために、せいぜい一つ程度の核子としか相互作用しないためである。

- charge exchange reaction

これは 1p1h-state とは多少異なった性質をもつ。

–  $(p, n), (\pi^+, \pi^0), (\pi^-, \pi^0)$  など

この反応においては、nucleon を高い軌道へ押し上げたりもするが、他にも isobaric analogue state をつくる事が出来る反応をおこす事が出来る。

- two-nucleon transfer reaction

先ほどまでは 1 粒子のみを考えてきたが 2 つの核子を移行させる反応もありうる。pairing force のために、 $J^\pi = 0^+$  の核子の対を主に移行させる、先ほどと同様に double-charge exchange reaction  $((\pi^+, \pi^-), (\pi^-, \pi^+))$  もある。

nuclear collective behavior であるがこれの特徴は、たくさんの核子が一緒に動く点である。例としては回転や、振動による励起である。

その極端なものは全ての核子が参加する運動である、例は剛体の回転である。この場合は自由度は核全体としての回転と、核の形を変形させる内部での励起である。その場合は rotational energy, moment of inertia, などの collective coordinates で表す事が出来る。実際には剛体の回転とみなす事はあまりよくはなく、どんな形になっているかは興味深い問題である。

核の形状としては剛体であるよりも、liquid drop に近い、これは Weizacker semi-empirical mass formula を導出するために使ったモデルである。このモデルの有用性は binding energy だけでなく、振動を記述できるまで拡張する事が出来る点にある。この核の振動の議論は \$ 6-1, \$ 6-2 において行うが、核の振動に関する形の特徴は重要な問題である。

回転も振動ももともとは古典的な概念だが、量子的に記述する事が出来る。ただし、collective behavior は直接 macroscopic object のように見える訳でない。観測される量は

- energy
- electromagnetic moments
- transition rates
- reaction cross section

collective behavior の一番の特徴は single-particle picture では説明が不可能な点にある。例えば high angular momenta を考えると heavy ion reaction において  $100\hbar$  までのものが確認されているがこれは 1,2

---

<sup>\*17</sup> 非相対論的

個の粒子の運動では説明がつかない。<sup>\*18</sup>

low-lying state は多くの研究がなされているが、それらの現象だけではなく、その振る舞いをする原理を理解しようと試みているが、single-particle, collective の二つの描像を統一するモデルはできていない。

#### 4.14 INFINITE NUCLEAR MATTER

§4-3,6 で原子核は核の表面付近で急激に密度が低下する領域があることを見てきた。たとえ、heavy nucleus でもごく中心部でのみ密度は一定であるが、理論的考察のためには核全体で密度が一定であるほうが扱いやすい。

そのため理想的な核として”infinite nuclear matter”を考える。

- 密度は一定
- proton, neutron の数は同じ

このようなもの考える利点は

- nucleon-nucleon interaction の検証
- many-body problem の取り扱い

がある。また重心の運動に煩わさなくて済む。核力の解析が主目的なので電磁相互作用はたいていは無視される

当然このような理想的な系は存在はしないが、neutron star はそれに近い状態になっていると考えられている。直接は調べられないが、したがって finite nuclei の知識から推定するしか無い。

まずは、binding energy について考える。Weizacker semi-empirical mass formula を使い  $A$  が無限大を考える。 $E_B/A$  を考えると

- surface term  $A^{2/3}/A = A^{-1/3} \rightarrow 0$
- Coulomb term 電磁相互作用は無視
- symmetry energy  $N = Z$  より零

のこる項は volume term のみであるから

$$E_B/A = 16 \pm 1 \text{ MeV} \quad (4.116)$$

これが infinite nuclear matter における binding energy per nucleon である。<sup>\*19</sup>

次に、density であるが、finite nuclei の saturation density より推定して

$$\rho_0 = 0.16 \pm 0.02 \text{ nucleons} \cdot \text{fm}^{-3} \quad (4.117)$$

これは平均密度よりも大きい。これは表面の領域がないことに起因する。

<sup>\*18</sup> semi-classical に考えると  $100\hbar = 2 \times 10^4 \text{ MeV}/c \cdot \text{fm}$ 、核の大きさはせいぜい  $7 \text{ fm}$ 、momentum は  $2.9 \text{ GeV}/c$  にも達してしまう。(Energy は  $3 \text{ GeV}$ )

<sup>\*19</sup> 通常の nuclear matter では  $E_B/A \simeq 8 \text{ MeV}$

この密度というのは Fermi momentum に関連する。というのは、励起エネルギーが低いなら、ほとんどの低い準位が占められている事になる。そのような状態では、核子間の相互作用よりも Pauli principle が支配的であるから、縮退した Fermi gas model を使う事が出来る。この近似において、核子は可能な限り低い準位に詰まった相互作用しない fermion とみなす。

一辺  $L$  の cube のなかの自由粒子を考える。平面波の波動関数は

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.118)$$

ただし、spin, isospin は無視しておく。wave numbers は wave function が境界で消えるという条件から

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, k_z = \frac{2\pi}{L} n_z \quad (4.119)$$

すると、wave numbers space 中での状態数は spin, isospin を考えて

$$dn = 4 \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 d^3k \quad (4.120)$$

核子の数  $A$  とすると、ground state において、すべての核子は Fermi momentum まで詰まっているので

$$A = \int_0^{k_F} dn = 4 \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \frac{4\pi}{3} k_F^3$$

核子の密度は

$$\rho_0 = \frac{A}{L^3} = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 \quad (4.121)$$

これから Fermi momentum が求める事が出来る。

$$k_F = 1.33 \pm 0.05 \text{fm}^{-1} \quad (4.122)$$

平均運動エネルギーを考える

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{A} \int_0^{k_F} \frac{(\hbar k)^2}{2M_N} 4 \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 d^3k = \frac{3}{5} \varepsilon_F \quad (4.123)$$

Fermi energy は  $k_F$  から

$$\varepsilon_F = \frac{(\hbar k)^2}{2M_N} \approx 37 \text{MeV} \quad (4.124)$$

これから  $A\varepsilon_F$  程度のエネルギーでないと、核のごく一部しか励起されていない事が分かる。 $A\varepsilon_F$  の値としては GeV のオーダーまでいってしまう。これからも Fermi gas model の有用性が分かる。(つまり、ほとんどが実質的には縮退している。)

infinite nuclear matter は通常最小エネルギーの状態であり、密度の揺らぎにたいして平衡状態で、安定である。したがって、binding energy per particle は Fermi momentum の関数として変分は零であり

$$\frac{d}{dk_F} \left( \frac{E_B}{A} \right) = 0$$

この二次の変分は密度の揺らぎへの剛性を示す項である。これは compression modulus として測定される。

$$\mathcal{K} = k_F^2 \frac{d^2}{dk_F^2} \left( \frac{E_B}{A} \right)_{\rho=\rho_0} \quad (4.125)$$

energy minimum において評価されているので、これは正の値を持つ。

the compression modulus というのは力学的には圧力に対してどれだけ変形するかの性質を示す量である。  
nuclear matter にたいしては

$$K \approx 200\text{MeV} \quad (4.126)$$

この値は、核の変形なしに励起するさいに必要とされるエネルギーなどから推定されている。

そのような励起を breathing mode といい、even-even nuclei で容易に見受けられる。(特に closed shell)

\*20 そのような核では ground state では  $0^+$  であり、密度を変える事でのみ  $0^+$  へ励起する。

infinite nuclear matter での計算の目的は、finite nuclei からの特徴から推定した

1. the binding energy per nucleon
2. the saturation density interms of the Fermi momentum
3. the comopression modulus

を再現する事にある。

期待する事は理想化された系の単純な形状から、直接的で有意義な核子間の相互作用や多体問題の検証を与えてくれる事である。その検証は重要なものである、例えば、finite nuclei のたいていの性質はその hard core \*21 にはあまり影響されない。一方で、infinite nuclear matter で saturation density を再現する際にそれは大きな問題となる。短距離での反発力が無い場合では、infinite nuclear matter は binding energy を密度を上げる事で得てしまい、計算が失敗する。

これは、もしかすると相対論的手法で回避できるかもしれない、最近の結果では Bonn potential for nucleon-nucleon interaction と相対論的な様々な手法で、良い結果が出ている。その結果が Fig.4-12。それらの計算についてはこれ以上は深入りしない。

Fig.4-12

- Fermi momentum - Binding energy per nucleon のグラフ
- 斜線部が finite nuclear matter から推定された値であり、他の点などは計算結果

---

\*20 非常に安定な核なので変形しにくい

\*21 引力であった核力が斥力になる領域 0.5fm 程度のところにある