

# 19章 原子核の熱力学

## イントロ

これまでのおさらい-原子核のモデル

- フェルミ気体模型
  - 陽子と中性子が平均場（井戸型ポテンシャルを仮定）の中に束縛されていて、そのポテンシャルの中のエネルギー準位を下から占めている、という描像
- 殻模型
  - 核子を殻構造に配置。平均場を3次元調和振動子型ポテンシャルで近似し、さらにL-S力を考慮。
  - 厳密に解けて動径量子数、角運動量が良い量子数にマジックナンバーを説明

核子をエネルギー準位の下から詰めていったとき、量子統計で学んだように、これは温度0のフェルミ気体とみなせる。

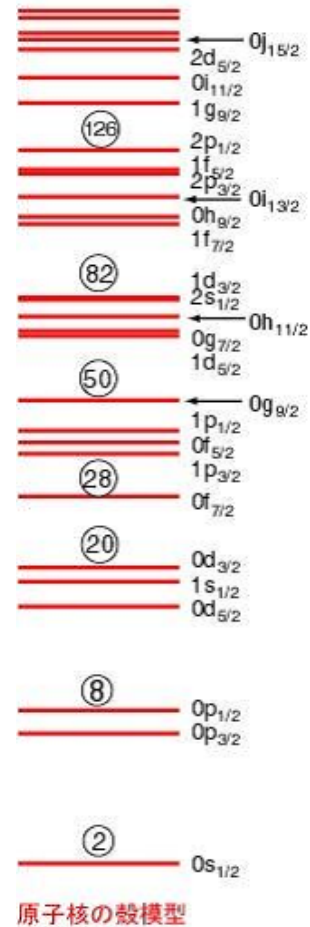


図 1:

## 中性子のエネルギースペクトルがマクスウェル分布になる理由

統計力学からの導出

体積  $V$  の中に

$$A + a \rightleftharpoons B + b$$

という反応があって、エネルギー  $E$  の平衡状態にあるとする。以下では重心系で考える。エネルギー  $E$  近傍の、微小エネルギー  $\Delta E$  にあるすべての状態は均等に占有されているものと仮定（等重率の原理）

つまり、

$$\rho_A(E) = \rho_B(E) \quad (\text{状態密度})$$

(4,20) より、反応率の式は、

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{\sigma_{A \rightarrow B} \cdot v_a}{V} = \frac{\sigma_{A \rightarrow B} \cdot \frac{dE}{dp_a}}{V}$$
$$W_{B \rightarrow A} = \frac{\sigma_{B \rightarrow A} \cdot v_b}{V} = \frac{\sigma_{B \rightarrow A} \cdot \frac{dE}{dp_b}}{V}$$

フェルミの第2黄金率 (4,19) より

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_B | \mathcal{H} | \psi_A \rangle|^2 \rho_b(E)$$
$$W_{B \rightarrow A} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_A | \mathcal{H} | \psi_B \rangle|^2 \rho_a(E)$$

$\mathcal{H}$  はエルミートだから、

$$|\langle \psi_B | \mathcal{H} | \psi_A \rangle|^2 = |\langle \psi_A | \mathcal{H} | \psi_B \rangle|^2$$

よって、

$$W_{A \rightarrow B} = W_{B \rightarrow A}$$

状態密度の具体的表式は

$$\rho_A(E) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p_a^2 \frac{dp_a}{dE} (2I_A + 1)(2I_a + 1)$$
$$\rho_B(E) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p_b^2 \frac{dp_b}{dE} (2I_B + 1)(2I_b + 1)$$

以上より、

$$\frac{\sigma_{A \rightarrow B}}{\sigma_{B \rightarrow A}} = \frac{p_b^2 (2I_B + 1)(2I_b + 1)}{p_a^2 (2I_A + 1)(2I_a + 1)}$$

これを詳細つり合いの原理 (principle of detailed balance) という。

反応率と崩壊幅の関係

$$W = \frac{1}{\tau} \approx \frac{\Gamma}{\hbar}$$

より、

$$\sigma_{A \rightarrow B} = \sigma_A \frac{\Gamma_b}{\Gamma_{tot}}$$

( $\Gamma_{tot} = \sum_b \Gamma_b$  和はエネルギー的に開いている全てのチャンネルについてとる)

$$G_A(b) = \frac{\Gamma_b}{\Gamma_{tot}} : \text{分岐比}$$

これは、A から中性子が放出されたとして、b チャンネルに中性子が放出される確率と思える。

詳細つり合いの原理より、(スピンのことは忘れて)

$$\sigma_{A \rightarrow B} p_a^2 = \sigma_{B \rightarrow A} p_b^2$$

$$\sigma_A G_A(b) p_a^2 = \sigma_B G_B(a) p_b^2$$

$$\frac{\sigma_A p_a^2}{G_B(a)} = \frac{\sigma_B p_b^2}{G_A(b)} = \text{const.}$$

よって

$$G_A(b) = \text{const.} p_b^2 \sigma_B$$

以上より、中性子のエネルギースペクトルは、

$$\begin{aligned} N_n(E_n) dE_n &\propto \sum_{E_n < E_b < E_n + dE_n} G_A(b) \\ &= E_b \sigma_B(E_n) w(E_A - E_n) dE_n \end{aligned}$$

ここで  $E_x = E_A - E_n$  として、 $w(E_x) dE_n$  で粒子 B の励起エネルギー  $E_x$  での状態数を表す。

また、 $E_n = \frac{p_n^2}{2M_n}$ .

エントロピー

$$S = k \log w(E_x)$$

温度は

$$\frac{\partial S}{\partial E_x} = \frac{1}{T(E_x)}$$

$$S(E_x) = S(E_A - E_n) = S(E_A) - E_n \left( \frac{\partial S}{\partial E_x} \right)_{E_x=E_A} + \dots$$

から、

$$w(E_x) \propto \exp\left(-\frac{E_n}{kT(E_x)}\right)$$

以上より、

$$N_n(E_n) dE_n \propto E_n \sigma_B(E_n) \exp\left(-\frac{E_n}{kT(E_x)}\right) dE_n$$

反応率はだいたい一定と考えて (たぶん) よくて、

$$\sigma_B(E_n) \propto \frac{1}{v_n} \propto \frac{1}{\sqrt{E_n}}$$

$$N_n(E_n) dE_n \propto \sqrt{E_n} \exp\left(-\frac{E_n}{kT(E_x)}\right) dE_n$$

## $\lambda \approx 1/\sigma\rho_N$ の証明

$P_{int}(x)$  : 一つの粒子が厚さ  $dx$  の間に相互作用する確率、とすると

$$P_{int}(x) = \sigma\rho_N dx \quad (1)$$

逆に厚さ  $x$  の物質中で入射粒子が相互作用されない確率がどうなるかを考える。

$P(x)$  : ある距離  $x$  だけ物質中を通ったときに相互作用しない確率

$w dx$  :  $x$  と  $x + dx$  の間において相互作用する確率

このとき  $x + dx$  通ったときに相互作用しない確率は

$$\begin{aligned} P(x + dx) &= P(x)(1 - w dx) \\ P(x + dx) - P(x) &= -P(x)w dx \\ \frac{dP(x)}{dx} &= -P(x)w \\ P(x) &= C \exp(-wx) \quad (C : \text{定数}) \\ P(0) &= 1 \text{ より } C = 1 \end{aligned}$$

以上のことから平均自由行程  $\lambda$  を計算

$$\lambda = \frac{\int x P(x)}{\int P(x)} = \frac{1}{w} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} P_{int}(x) &= 1 - P(x) \\ &= 1 - \exp(-wx) \\ &\approx 1 - (1 - w dx) \\ &= w dx \\ &= \frac{dx}{\lambda} \end{aligned} \quad (3)$$

(1)(3) より

$$\lambda \approx 1/\sigma\rho_N$$

### 0.1 宇宙の最初の三分間

- 初め  
粒子、反粒子、ゲージボソンはすべて熱的平衡状態にあった。温度は大変高く、クォークとレプトンの違いはなく、すべての相互作用の強度は同じだった。
- 約  $10^{-35}$  後  
膨張により温度が下がり、相転移が起こり強い相互作用と電弱相互作用が分離。
- 約  $10^{-11}$  後  
温度は約  $100\text{GeV}$  となり、次の相転移が起こって弱い相互作用と電磁相互作用が分離。

- 約  $10^{-6}$  後  
さらに膨張して、温度は  $100\text{MeV}$  まで下がる。
- 約 1 秒後  
温度は  $1\text{MeV}$  となった。ニュートリノのエネルギーが小さくなり物質から分離され、物質とはほとんど相互作用せずに宇宙を自由に動いている。
- 約 3 分後  
温度は  $100\text{keV}$  まで下がる。光子のエネルギーが下がり、核融合によって軽い原子核が作られ始めた。重陽子、ヘリウム、リチウム原子核の元素合成（ビッグバン元素合成）が起きた。

## ビリアル定理の証明

ポテンシャルエネルギーが  $r^n$  に比例し、系の運動が空間のある領域内だけに限られていると仮定。運動エネルギー  $T$  は速さの 2 乗の関数より、

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial v_a} = 2T$$

ここで  $\frac{\partial T}{\partial v_a} = p_a$  より、

$$2T = \sum_a p_a v_a = \frac{d}{dt} \left( \sum_a p_a v_a \right) - \sum_a r_a \dot{p}_a \quad (4)$$

任意の関数  $f(t)$  の時間平均を

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$$

で定義する。ここで  $f(t)$  が有界な関数  $F(t)$  の時間についての導関数  $\frac{dF(t)}{dt}$  であるとする、

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0$$

となり、時間平均はゼロになる。系が空間の限られた領域の中で、有限の速さで運動しているとするならば、 $\sum_a p_a v_a$  は有界であるので (4) 式の右辺第 1 項は時間平均を取るとゼロ

になる。そして第 2 項の  $\dot{p}_a$  をニュートンの式より  $-\frac{\partial U}{\partial r_a}$  で置き換えれば、

$$2\bar{T} = \overline{\sum_a r_a \frac{\partial U}{\partial r_a}} \quad (5)$$

となる。式 (5) の右辺の量を、その系のビリアルという。最初の仮定よりポテンシャルエネルギーが  $r^n$  に比例するならば、

$$2\bar{T} = n\bar{U}$$

とくに重力の場合、星全体、および（星は理想気体でできているとして）各原子について、

$$2\bar{T} = -\bar{U}$$

さらにここで星を球対称とし、エネルギー散逸は無いとする。今  $M(r)$  を半径  $r$  の中にあ  
る質量、 $P$  を圧力、 $\rho$  を密度とすると、

$$P = \rho T$$

静水圧平衡の式より、

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{M(r)}{r^2}\rho$$

よって

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{M(r)}{r^2} \leq 0$$