e μ τ 0.5MeV 105MeV 1.8GeV

$\pi^{\pm}$ π^0 — $u\bar{u}-d\bar{d}$ 140MeV 135MeV

クォークでできたやつの中ではいちばん軽い

アイソスピン1 → 2×1+1 = 3通りの姿がある

spin 1 アイソスピン 0

spin 0

$\pi^+ = u\bar{d}$

$\pi^- = d\bar{u}$

$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$

1　1. 放射線源と放射線

1. 放射線が出る過程は 2 通り

←放射線源 2 種類→ x 線、γ 線→α 線、β 線、中性子線そのほか

脱励起

種類	放出源	放出過程	電荷	質量 [MeV]	エネルギースペクトル
α 線 (^{4}He 原子核)	原子核	核崩壊・核反応	+2	3727.23	離散
β^- 線 (電子)	原子核	核崩壊	-1	0.511	連続 [keV-MeV]
β^+ 線 (陽電子)	原子核	核崩壊	+1	0.511	連続 [keV-MeV]
γ 線	原子核	核の励起→基底	0	0	離散 [keV-MeV]
x 線	軌道電子	原子の励起→基底	0	0	離散 [eV-keV]
内部転換電子	軌道電子	核の励起→基底	-1	0.511	離散 [keV 後半]
オージェ電子	軌道電子	原子の励起→基底	-1	0.511	離散 [eV-keV]
中性子	原子核	核反応	0	939.57	連続・離散 [keV-MeV]
核破砕物	原子核	核分裂	~20	80~160	連続 [30-150MeV]

たぶんGeV

$n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$

これよりγの方が

2. 原子核の単位図

$(Z = \text{陽子数} = \text{原子番号}, A = \text{質量数} = \text{中性子+陽子数}) \to (Z+1, A) + e^- + \bar{\nu}$

自分で 1/e になる

3. α 崩壊

$$(Z, A) \to (Z-2, A-4) + \alpha$$

- Gamow の透過因子:高エネルギーほど透過確率高く半減期短い ——→
- おおむね 4-6MeV
- α 崩壊 一回で基底状態に落ち着くことがほとんど (β 崩壊はそのあと γ 崩壊を伴うことがほとんど)
- 1 つの核種から複数のエネルギースペクトルをもつ α 線が出ることもある
- α 線の物質中での飛程は極めて短い (電荷が+2 だから)(5MeV でも空気中で数 cm)
- そのため α 線源は薄く作られている — 線源自体で減衰するのを防ぐため

4. β 崩壊

陽子が中性子に、中性子が陽子に崩壊する。(弱い力)

$$n \to p + e^- + \bar{\nu} \text{(中性子過剰核)}$$

$$p \to n + e^+ + \nu \text{(陽子過剰核)}$$ ← こちらの方が核が重くなるってできにくい

レプトン数 e μ τ レプトン数が保存!

1 ν_e ν_μ ν_τ

反粒子なら −1 になって、その合計が保存される。

- β 線のエネルギーは連続に分布 (3 体崩壊:ニュートリノとエネルギーを分け合う)
- 最大エネルギー ≃Q 値 ≃ 数十 keV〜数MeV
- ほとんどが β 崩壊後に γ 崩壊を起こす
- γ 崩壊を伴わない β 線源はごくわずか
- 複数の β 崩壊分岐をもつ線源もある
- β 線の物質中の飛程は比較的短い (電荷があるから)
- そのため陽電子線源は特に薄く作る必要がある (線源中の電子と対消滅するから)

対消滅

$e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$

運動量保存のため

5. 電子捕獲

$$p + e^- \to n + \nu \text{(陽子過剰核)}$$

- 電子が抜けた後のホールと軌道電子との相互作用で出る x 線やオージェ電子で観測できる
- 最内殻軌道の K 電子が捕獲されやすい (L 電子の確率もある)

6. γ 崩壊

原子核も励起状態間を光 (γ 線) を食べたり吐いたりして移り変わる。したがって γ 線のスペクトルは離散的である。

- 原子核の励起状態は β 崩壊後にできる
- 核反応でもできる
- β 崩壊でも β 線は遮蔽されて観測できず、後に続く γ 線だけが見えることもある

5-1. アイソマー

励起状態から落ちるのに時間がかかる原子核をアイソマーという。

- 普通、崩壊前後のスピン差が大きいときにできる
- ^{60m}Co

とかく

6. 対消滅による光放出

陽電子と電子は対消滅して 2 個の 511keV の光を出す。

- 運動量保存則によって 2 個の光は逆方向に出る

7. 内部転換電子
原子核の励起状態からの遷移はγ線の放出だけでなく、軌道電子との相互作用による電子の放出によっても起こる。

- 原子核の励起エネルギー-原子軌道の束縛エネルギー=電子の運動エネルギー
- したがってエネルギーは数百 keV〜数 MeV である
- K 電子が最も転換しやすいが，他の軌道でもおこる
- したがっていくつかのエネルギーをもつ内部転換電子が同じ原子核からでてくることがある
- 内部転換電子はエネルギーがそろった電子なのでキャリブレーションにつかわれる

8. オージュ電子
電子捕獲や内部転換のあとに生じた電子殻の励起状態が、x 線ではなく、電子の放出により解消されることがある。

- 単一のエネルギースペクトルをもつ
- 1つの原子から複数のエネルギースペクトルをもつオージュ電子が出る場合もある
- 数 keV 以下である
- 従ってとても吸収されやすく、検出が難しい

9. 中性子源
中性子を放出する同位体を人工的に合成することは可能だが、実験に使える中性子を放出する元素は自然界には存在しない。
9-1. 自発核分裂
自発核分裂を起こ元素はウラン転換物に多くみられる。

- 最もよく使われるのが ^{252}Cf である
- エネルギーは最高 10MeV
- エネルギー分布はマクスウェル分布である

9-2. 核反応
より簡単に中性子を作る方法は核反応を使う方法である。

$$^{9}Be + \alpha \to {}^{13}C^{*} \begin{cases} {}^{12}C^{(*)} + n \\ {}^{8}Be + \alpha + n \\ 3\alpha + n \end{cases}$$

- α線源に何を使うかに応じて、出てくる中性子の個数やエネルギーは異なる
- 出てくる中性子のエネルギー分布は連続的 (入射α粒子のエネルギーが物質によってばらつくから)
- ドップラー広がりもある (〜2MeV) → そろってても、Lorentz Boostで エネルギーがずれてくる

$$^{9}Be + \gamma \to {}^{8}Be + n$$
$$^{2}H + \gamma \to {}^{1}H + n$$

- 出てくる中性子のエネルギー分布はα線を使う方法よりも単一 (γ線は物質の影響を受けにくいから)
- 得られる中性子数はα線を使う方法よりも少ない
- γ線は遮蔽しにくいためγ線によるバックグラウンドが出る

4月15日(金)
担当 前田 一弥

1.10 放射能の単位

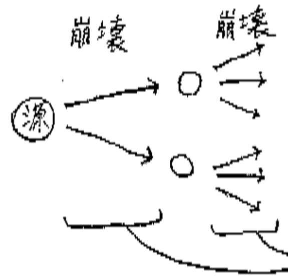
放射能の強さ：単位時間あたりの崩壊の数
崩壊する物質の量に依存

単位：1 Curie(Ci) = 1秒間に 3.7×10^{10} 回の崩壊
(= ^{226}Ra 1g が 1秒間に崩壊する数)

これは使いにくい。実用的には・・・

⇒ 1 Becquerel (Bq) = 1秒間に 1回の崩壊

注意) 放射能の強さと、最終的に放射される放射線の量は、必ずしも一致しない。



この数は異なる。

他の関連した単位

gray (Gy)：物体に放射線が当たったとき、その物体1kgが吸収したエネルギーの量。1 Gy = 1 J/kg

sievert (Sv)：放射線が生物に与える影響を共通の尺度で表したもの。放射線の種類によって影響は異なるため、gray 単位で表した値に修正係数をかけて求める。

1.11 放射性崩壊の法則

崩壊核の個数 N，単位時間あたりの崩壊の個数の平均 λ

$$dN = -\lambda N dt$$

$$\Leftrightarrow \quad N(t) = N(0)\exp(-\lambda t)$$

$$= N(0)\exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right) \qquad (\tau_m = 1/\lambda)$$

半減期 $T_{1/2}$

$$T_{1/2} = \frac{1}{\lambda}\ln 2 = \tau_m \ln 2$$

1.11.1 放射性崩壊のゆらぎ

量子力学によると、ある時間あたりの崩壊の個数を完全に予測すること

はできない. ⇒ 平均値の採用

・どれほどの変動幅があるのだろうか？ → 標準偏差（いわゆる統計誤差）

Δt 間にイベントが n カウント観測される確率を $P(n, \Delta t)$

$$P(n, \Delta t) = \frac{m^n}{n!}\exp(-m)$$

m：Δt 間に観測されるイベントの平均カウント数

ポアソン分布

標準偏差 $\sigma = \sqrt{m}$

例 1.1）5秒間で 900 カウントのイベントを観測

$$\sigma = \sqrt{900} = 30$$

1秒間のカウントの割合は，

$$(900 \pm 30)/5 = (180 \pm 6)\ [\mathrm{counts/s}]$$

例 1.2) 平均 1 counts/s の弱い放射線源

4秒間で、i) イベントが観測されない確率

ii) 1度だけイベントが観測される確率

i)

$$4^0 \cdot \frac{e^{-4}}{0!} = 0.0183$$

ii)

$$4^1 \cdot \frac{e^{-4}}{1!} = 0.0733$$

1.11.2 崩射性崩壊の連鎖

連鎖的に崩壊する場合 ⇒ $\underset{\text{不安定}}{A} \xrightarrow{\lambda_a} \underset{\text{不安定}}{B} \xrightarrow{\lambda_b} \underset{\text{安定}}{C}$

$$\begin{cases} \dfrac{dN_a}{dt} = -\lambda_a N_a \\ \dfrac{dN_b}{dt} = \lambda_a N_a - \lambda_b N_b \\ \dfrac{dN_c}{dt} = \lambda_b N_b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N_a(t) = N_a(0)\exp(-\lambda_a t) \\ N_b(t) = N_a(0)\dfrac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a}\left[\exp(-\lambda_a t) - \exp(-\lambda_b t)\right] \\ N_c(t) = N_a(0)\left\{1 + \dfrac{1}{\lambda_b - \lambda_a}\left[\lambda_a \exp(-\lambda_b t) - \lambda_b \exp(-\lambda_a t)\right]\right\} \end{cases}$$

N_b が max となるような $t = t_{max}$ を求める ⇒ $\dfrac{dN_b}{dt} = 0$ となる t を求める

$$\lambda_a N_a(t_{max}) = \lambda_b N_b(t_{max})$$

$$t_{max} = \frac{\ln \frac{\lambda_b}{\lambda_a}}{\lambda_b - \lambda_a}$$

プリント Fig. 1.7. 参照

BとAの放射能の比

$$\frac{\lambda_b N_b}{\lambda_a N_a} = \frac{\lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a}\left\{1 - \exp\left[-(\lambda_b - \lambda_a)t\right]\right\}$$

を考える。この値について、

i) $\lambda_a > \lambda_b$

　tが大きくなるとともに増加していく。

ii) $\lambda_b > \lambda_a$

　tが大きくなると、一定の値$\left(= \frac{\lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a} > 1\right)$に収束。⇒過渡平衡

iii) $\lambda_b \gg \lambda_a$

　すみやかに、およそ1に収束。⇒永続平衡

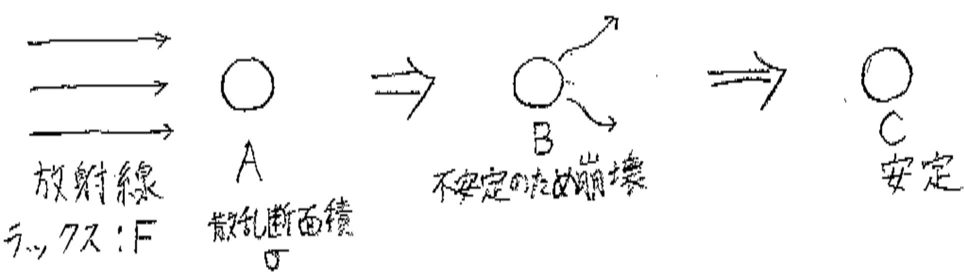
i)～iii)について、プリント Fig.1.8 参照。

(例) $^{90}Sr \xrightarrow[28y]{\beta^-} {}^{90}Y \xrightarrow[64.8h]{\beta^-} {}^{90}Zr$

実質、半減期28年の^{90}Yと考えることができる。

1.11.3 放射線による放射性同位体の生成

上記の議論の応用として、物質に放射線を照射し、放射性同位体をつくることを考える。



$$\begin{cases} \dfrac{dN_a}{dt} = -F\sigma N_a = -\lambda_a N_a \\ \\ \dfrac{dN_b}{dt} = -\lambda_b N_b + \lambda_a N_a \end{cases}$$

1.11.2)と同様の式ができる。

Cの数は直接関係しないので省略。

例1.3)

1g の Cu に、フラックス $F = 10^9\ cm^{-2}s^{-1}$ の中性子線を 15分間 照射した場合.

$$Cu\begin{cases} ^{63}Cu & (69\%) \\ ^{65}Cu & (31\%) \end{cases}$$

中性子線により $\begin{cases} ^{63}Cu \longrightarrow {}^{64}Cu \\ ^{65}Cu \longrightarrow {}^{66}Cu \end{cases}$ と変化.

散乱断面積

$$\sigma(^{63}Cu + n \to {}^{64}Cu) = 4.4\ barns = 4.4\times 10^{-24}\ cm^2$$

$$\sigma(^{65}Cu + n \to {}^{66}Cu) = 2.2\ barns = 2.2\times 10^{-24}\ cm^2$$

^{64}Cu, ^{66}Cu は不安定であり. 半減期 $T_{1/2}$ はそれぞれ 12.7時間、5.1分. ^{64}Cu, ^{66}Cu の放射能の強さはどうなる?

$$\begin{cases} \dfrac{dN_a}{dt} = -F\sigma N_a = -\lambda_a N_a \\ \dfrac{dN_b}{dt} = -\lambda_b N_b + \lambda_a N_a \end{cases}$$

$$\lambda_a = F\sigma = \begin{cases} 4.4\times 10^{-15}\ s^{-1} & ^{64}Cu \\ 2.2\times 10^{-15}\ s^{-1} & ^{66}Cu \end{cases}, \quad \lambda_b = \begin{cases} 0.054\ h^{-1} & ^{64}Cu \\ 0.136\ min^{-1} & ^{66}Cu \end{cases}$$

放射能の強さ

$$\lambda_b N_b = N_a(0)\frac{\lambda_a\lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a}\left[exp(-\lambda_a t) - exp(-\lambda_b t)\right]$$

$$\simeq N_a(0)\lambda_a\left[1 - exp(-\lambda_b t)\right] \qquad (\because \lambda_a \ll \lambda_b,\ \lambda_a t \ll 1)$$

$$N_a(0) = (6.02\times 10^{23}/A)\times(\text{存在の割合})\times(1g)$$

$$\therefore \lambda_b N_b(15min) = \begin{cases} 3.86\times 10^5\ Bq = 10.43\ \mu Ci & ^{64}Cu \\ 5.62\times 10^6\ Bq = 152\ \mu Ci & ^{66}Cu \end{cases}$$

$$t_{max} = \begin{cases} 16.8\ days & ^{64}Cu & (28.79\ MBq = 778\ \mu Ci) \\ 3.4\ h & ^{66}Cu & (6.48\ MBq = 175\ \mu Ci) \end{cases}$$

II、物質を通過する放射線の軌道

2.1 下準備ー考え方や定義など

2.1.1 散乱断面積

F：フラックス≡単位時間、単位面積あたりの粒子の数

N_s：単位時間あたりに散乱される粒子の平均の数 ← depend on Ω, E
$N_s = N_s(E, \Omega)$

単位フラックス、単位時間あたりに、ターゲットから立体角 $d\Omega$ の範囲内に散乱される粒子の個数≡<u>微分断面積</u>

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F}\frac{dN_s}{d\Omega}$$

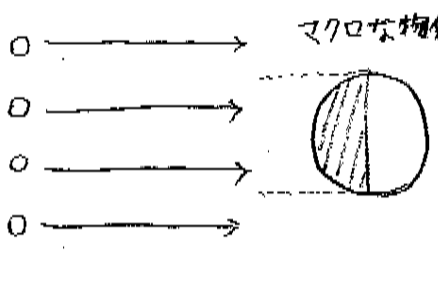
もしくは、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{単位時間に}\Omega\text{方向の単位立体角内に散乱される粒子の数}}{\text{単位時間あたりに単位面積を通じて入射する粒子の数}}$$

これを全立体角で積分したもの

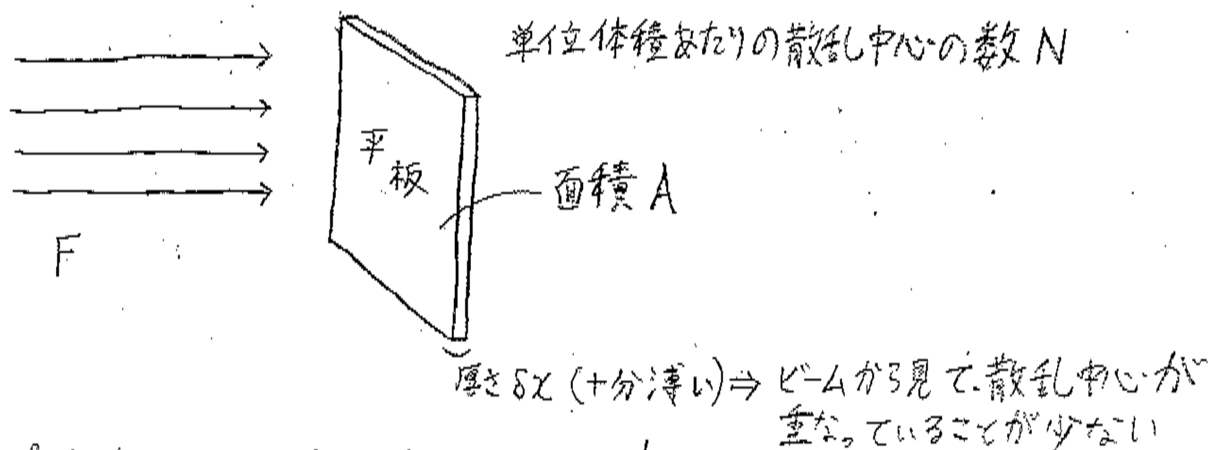
$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad \text{：全散乱断面積}$$

ビジュアル的なイメージ　※あくまでイメージ



ビームが衝突できるのは、ビームから見た断面積。→ <u>散乱断面積</u>

次に、もう少し現実に即した状況を考える。



単位時間あたりに立体角 $d\Omega$ の範囲内に散乱される粒子の個数は

$$N_s = FAN\delta x \frac{d\sigma}{d\Omega}$$ （ビームの幅が平板より広い場合）

全方向に散乱される粒子は、Ω で積分して

$$N_{tot} = FAN\delta x\, \sigma$$

（※ ビームの幅が平板より狭い場合は
$FA \rightarrow$（単位時間に照射される粒子の数）
とすればよい。）

N_{tot} は、単位時間あたり、どの方向でもよいので散乱する粒子の個数。
したがって、単位時間あたりに照射される粒子の個数FAで割ると、
<u>平板内δxを進む間に散乱する確率</u>となる。
その確率は、$N\sigma\delta x$ である。

これ後で使う！

まず、$F\cdot\frac{d\sigma}{d\Omega}$ で 単位面積に入射したビームが 1粒子に対してΩ方向のdΩ内に散乱される個数

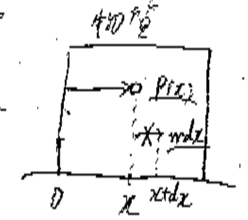
そこにAをかけて、
全面積のビームを考えることになる。

さらに、$N\delta x$ をかけて、全粒子に対して考えることになる。

2.1.2 距離x間での相互作用の確率，平均自由行程

2.1.1では厚さδxの平板を考えたが、今度はより一般的に、任意の厚さxの場合を考える。←別に物質の厚さがxってわけじゃない。ごへいがあるかも。

$P(x)$：粒子がx進んでまだ相互作用しない確率 ←



$w\,dx$：$x\sim x+dx$の間に相互作用を起こす確率

w は const

0??

$x\sim x+dx$ 間で相互作用を起こさない確率は、

ていせい！
訂正！

$$P(x+dx)=P(x)(1-w\,dx)$$

1次の展開

$$P+\frac{dP}{dx}dx=P-Pw\,dx$$

$$dP=-wP\,dx$$

$$P=\exp(-wx)\qquad (P(0)=1\text{ より、定数を1とした})$$

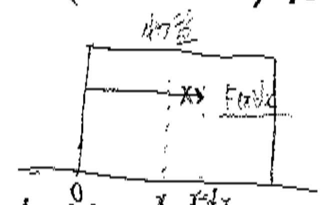
x進む間のどこかで相互作用を起こす確率$(\equiv P_{int}(x))$は、

$$P_{int}(x)=1-\exp(-wx)$$

相互作用せずx進み、$x\sim x+dx$の間で相互作用を起こす確率$(\equiv F(x)dx)$は、

$$F(x)dx=P\cdot w\,dx$$

$$=\exp(-wx)\,w\,dx$$



相互作用を起こさず粒子が進むことのできる距離の平均値、すなわち$P(x)$のもとでのxの期待値 λ は、

$$\lambda=\frac{\int_0^\infty xP(x)dx}{\int_0^\infty P(x)dx}=\frac{1}{w}$$

λを、平均自由行程という。

なにを求めたいかっての念頭においておく！

- 相互作用せずx進み、$x\sim x+dx$の間で相互作用を起こす確率 $F(x)dx$
- $P(x)$の確率のもとでのxの期待値λ
- λと、σとかNとかとの関係
- それらを使ってもう一度$F(x)dx$をあらわす

$P_{int}(x)$ の式に、λを代入し、$x=\delta x$としてexpの項を展開

$$P_{int}=1-\left(1-\frac{\delta x}{\lambda}+\cdots\right)\simeq\frac{\delta x}{\lambda}$$

これを、2.1.1 の最後で導いた確率と比較

$$\frac{\delta x}{\lambda}=N\sigma\delta x$$

$$\therefore\lambda=\frac{1}{N\sigma}$$

したがって、これをP, P_{int}, Fdx の式に代入して、

$$P(x)=exp(-N\sigma x)$$

$$P_{int}(x)=1-exp(-N\sigma x)$$

$$F(x)dx=exp(-N\sigma x)N\sigma dx$$

となる。

2.1.3 表面密度の単位

放射線と物体の相互作用を考えるときに、表面密度(surface density)や、重量厚さ(mass thickness)の単位を用いると便利。

mass thickness $\equiv\rho\cdot t$　　(ρ: 質量密度, t: 厚さ)

(単位は、[質量]/[長さ]^2)

同じmass thicknessをもつ物体は、放射線に対して大体同じような反応をする。

1 barn $=10^{-24}$ cm^2

2.2 原子衝突による重粒子のエネルギー損失

4月22日
担当：河合

荷電粒子が物質を通過したときの重要な特徴

1) 粒子によるエネルギー損失 ← 原子内電子との非弾性衝突
2) 入射方向からのズレ ← 原子核との弾性散乱　原子の電子雲との相互作用

(3) チェレンコフ放射による発光
(4) 核反応
(5) 制動放射　無視できる
(物質中の原子核の電場によって制動を受けた電子は光子を放出してエネルギーを失う)

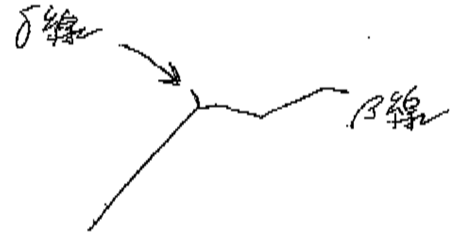
$E_c \approx 600\,\mathrm{MeV}/Z$ を超えると重要
臨界エネルギー

入射粒子を2つに分ける
(1) 電子，陽電子
(2) 重粒子：μ, π, p, α粒子，軽い原子核

) エネルギー損失は非弾性衝突によって起こる．$\sigma \approx 10^{-17} - 10^{-16}\,\mathrm{cm}^2$
電子雲との反応なので原子核反応とかのやつよりだいぶ大きい!

粒子のエネルギー → 原子のイオン化や励起に使われる．
衝突による損失は，運動エネルギーに比べて小さいが，
高密度物質では衝突回数㊤ → エネルギー損失が観測される．
10 MeV 陽子　0.25 mm の銅で止まる
うわい!

soft collisions：励起のみ
hard collisions：イオン化される十分なエネルギー



霧箱の状態が良好であるとき，
衝突によって分子からはじき出された
電子（たまたま高エネルギーだったもの）
の飛跡

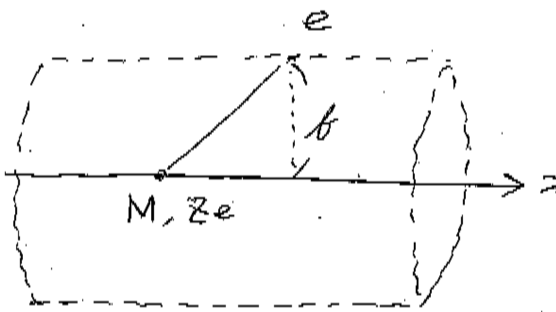
knock-on electron　原子核から弾き出された電子

) 弾性散乱
∘ 電子との衝突ほど起こらない
∘ 入射粒子より原子核の質量㊤ → エネルギー伝達はほとんどない．

非弾性衝突　量子力学的確率で起こる
マクロな長さで見ると回数大
阻止能 $\frac{dE}{dx}$：単位長さ当りのエネルギー損失
stopping power

2.2.1 ボーアによる計算 ー古典的な場合

重粒子 電荷 Ze、質量 M、物質媒体中の速度 v



衝突パラメータ b

電子が少ししか動かない
→ 電場が変わらない
重粒子の軌道がそれない $(M \gg m_e)$

重粒子との衝突で受け取った力積から電子が得たエネルギーを考える。

力積

$$I = \int F dt = e\int E_\perp dt = e\int E_\perp \frac{dt}{dx}dx = e\int E_\perp \frac{dx}{v} \quad (2.17)$$

↑ $E_{/\!/}$ は通過する前後で対称なので消える

無限に長い円柱に Gauss の法則を適用して

(2.17)に代入

$$\int E_\perp 2\pi b\, dx = 4\pi Ze \qquad \therefore \int E_\perp dx = \frac{2Ze}{b} \qquad \therefore I = \frac{2Ze^2}{bv}$$

電子が得たエネルギー

$$\Delta E(b) = \frac{I^2}{2m_e} = \frac{2Z^2e^4}{m_e v^2 b^2}$$

N_e：電子密度　$b \sim b+db$、dx の間に

$$-dE(b) = \Delta E(b) N_e \underbrace{dV}_{2\pi b\, db\, dx} = \frac{4\pi Z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \frac{db}{b} dx \quad (2.20)$$

b が大きすぎると衝突が短時間で起こらない→撃力の計算 ×

$b = 0$ で $\Delta E = \infty$　b が小さすぎても ×

なかなか大変な主体だ、γ倍だけで違く!

正面衝突でエネルギー最大 $\frac{1}{2}m_e(2v)^2$ $\xrightarrow{\text{相対論}}$ $2\gamma^2 m_e v^2$

b_{min} を与える

(2.19) より

$$\frac{2Z^2e^4}{m_e v^2 b_{min}^2} = 2\gamma^2 m v^2 \qquad \therefore b_{min} = \frac{Ze^2}{\gamma m_e v^2}$$

b_{max} について　・電子が軌道周波数 ν で束縛

衝突の、電子がエネルギーを吸収するために引き起こされる摂動 $\tau = \frac{1}{\nu}$ より短い時間

よーするに、電子が1周回るまでの、すごい短い時間ってこと
べつにこの数字に意味があるわけではない

典型的な時間 $t \simeq \frac{b}{v}$　$t \to \frac{t}{\gamma} = \frac{b}{\gamma v}$

$$\frac{b_{max}}{\gamma v} \leq \tau = \frac{1}{\bar{\nu}} \qquad \bar{\nu}：中心周波数 \qquad \therefore b_{max} = \frac{\gamma v}{\bar{\nu}}$$

(2.20) を $b_{min} \sim b_{max}$ まで積分

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi Z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \ln\frac{b_{max}}{b_{min}} = \frac{4\pi Z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \ln\frac{\gamma^2 m v^3}{Ze^2\bar{\nu}}$$

α粒子や重い原子核では成立するが、陽子のような軽い粒子では量子力学的効果が現われてきて成り立たない

大事!
速度の2乗に反比例、原子番号の2乗に比例!

2.2.2 Bethe − Bloch（ベーテ ブロッホ）の公式 —電離（イオン化）によって失うエネルギー—

量子力学的に正しい計算は パラメータ

衝突パラメータ b → 運動量~~移動~~移行

観測不可能　　観測可能

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\left[\ln\left(\frac{2m_e\gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2}\right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z}\right] \quad (2.27)$$

δ：密度補正、$2\frac{C}{Z}$：殻補正

r_e：電子半径　　ρ：吸収物質の密度

m_e：電子質量　　z：入射粒子の電荷

N_a：アボガドロ数　　$\beta = \frac{v}{c}$

Z：吸収物質の原子番号　　$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

A：　〃　質量数　　δ：補正

C：　〃

W_{max}：1回の衝突で伝達する最大のエネルギー

$2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 = 0.1535\ \mathrm{MeV\ cm^2/g}$

$$W_{max} = \frac{2m_e c^2 \eta^2}{1 + 2s\sqrt{1+\eta^2} + s^2}$$

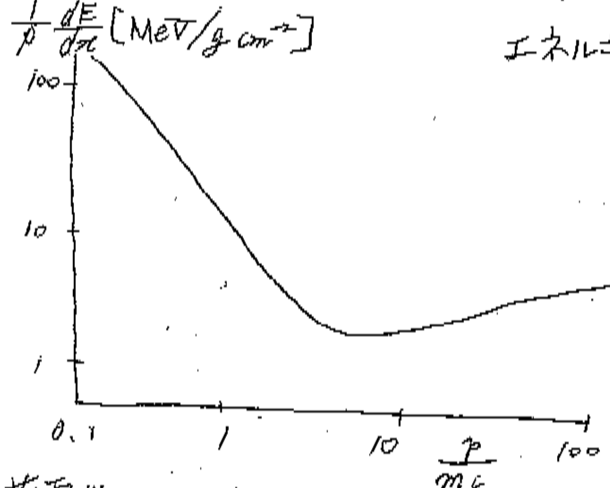
← 運動学的に　　入射粒子の質量 M

$s = \frac{m_e}{M}$, $\eta = \beta\gamma$

$M \gg m_e$ のとき $W_{max} \simeq 2m_e c^2 \eta^2$

◎ 平均励起ポテンシャル I

原子核の電荷数が $Z > 1$ の場合 ほぼ $16\,\mathrm{eV} \cdot Z^{0.9}$



荷電粒子のエネルギー損失の平均値

エネルギー損失は粒子の電荷と速さに依存するが、質量には依存しない

$p/m_0 c \simeq 4$ で min

I：理論上は振動子強度で計算できるが、難しいので、実際は $\frac{dE}{dx}$ を測定して、経験的に

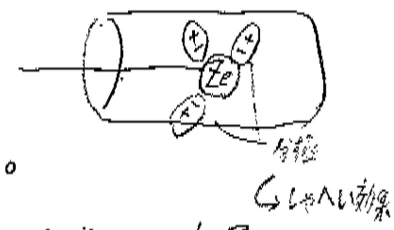
$$\begin{cases} \frac{I}{Z} = 12 + \frac{7}{Z}\ \mathrm{eV} & (Z < 13) \\ \frac{I}{Z} = 9.76 + 58.8\, Z^{-1.19}\ \mathrm{eV} & (Z \geq 13) \end{cases}$$

Bethe-Bloch の公式の補正項

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A}\frac{z^2}{\beta^2}\left[\ln\left(\frac{2m_e\gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2}\right) - 2\beta^2 \underbrace{-\delta}_{①} \underbrace{-2\frac{C}{Z}}_{②}\right]$$

①; 密度効果に対する補正

入射粒子が周囲の原子を分極させ、粒子がつくる正味の電場が弱まる。
そのため、電子に与えるエネルギーは少なくなる。



☆ 入射粒子のエネルギーが大きいほど、この効果は大きい。

☆ 物質の密度が大きいほど、分極が起こりやすいので、この効果は大きい。

δ の値は物質によって異なるが、その値は経験的に知られている。

② シェル補正

速度が遅い粒子 (束縛電子よりも遅い粒子) に対しては、そもそも Bethe-Bloch 公式が使えない。

→ 電子が静止していると見なせなくなるため。

この効果に対する補正式も物質に依り、経験則が与えられている。

その他の補正も考えられるが、典型的には、それらの効果は重イオンの場合 1% 程度でしかない。

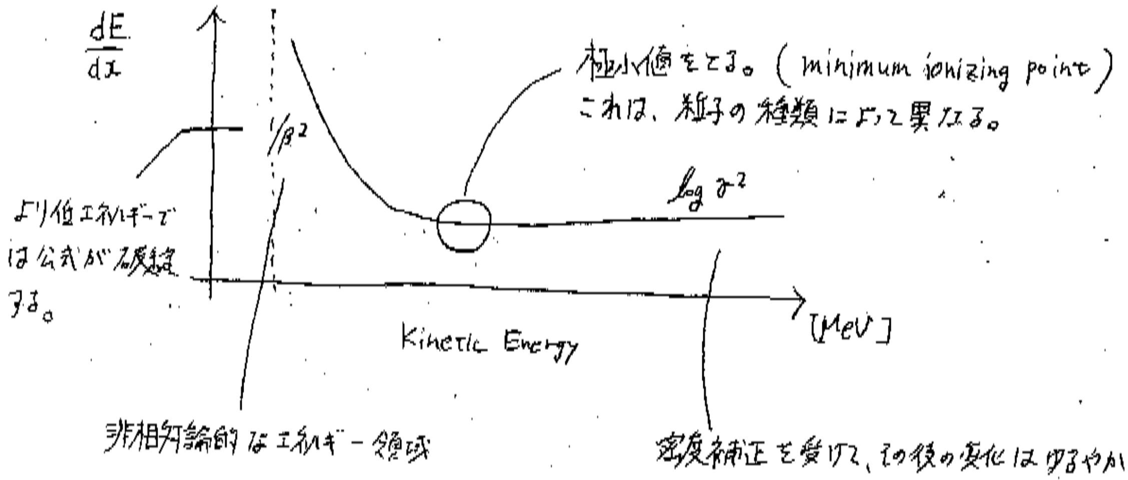
補足). 入射粒子が高速電子の場合、制動放射が無視できない。

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{制動} \Big/ \left(\frac{dE}{dx}\right)_{衝突} \simeq \frac{EZ}{700} \quad (E \text{ は MeV 単位})$$

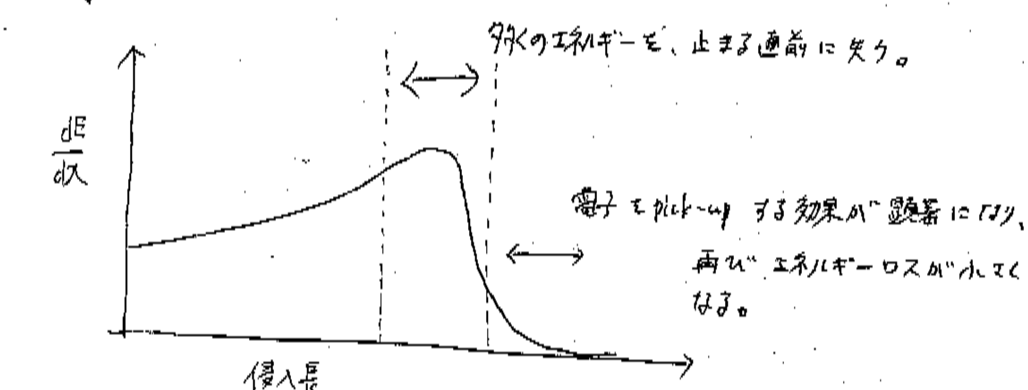
★ Bethe Bloch はそもそも軽い電子とかには適用できない!

2.2.3 エネルギー依存性

Bethe-Bloch 公式の定性的な振舞いを示す。



Braggカーブ



この特性を利用して、医学の分野で応用がなされている。

• 2.2.4　スケーリング則

Bethe-Bloch の式を、β の関数とみる。

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 f(\beta)$$

運動エネルギーを T とすると、β は T/M の関数であるから、

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 f'\left(\frac{T}{M}\right)$$

と書ける。従って、ある物質中における、質量 M_1, 電荷 z_1 の振舞いが分かっていれば、別の粒子（M_2, z_2, T_2）の振舞は、簡単な変数変換をして求められる。

$$-\frac{dE_2}{dx}(T=T_2) = z_2^2 f'\left(\frac{T_2}{M_2}\right) = -\frac{z_2^2}{z_1^2}\frac{dE_1}{dx}\left(T = T_2\frac{M_1}{M_2}\right)$$

• 質量阻止能

Bethe-Bloch の式を、mass thickness で表すと、　[illegible]

但しポリエチレンとかは
$(C_2H_4)_n$
0.5 [illegible]

$$-\frac{dE}{d\xi} = z^2 \underbrace{\frac{Z}{A}}_{\text{ほぼ一定}} f(\beta, I)$$

$I = I(Z)$ は log でしか効かない

となるので、この値は、物質の種類に依らず、ほぼ一定となる。

• 混合物や化合物について

各原子に関する dE/dx の式に、適当な重みをつけて足し合わせれば良い近似になることが知られている。（Bragg ルール）

パーマロイ
75%　25%
Ni　Fe

P29 ~ P34

担当：藤林

平成 23 年 5 月 8 日

2.2.6　化合物，混合物の場合

$\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}$ 即ち重量厚さあたりのエネルギー損失で考えると，Bragg's rule により

$$\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx} = \sum_i w_i \frac{1}{\rho_i}\left(\frac{dE}{dx}\right)_i \quad \left(w_i = \frac{a_i A_i}{A_m}\right)$$

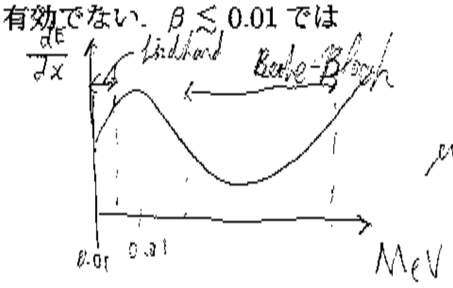
ここで，a_i, A_i はそれぞれ，分子中の i 番目の元素の個数と質量数，また $A_m = \sum_i a_i A_i$ である．そうするとエネルギー損失は，Bethe-Bloch の式のパラメータを有効値

$$Z_{\text{eff}} = \sum a_i Z_i \quad A_{\text{eff}} = \sum a_i A_i \quad \ln I_{\text{eff}} = \sum \frac{a_i Z_i \ln I_i}{Z_{\text{eff}}}$$
$$\delta_{\text{eff}} = \sum \frac{a_i Z_i \delta_i}{Z_{\text{eff}}} \quad C_{\text{eff}} = \sum a_i C_i$$

2.2.7　Bethe-Bloch の式の適用範囲

$\beta \lesssim 0.1$ の素粒子から α 線までなら，Bethe-Bloch のしきは誤差数%．charge-dependent correction を加えると，$Z \simeq 26$ まで適用可能．$\beta \lesssim 0.05$ では，Bethe-Bloch の式は有効でなくなる．重い粒子についても，電子捕獲の影響でやはり有効でない．$\beta \lesssim 0.01$ では Lindhard の理論で記述できる．

入射粒子のほう!



2.2.8　Channeling

結晶への入射の場合，対称な面から測った入射角が臨界角

$$\phi_c = \frac{\sqrt{zZa_0Ad}}{1670\beta\sqrt{\gamma}}$$

より小さくなると，Channeling が起こってエネルギー損失が小さくなる．結晶に入射させるときには結晶の向きに気をつける．

2.2.9 Range

粒子が運動エネルギーを失うまでに進む距離のこと．エネルギー損失は統計的な課程なので，同じエネルギーで入射した粒子でも range には統計的なゆらぎが現れる．平均を mean range という．（あるエネルギーの）全粒子が吸収される厚み (extrapolated range) は，透過率が 0.5 で接線を引いて，zero-level との交点の厚み．

理論的には運動エネルギー T_0 で入射した粒子の mean range は

$$S(T_0) = \int_0^{T_0} dE \left(\frac{dE}{dx}\right)^{-1}$$

※ Coulomb 散乱でのジグザグな運動は考えていないので，実際の range はこれより小さい（重い粒子ではこの効果は小さい）．

実践では，Bethe-Bloch の式が有効な範囲とそうでない範囲に分離する．

$$R(T_0) = R_0(T_{\min}) + \int_{T_{\min}}^{T_0} dE \left(\frac{dE}{dx}\right)^{-1}$$

$R_0(T_0)$ は実験的，経験的に決める．

range とエネルギーの関係は log-log スケールでほぼ線形で，$R \propto E^b$ と書ける．大雑把に考えると，それほどエネルギーが高くなければエネルギー損失は β^{-2} に比例する．また，この範囲で $T \propto \beta^2$ と書けるので，range はエネルギーの 1 乗を積分することで，$b = 2$ を得る．※より正確な計算では $b = 1.75$ となり，それほど悪くはない．

range とエネルギーの関係は粒子のエネルギーを測る為に使える．また，検出器の大きさを決める為にも使われる．

$\frac{dE}{dx}$ のスケーリング則より，同じ物質に異なる粒子が入射したとき

$$\begin{aligned}
R_2(T_2) &= \frac{z_1^2}{z_2^2} \int_0^{T_2} dE \left[\frac{dE_1}{dx}\left(T_2 \frac{M_1}{M_2}\right)\right]^{-1} \\
&= \frac{M_2}{M_1}\frac{z_1^2}{z_2^2} \int_0^{T_2 \frac{M_1}{M_2}} dE \left[\frac{dE_1}{dx}(E)\right]^{-1} \\
&= \frac{M_2}{M_1}\frac{z_1^2}{z_2^2} R_1\left(T_2 \frac{M_1}{M_2}\right)
\end{aligned}$$

同じ粒子が異なる物質に入射したときは Bragg-Kleeman rule

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}}$$

化合物では荒く見積もって

$$R_{comp} = \frac{A_{comp}}{\sum \frac{a_i A_i}{R_i}}$$

π の場合
$\beta\gamma = 10$, $\tau = 26\,\mathrm{ns}$ $c = 3\times10^8$
よって、寿命は 78 m ぐらい

寿命で → $\beta\gamma c\tau$ 〜 平均距離

上の方では π だけで、
地上に届くころには μ になってる

静止 $m \to E = \gamma m$ $(c=1)$
$p = \gamma m \beta$ $E^2 = p^2 + m^2$

例 2.1

宇宙線由来のパイオンが 2cm のプラスチックシンチレータに入射したときの落とすエネルギーの平均

パイオンは高エネルギーなので，全てが minimum ionizing と思える．パイオンは $\beta \sim 0.96$ で minimum ionizing で，このとき約 300MeV である．プラスチックシンチレータはこのエネルギーで $\frac{dE}{dx} \sim 1.9\mathrm{MeVg^{-1}cm^2}$ でほぼ一定なので，落とすエネルギーは

$$\Delta E = 1.9 \times \underbrace{1.03}_{\text{プラシンの密度}} \times 2 = 3.9\mathrm{MeV}$$

となる．落とすエネルギーが予想できると，ヒストグラムでどこにピークが立つか予想できる．

例 2.2

銅に入射する 600MeV の proton が，400MeV までエネルギーを失うときの銅の厚さ

$$\Delta x = -\int_{600}^{400} dE \left(\frac{dE}{dx}\right)^{-1}$$

である．E を 400MeV から 600MeV まで区切って，積分を近似的に和にする．
結果，$\Delta x_{\mathrm{total}} = 105.73\mathrm{g\cdot cm^{-2}} = 11.88cm$ となる．

※実は，500MeV での値を用いて，前エネルギー幅 200MeV で掛けてもそんなに変わらない．

※実際は平均が 400MeV のガウス分布で得られるので，600MeV から 400MeV にエネルギーを減らす働きを期待するならば磁場などを使って 400MeV の粒子を選択する必要がある．

p →

pを α 粒子にかえると?

↳ (スケーリング則?)

$R_\alpha(T_\alpha) = \frac{4}{1}\cdot\frac{1}{4} R_p\left(\frac{1}{4}T_\alpha\right)$ $T_\alpha = 600$

$R_\alpha(T_\alpha) = R_p(150)$
$= 20\,\mathrm{g/cm^2}$

$\frac{20}{8.96} = 2.2\,\mathrm{cm}$ ぐらい

担当：土居

① 可視光
$\lambda = 400 \sim 7?\,nm$
青 ← → 赤

2.3 チェレンコフ放射

チェレンコフ放射は、物質中での荷電粒子が同じ物質中での光速を超えて運動する時に起こる。

物質中での光速vは

$$v = \beta_c c = \frac{c}{n} \quad \cdots (2.55)$$

$\left(\beta_c = \frac{v}{c}\right.$, n：屈折率, c：真空中での光速$\left.\right)$

$v_{particle}$ を物質中での荷電粒子の速さとすると、

$$v_{particle} > \frac{c}{n} \quad \cdots (2.56)$$

を満たしたとき、チェレンコフ放射が起こる。

チェレンコフ光の波面は図2.9のようになっていて、粒子の軌道に対して角度θ_cで放射される。

$$\cos\theta_c = \frac{1}{\beta n(\omega)} \quad \cdots (2.57)$$

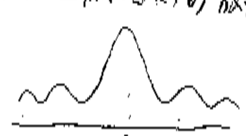
屈折率がωに依存するので、$\theta_c = \theta_c(v, \omega)$ に注意。

ここまでは、無限に続く物質中を通る時に正しい。

しかし、実際は粒子は有限の厚さの物質を通る。この場合のチェレンコフ放射の振動数依存性と角度分布を計算するのは古典的電磁気学を用いる。（[2.1]のChap.14）← 詳しいらしい。

厚さLの平板を一様に直進している電荷Zeの粒子の角振動数当たり、立体角当たりの放射されるエネルギーは

$$\frac{d^2E}{d\omega d\Omega} = z^2 \frac{\alpha\hbar}{c} n \beta^2 \sin^2\theta \left| \frac{\omega L}{2\pi\beta c} \frac{\sin\xi(\theta)}{\xi(\theta)} \right|^2 \quad \cdots (2.58)$$



θ_c

α：微細構造定数, n：屈折率

$$\xi(\theta) = \frac{\omega L}{2\beta c}(1 - \beta n \cos\theta) \quad \cdots (2.59)$$

$\left(\cos\theta_c = \frac{1}{\beta n}\right)$

$\frac{\sin\xi}{\xi}$ はフラウンホーファー回折を表すものとして理解できる。

チェレンコフ放射の角分布は、フラウンホーファー回折に似ており、$\cos\theta = \frac{1}{\beta n}$ の角度θを中心に大きなピークがある。

Lが放射光の波長よりも十分大きいとき、$\frac{\sin\xi}{\xi}$ の項は $\delta(1 - \beta n \cos\theta)$ となる。

この事は式(2.57)と矛盾しない。チェレンコフ放射の起こる条件式(2.56)は、θ_cが物理的に意味をもつような条件であると理解できる。

こうして、結局上の簡単なチェレンコフ放射の描像を取り戻す事ができる。

しかし、Lが小さいとき、ピークの幅が広がる。

式(2.58) を立体角積分して、(Lは$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$よりも大きいとしている) ②

$$-\frac{dE}{d\omega} = z^2\frac{\alpha\hbar}{c}\omega L\sin^2\theta_c \quad \cdots (2.60)$$

$\leftarrow \left(\frac{\sin \lambda x}{x}\right)^2 \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \pi\lambda\delta(x)$ を使う。

両辺Lで割って$L\to dx$として、ωで積分すると、

$$-\frac{dE}{dx} = z^2\frac{\alpha\hbar}{c}\int d\omega\, \omega\sin^2\theta_c = z^2\frac{\alpha\hbar}{c}\int d\omega\,\omega\left(1-\frac{1}{\beta^2 n(\omega)^2}\right) \quad \cdots (2.61)$$

積分区間は$\beta > \frac{1}{n(\omega)}$が成立する$\omega$。

式(2.61)より、βが大きいとエネルギー損失は大きくなる(積分区間が増えるから)

しかし、相対論的エネルギーにおいてさえ、この損失は衝突による損失より小さい。

実際、凝集体(固体)に対して、放射されるエネルギーは10^{-3} MeV cm^{2}g^{-1}のオーダーでしかない。

これは衝突によるエネルギー損失に比べて無視できる。

H_2やHeのようなガスに対しては、少し高くなって、0.01〜0.2 MeV cm^{2}g^{-1}であるが、まだかなり小さい。

正確な$\frac{dE}{dx}$の計算公式を作る時に、チェレンコフ放射のエネルギー損失が考慮に含まれている。

実際、Bethe-Blochの式(2.27)にすでに含まれている。

○ 利用

チェレンコフ放射について重要な事は、チェレンコフ放射が測定に利用されているという事である。(チェレンコフカウンター)

チェレンコフカウンターによって、粒子の速さを(最も)正確に測定できて、高エネルギー物理実験で広く使われる。

検出器の設計のために、放射された光子の数が知りたい。

(2.60)の両辺を$\hbar\omega\times L$で割って、$\frac{E}{\hbar\omega} = N$(光子の数)、$L\to dx$とすると、

$$-\frac{d^2N}{d\omega dx} = \frac{z^2\alpha}{c}\sin^2\theta_c = \frac{z^2\alpha}{c}\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \quad \cdots (2.62)$$

$d\omega$を$d\lambda$に変えて、

$$\frac{d^2N}{d\lambda dx} = \frac{2\pi z^2\alpha}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \quad \cdots (2.63)$$

ほとんどのチェレンコフ検出器では、チェレンコフ光の光子を電気信号に変えて検出する。(Chap. 8)

検出できる波長は典型的なもので、350 nm 〜 550 nm なので、(2.63)をλで積分して、

← チェレンコフ光というか photocathodeのほう

$$\frac{dN}{dx} = 475\, z^2\sin^2\theta_c \ \ \text{photons/cm} \quad \cdots (2.64)$$

見てわかるように、これは大きくない。

チェレンコフ放射の話はここまで。

2.4 電子(e^-)と陽電子(e^+)のエネルギー損失

重い荷電粒子と同様に、e^-もe^+も物質中を通る時に衝突によるエネルギー損失をする。
しかし、e^-とe^+は質量が小さいので、原子核の作る電場の影響で電磁波を放射する効果も考慮に入れる。
古典的には、電子が原子核に引き付けられて、電子の軌道からそれる向きに
加速度が生じて電磁波を放射すると理解できる。 (制動放射)

e^-とe^+のエネルギー損失は2つの部分に分けられる。

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{coll} \quad \cdots (2.65)$$

2.4.1 衝突によるエネルギー損失

e^-やe^+に対して、2つの理由からBethe-Blochの式を修正しなければならない。

1つ目：質量が小さいので、「入射粒子の軌道は直線からそれない」という仮定が成立しなくなる。

2つ目：電子同士の散乱は同種粒子の散乱なので、粒子の区別ができない事を考慮に入れる。

これらの考察により、公式の項の数が変わり、特にエネルギー移行の最大値 W_{max} は $W_{max} = \frac{T_e}{2}$ となる。
(T_e: 入射e^-, e^+の運動エネルギー)

結局、修正されたBethe-Blochの式は、

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A}\frac{1}{\beta^2}\left[\ln\frac{\tau^2(\tau+2)}{2(I/m_e c^2)^2} + F(\tau) - \delta - 2\frac{C}{Z}\right] \quad \cdots (2.66)$$

τ: $m_e c^2$を単位とした運動エネルギー ($\tau = \frac{T_e}{m_e c^2}$)

$$\begin{cases} F(\tau) = 1 - \beta^2 + \dfrac{\frac{\tau^2}{8} - (2\tau+1)\ln 2}{(\tau+1)^2} & \text{—— for } e^- \\ F(\tau) = 2\ln 2 - \dfrac{\beta^2}{12}\left(23 + \dfrac{14}{\tau+2} + \dfrac{10}{(\tau+2)^2} + \dfrac{4}{(\tau+2)^3}\right) & \text{—— for } e^+ \end{cases}$$

2.4.2 放射によるエネルギー損失：制動放射

数百GeV以下でエネルギー損失のほとんどが放射によるエネルギー損失となる事があるのはe^-とe^+しかない。
これは(後に示される)制動放射の断面積を見ればすぐにわかる。
放射の確率は、粒子の質量の2乗で変化する。つまり、$\sigma \propto r_e^2 = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2$ decrease
電子の次に軽いμ粒子($m_\mu = 106$ MeV)のエネルギー損失は、電子のそれより40000倍も小さい。
制動放射は電子が受ける電場の強さによるので、原子核のまわりの電子による、原子核のつくる電場の遮蔽量が重要となる。
その遮蔽の効果は、

$$\xi = \frac{100\, m_e c^2 h\nu}{E_0 E Z^{1/3}} \quad : 無次元 \quad \cdots (2.67)$$

というパラメータで表される。E_0: $e^-(e^+)$の最初の全エネルギー, E: 最終的な全エネルギー, $h\nu$: 放射される光子のエネルギー($h\nu = E - E_0$)
パラメータξは、トーマスフェルミ原子の半径に関係していて、

$$\left.\begin{array}{l} \text{小さい}(\xi \simeq 0)\text{ときは、完全に遮蔽されていて、} \\ \text{大きい}(\xi \gg 1)\text{ときは、全く遮蔽されていない} \end{array}\right\} \text{事を表す。}$$

数MeVよりも大きい相対論的エネルギーでは、制動放射の断面積は[2,12]に与えられていて、

$$d\sigma = 4Z^2 r_e^2 \alpha \frac{d\nu}{\nu}\left\{(1+\varepsilon^2)\left[\frac{\phi_1(\xi)}{4} - \frac{1}{3}\ln Z - f(Z)\right] - \frac{2}{3}\varepsilon\left[\frac{\phi_2(\xi)}{4} - \frac{1}{3}\ln Z - f(Z)\right]\right\} \quad \cdots (2.68)$$

である。$\varepsilon = \frac{E}{E_0}$, $\alpha = \frac{1}{137}$, $f(Z)$：クーロン補正, $\phi_1(\xi), \phi_2(\xi)$：ξに依存する遮蔽関数

この公式はボルン近似より計算されていて、低エネルギーでは正しくない。

$Z \geq 5$の軽くない元素について、ϕ_1とϕ_2が通常トーマスフェルミモデルで数値的に計算され、0.5%の精度で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}
\phi_1(\xi) &= 20.863 - 2\ln\left[1+(0.55846\xi)^2\right] - 4\left[1-0.6e^{-0.9\xi} - 0.4e^{-1.5\xi}\right] \\
\phi_2(\xi) &= \phi_1(\xi) - \frac{2}{3}(1+6.5\xi+6\xi^2)^{-1} \\
&\xi \to 0 \text{ で } \phi_1(0) = \phi_2(0) + \frac{2}{3} = 4\ln 183 \\
&\xi \to \infty \text{ で } \phi_1(\infty) = \phi_2(\infty) \to 19.19 - 4\ln\xi
\end{aligned}\right\} \quad (2.69)$$

関数$f(Z)$はBorn近似の小さな補正で、原子核の電場の中の電子のクーロン相互作用を説明する。
公式としては、[2.14]より、

$$f(Z) \simeq a^2\left[(1+a^2)^{-1} + 0.20206 - 0.0369a^2 + 0.0083a^4 - 0.002a^6\right] \quad \cdots (2.70)$$

$$\left(a = \frac{Z}{137}\right)$$

以上より、全く遮蔽されていないとき($\xi \gg 1$)

$$d\sigma = 4Z^2 r_e^2 \alpha \frac{d\nu}{\nu}\left(1+\varepsilon^2 - \frac{2\varepsilon}{3}\right)\left[\ln\frac{2E_0 E}{m_e c^2 h\nu} - \frac{1}{2} - f(Z)\right] \quad \cdots (2.71)$$

完全に遮蔽されているとき($\xi \simeq 0$)

$$d\sigma = 4Z^2 r_e^2 \alpha \frac{d\nu}{\nu}\left\{\left(1+\varepsilon^2 - \frac{2\varepsilon}{3}\right)\left[\ln(183Z^{-1/3}) - f(Z)\right] + \frac{\varepsilon}{9}\right\} \quad \cdots (2.72)$$

放射によるエネルギー損失を計算するために、(断面積)×(光子のエネルギー)を許されたνの範囲で積分して、

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = N\int_0^{\nu_0} h\nu \frac{d\sigma}{d\nu}(E_0,\nu)\,d\nu \quad \cdots (2.73)$$

$N = \frac{\rho N_A}{A}$：原子密度 [個/cm³], $\nu_0 = \frac{E_0}{h}$

(2.73)を書きかえて、

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = NE_0\Phi_{rad}, \quad \Phi_{rad} = \frac{1}{E_0}\int_0^{\nu_0} h\nu \frac{d\sigma}{d\nu}(E_0,\nu)\,d\nu \quad \cdots (2.74)$$

$\frac{d\sigma}{d\nu} \propto \nu^{-1}$なので、$\Phi_{rad}$は$\nu$に依存せず、物質のパラメータのみに依存する。

$m_ec^2 \ll E_0 \ll 137 m_ec^2 Z^{-1/3}$, $\xi \gg 1$ のとき（遮蔽されていない）

$$\Phi_{rad} = 4Z^2 r_e^2 \alpha \left(\ln\frac{2E_0}{m_ec^2} - \frac{1}{3} - f(Z) \right) \quad \cdots (2.75)$$

$E_0 \gg 137 m_ec^2 Z^{-1/3}$, $\xi \simeq 0$ のとき（完全に遮蔽されている）

$$\Phi_{rad} = 4Z^2 r_e^2 \alpha \left[\ln(183 Z^{-1/3}) + \frac{1}{18} - f(Z) \right] \quad \cdots (2.76)$$

どちらでもない ξ の値に対しては、(2.73)式を数値計算によって積分を実行する。

図2.10で衝突によるエネルギー損失と放射によるエネルギー損失の比較が行われている。
衝突によるエネルギー損失は、エネルギーに対して対数関数的に、Z に対して一次関数的に変化していて、
放射によるエネルギー損失は、エネルギーに対して一次関数的に、Z に対して二次関数的に変化している。
後者の急激な上昇は図2.10よりよくわかる。
また、衝エネルギーは準連続的に変化するが、ほぼ全ての放射エネルギーは1つか2つの光子の放出によるものである。
よって、単一エネルギービームを用いて実験しても、大きな変動が観測される。

2.4.3 $e^- - e^-$ 制動放射

上の公式では、原子核の電場による放射に対する平均エネルギー損失を表しているが、　　核 − e^-　Z^2
原子の電子による制動放射の寄与もある。　　$e^- - e^-$　Z
これについては多くの人に考えられていて、上の公式の Z^2 を Z におきかえれば $e^- - e^-$ 制動放射の断面積が得られる。

2.4.4 臨界エネルギー

放射によるエネルギー損失は吸収する物質に強く依存している事を見てきた。
それぞれの物質に対して、臨界エネルギー E_c を、
　　$E = E_c$ で放射によるエネルギー損失と衝突によるエネルギー損失が等しくなるようなエネルギー
として定義できる。
つまり、

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{coll} \quad \text{for } E = E_c \quad \cdots (2.77)$$

$E > E_c$ で放射によるエネルギー損失が支配的に、$E < E_c$ で衝突によるエネルギー損失が支配的になる。
E_c の近似式が [2.15] で与えられている。

$$E_c \simeq \frac{800\,\mathrm{MeV}}{Z + 1.2} \quad \cdots (2.78)$$

表2.2に様々な物質の E_c が示されている。

2.4.5 Radiation length～2.5 Multiple Coulomb scattaring

中塚徳継

16 May 2011

1 2.4.5.Radiation length 放射長

(2.74) 式から、制動放射によるエネルギー損失に関する微分方程式、

$$-\frac{dE}{E} = N\Phi_{\mathrm{rad}}dx \cdots (2.79)$$

(ただし、$N =$ 原子数/cm$^3 = \rho N_a/A$) が得られる。衝突によるエネルギーロスが制動放射によるエネルギーロスよりも小さく、無視できるとしよう。
(Φ_{rad} が E に依存しない) すると (2.79) は簡単に解けて、

$$E = E_0 \exp\left(\frac{-x}{L_{\mathrm{rad}}}\right) \cdots (2.80)$$

ただし、$L_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{N\Phi_{\mathrm{rad}}}$ で、L_{rad} を Radiation length という。(2.76) 式を使って Φ_{rad} を書き直すと、

$$\frac{1}{L_{\mathrm{rad}}} \approx \left(4Z(Z+1)\frac{\rho N_a}{A}\right) r_e^2 \alpha (\ln(183Z^{-1/3} - f(Z)) \cdots (2.81)$$

この式は殻電子-ビーム電子間の制動放射を含み、小さな定数項は無視している。radiation length の具体的な値→ Table(2.3.)
手っ取り早く計算できる使いやすい近似式は以下で与えられる。

$$L_{\mathrm{rad}} = \frac{716.4\mathrm{g/cm}^2 A}{Z(Z+1)\ln(287/\sqrt{Z})} \cdots (2.82)$$

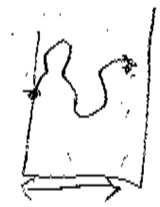
この式はヘリウム以外は誤差 2.5 %以内の精度がある。
radiation length を単位として物質の厚さを測ると便利である。(2.74) 式は、以下のように書き換えられる。

$$-\frac{dE}{dt} \approx E_0 \cdots (2.83)$$

(ただし、t は radiation length を単位とした長さ)
化合物や混合物質に関しては、以下の式が成立する。

$$\frac{1}{L_{\mathrm{rad}}} = w_1\left(\frac{1}{L_{\mathrm{rad}}}\right)_1 + w_2\left(\frac{1}{L_{\mathrm{rad}}}\right)_2 + \cdots, \cdots (2.84)$$

(ただし、$w_1 \cdots$ は (2.39) で定義される量)



Range

2 2.4.6.Range of Electrons

電子は原子核による Multiple 散乱を受けやすいため、電子のレンジは dE/dx を積分して求めた値とは大きく異なる。(20-400 %)
さらに、重い元素になると、電子によるエネルギーロスが大きく変動する。(より大きなエネルギー移行が可能なため) いずれにせよ、ごく少数回の衝突でビーム電子がほぼエネルギーを失うことがありうるため、range straggling が大きくなる。
number-distance curves → Fig(2.11.) range-energy curves → Fig(2.12.)

ストンとおちるんじゃなくて
ゆるくおちていくが
ストラグリング

3 2.4.7.The Absorptrion of β Electrons

β 崩壊による電子は連続的なエネルギースペクトルをもつため、β 線の吸収は指数関数でよく近似できる。Fig(2.13.)

$$I = I_0 \exp(-\mu x)$$

この μ は β 線吸収係数と呼ばれ、β 線のエンドポイントエネルギーと直接関係する。そのため、β 線のエンドポイントエネルギーを測ったり、薄い膜の厚さを測るのに使われた。ただし、指数関数でよく近似できるのは単純な許容遷移の場合のみで、複雑な禁止遷移のときにはずれてしまう。

多重散乱 ← ここから電子に限らず一般の話になる。

4 2.5.Multiple Coulomb scattering

クーロン

荷電粒子が物質を通過すると、殻電子と非弾性散乱するだけではなく、確率は下がるものの繰り返し弾性 Coulomb 散乱を起こす。スピン効果とスクリーニングを無視した 1 つ 1 つの散乱過程は Rutherford 散乱の式で与えられる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = z_2^2 z_1^2 r_e^2 \frac{(m_e c/\beta p)^2}{4\sin^4(\theta/2)} \cdots (2.86)$$

ランダムウォークみたいにして、中央値は0の方だけど分布が広くなる。

散乱は $1/sin^4(\theta/2)$ に依存するため、大多数のビーム粒子はごく小さな角度に散乱される。従って、ビーム粒子は物質中のランダムなジグザグ経路を通過する。しかし、小さな角度の散乱が積み重なって、正味の散乱が起こる。物質中の Coulomb 散乱の取り扱いは 3 つの場合に分かれる。
1)Single 散乱; ターゲットが十分薄く、複数 Coulomb 散乱の確率が無視できるとき。→ (2.86) で OK
2)Plural 散乱; 平均散乱回数が 20 回以下の場合。扱いが難しく、この本では取り扱わない。
3)Multiple 散乱; 平均散乱回数が 20 回以上の場合。統計的に扱え、しかも最もよくあるケースである。以下ではこの場合を扱う。
一般に、Multiple 散乱の厳密な計算は恐ろしく複雑で、洗練度に応じていくつかのレベルの方法と式が存在する。その中でも最も良く使われるのが、Moliere と、Snyder,Scott のそれぞれによる (2 つの) 小角度近似である。この 2 つの方法は本質的に等価で、あらゆる粒子で散乱角 30° まで一般に有効であることが実証されている。ただし、遅い電子と重元素中の電子では有効ではない。
Moliere は角度分布を級数で以下のように与えた。

$$P(\theta)d\Omega = \eta d\eta \left(2\exp(-\eta^2) + \frac{F_1(\eta)}{B} + \frac{F_2(\eta)}{B^2} + \cdots \right) \cdots (2.87)$$

(ただし、$\eta = \theta/(\theta_1\sqrt{B})$、$\theta_1 = 0.3965(zQ/p\beta)\sqrt{(\rho\delta x/A)}$)
(B は $g(B) = \ln B - B + \ln\gamma - 0.154$ のゼロ点、$\gamma = 8.831 \times 10^3 \frac{qz^2\rho\delta x}{\beta^2 A\Delta}$、$\Delta \simeq 1.13 + 3.76\left(\frac{Zz}{137\beta}\right)^2$)
($F_k(\eta) = \frac{1}{k!}\int J_0(\eta\gamma)\exp\left(\frac{-y^2}{4}\right)\left(\frac{y^2}{4}\ln\left(\frac{y^2}{4}\right)\right) ydy$、$J_0$ は Bessel 関数)
(各記号は、Z:陽子数,A:質量数,δx:ターゲット厚さ [cm],ρ:ターゲット密度 [g/cm^3],p:ビーム粒子の運動量 [MeV/c],z:粒子の電荷 [素電荷])
($Q = \sqrt{Z(Z+1)}$for 電子陽電子,$= Z$ for 他の粒子)
($q \simeq (Z+1)Z^{1/3}$for 電子陽電子, $= Z^{4/3}$ for 他の粒子)
ほとんどの場合は (2.87) 式にある 3 項で十分である。

実験ゼミ

2011年 5月16日

前田 担当

2.5.1 Multiple Scattering のガウス近似

大きな角度の散乱が起こる確率は低いので、これを無視すれば

小さな角への1粒子による散乱の考え方を、多粒子の場合に適用できる。

すなわち、ガウス分布で近似できる。

$$P(\theta) \approx \frac{2\theta}{\langle\theta^2\rangle} \exp\left(\frac{-\theta^2}{\langle\theta^2\rangle}\right) d\theta$$

$$\langle\theta^2\rangle = \int_0^\infty \theta^2 P(\theta)\, d\Omega$$

$\sqrt{\langle\theta^2\rangle}$: rms scattering angle

→ root-mean-square : 二乗平均の平方根

テキスト(2.87)式 と比較して、

$\sqrt{\langle\theta^2\rangle} \approx \theta_1 \sqrt{B}$ (ただ、moliere の分布は、θの大きな範囲まで広がっており、式の項をすべて考慮に入れると、$\sqrt{\langle\theta^2\rangle}$ は無限大となる。)

であるが、実際の測定に基づいた式は以下の通り。

$$\langle\theta^2\rangle = 2\frac{\chi_c^2}{1+F^2}\left[\frac{1+v}{v}\ln(1+v) - 1\right] \quad (\mathrm{rad}^2)$$

$$v = 0.5\frac{\Omega}{1-F}, \quad \Omega = \chi_c^2/\chi_a^2$$

$$\chi_c^2 = 0.157z\left(\frac{Z(Z+1)}{A}\right)\frac{x}{p^2\beta^2}, \quad \chi_a^2 = 2.007\times10^{-5} Z^{2/3}\left[1+3.34(Zz\alpha/\beta)^2\right]/p^2$$

p : 運動量 [MeV/c] , x : path length [g/cm²] , z : 入射粒子の電荷

Z, A : 散乱物の原子番号、質量数 , α : 微細構造定数 ≒ 1/137

F : moliere distribution を考慮した値 ($F<1$)

Ω は散乱する粒子の平均の数で解釈される。

F が 90% ~ 99.5% , $10 < \Omega < 10^8$ ならば、この式は誤差2%以内で

実験値で一致する。

テキストの図2.15において、実際に$\langle\theta^2\rangle$を求めると。（図2.15は、薄い金箔で15.7 MeVの電子を散乱させたときの実験結果）

$$\langle\theta^2\rangle=\begin{cases}0.0023\ \mathrm{rad}^2 & x=18.66\ \mathrm{mg/cm^2}\\ 0.0051\ \mathrm{rad}^2, & x=37.28\ \mathrm{mg/cm^2}\end{cases}$$

∴ 標準偏差 $\sigma=\sqrt{\langle\theta^2\rangle/2}$ より。 $\sigma=\begin{cases}1.94^\circ\\ 2.89^\circ\end{cases}$

テキスト図2.14のように、粒子の入射方向の直線を含む平面を考え、
散乱角θをその平面上に投射した角をθ_xとする。
θ_xをθのかわりに用いると便利なことがある。
先ほどのガウス分布の式をθ_xで書き直すと、

$$P(\theta_x)\,d\theta_x=(2\pi\langle\theta_x^2\rangle)^{-1/2}\exp\left(\frac{-\theta_x^2}{2\langle\theta_x^2\rangle}\right)d\theta_x$$

となる。ここで、$\langle\theta_x^2\rangle=\langle\theta^2\rangle/2$ である。

粒子の側方変位rは非常に小さいが、rを用いてPをあらわすと、

$$P(r)\,dr=6r(\langle\theta^2\rangle t^2)^{-1}\exp\left(\frac{-3r^2}{\langle\theta^2\rangle t^2}\right)dr$$

r：変位，　$t=x/L_{rad}$：thickness in radiation length　（L_{rad}はたまたまでてきただけであり、式を見やすくするために用いているだけで、多粒子の散乱とは特に関係がない）

$$\langle r^2\rangle=\langle\theta^2\rangle t^2/3$$

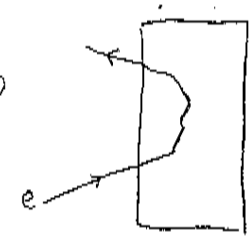
となる。

2.5.2 低エネルギー電子の後方散乱

電子は質量が小さいため、散乱角が大きくなりやすい
そのため、多数の粒子によって散乱されると、粒子が入射した側と同じ側から出てしまうこともある。(テキスト図2.16参照) ←後方散乱
この傾向は、電子のエネルギーが低いほど大きく、散乱を起こす物質の原子番号が増えるにつれ大きくなる。

入射粒子の数に対する、後方散乱粒子の数の比を、後方散乱係数、またはアルベド(反射能)とよぶ。

電子が物質に対し斜めに入射した時ほど、後方散乱の割合は大きくなり、また後方散乱係数は入射粒子のエネルギーに依存する。



テキスト図2.17に、様々な物質における後方散乱係数のグラフが示されている。

2.6 エネルギー損失の分布

これまでは物質中を通過する荷電粒子の平均のエネルギー減少量をみてきたが、実際のエネルギー損失量は統計的な幅があり、分布関数として考えてやることができる。

実際は、ある一定の厚さの物質のもとでのエネルギー損失の変動を見るかわりに、
ある一定のエネルギー損失のもとでの、通過距離を観測する。(視点を変えただけで、考えていることは同じ)
散乱体の厚さによって場合分けして考える。

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$ ローレンツ変換

2.6.1 散乱体が厚い場合

散乱回数Nが、$N\to\infty$としてよいほど大きいとき、中心極限定理より、エネルギー損失の分布は、ガウス分布に従う。

$$f(x,\Delta)\propto \exp\left(\frac{-(\Delta-\bar{\Delta})^2}{2\sigma^2}\right)$$

x:散乱体の厚さ
Δ:エネルギー損失, $\bar{\Delta}$:エネルギー損失の平均
σ:標準偏差

実際の長さ

$$\sqrt{\overline{\theta^2}}$$

$$\theta_{rms}=\frac{13.6\,MeV}{\beta c p}z\sqrt{\frac{x}{X_0}}\left[1+0.038\ln\left(\frac{x}{X_0}\right)\right]$$

L_{rad}

$$10^{-3}<\frac{x}{X_0}<100$$

非相対論的なふるまいをする場合のσをσ₀とすると、

$$\sigma_0^2 = 4\pi N_a r_e^2 (m_e c^2)^2 \rho \frac{Z}{A} x \fallingdotseq 0.1569 \rho \frac{Z}{A} x \quad [\mathrm{MeV}^2]$$

（N_a：アボガドロ数、r_e, m_e：電子の古典的な半径と質量
ρ, Z, A：散乱体の密度、原子番号、質量数）

相対論的な場合

$$\sigma^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\beta^2\right)}{1-\beta^2} \sigma_0^2$$

2.6.2　散乱体が非常に厚い場合

上記の議論は、入射時の電子のエネルギーに比べてエネルギー損失が小さく、電子の速度変化が無視できるときに成り立つものである。
散乱体が非常に厚く、入射したときの電子の運動エネルギーが散乱体の内部でほとんど失われてしまう時、2.6.1の議論は成立しない。
→詳細は、Tschalar や Bichsel の論文にて。

2.6.3 散乱体が薄い場合

2.6.1の場合と異なり、Nが小さいため中心極限定理が使えない。
1度の散乱で大きなエネルギーを失うものや、制動放射により
エネルギー損失はかなり大きな領域まですそが広がる。→テキスト図2.18
そのためグラフは左右対称でなくなり、最頻値と平均値にずれが生じる。

このような状況でのエネルギー損失の分布について、
Landau, Symon, Vavilov により計算がなされた。
ただし、それぞれの式の適用範囲は異なる。→ $\kappa = \bar{\Delta}/W_{max}$ の値により区別。（W_{max}については テキスト(2.28)式参照）

$\bar{\Delta}$ について、Bethe-Blochの式を用いるのが便利。
おおよその値として第1項だけをとり、さらに対数の中身は無視して構わない。

$$\therefore \bar{\Delta} \simeq \xi = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A}\left(\frac{z}{\beta}\right)^2 x$$

散乱体が薄いと言われるのは $\kappa < 10$ の範囲だが、
およそ $\kappa > 1$ の領域で既に分布はガウシアンの形をとるようになる。→テキスト図2.19

◦ Landauの理論

$\kappa \leq 0.01$ の非常に薄い場合に適用される。

1) $W_{max} \to \infty$、つまり $\kappa \to 0$ と考える。
2) それぞれの電子のエネルギー移行量は十分大きい、小さなエネルギーの移行は無視。
3) 入射粒子は減速しない

以上の仮定を導入。

$$f(x, \Delta) = \phi(\lambda)/\xi$$

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(-u\ln u - u\lambda)\sin\pi u\, du$$

$$\lambda = \frac{1}{\xi}\{\Delta - \xi(\ln\xi - \ln\varepsilon + 1 - C)\}$$ ，Cはオイラー定数 $(=0.577\ldots)$

（$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とおき、$\lim_{n\to\infty}(A_n - \log n) = C$ なる定数。）

$$\ln\varepsilon = \ln\frac{(1-\beta^2)I^2}{2mc^2\beta^2} + \beta^2$$

εは、仮定2のもとで許される最小のエネルギー移行量

$\phi(\lambda)$は万能評価関数。

このときの $f(x, \Delta)$ 分布における、Δの最頻値 Δ_{mp} は、

$$\Delta_{mp} = \xi\left[\ln(\xi/\varepsilon) + 0.198 - \delta\right]$$ δは密度補正

◦ Symon と Vavilov の理論：中程度の値のKの領域について

上で述べたような、Landauによって説明されたKの領域と、ガウシアンによるフィッティングが適用されるKの領域の間の、2つの理論の境界部分となる中程度の大きさのKの領域について。

・LandauとSymonは、多くの巧妙な近似を作ることに成功したが、図としてしか表現することができない。

・Vavilovは、Landauの式において、エネルギー移行の許される最大値に補正を加えることで、分布を表現した。
テキスト図2.19は、Vavilovの式による計算結果である。

Vavilovは、

$$\sigma^2 = \frac{\xi^2}{\kappa}\frac{1-\beta^2}{2}$$

という変数を与えた。これは、テキスト(2.95)式で重い粒子の場合に相当する。
それぞれの式の比較が、テキスト図2.20にてなされている。

Landau と Vavilov の分布の補正

上記の式は、さまざまな人の手により補正が計算されている。(原子殻電子の影響など)

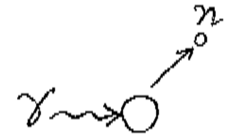
2.7 光子の相互作用

実験ゼミ
担当：河合
2011年5月23日

物質中の光子(X線, γ線)のふるまいは
荷電粒子とは全く異なる。← 光子には電荷がなく原子内電子とのほとんどの非弾性散乱が起きない

X線, γ線の主要な相互作用
① 光電効果
② コンプトン散乱
③ 電子・陽電子の対生成

・核の解離反応も起こるが、少ないので無視



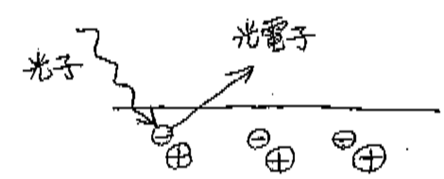
X線, γ線の2つの特徴を説明
1) X線, γ線は荷電粒子の何倍も透過力がある
∵ 電子の非弾性散乱の断面積より ①〜③の断面積が小さいから
2) 光子のビームエネルギーは減衰しない
減るのは Intensity (単位面積当り強度)のみ ← エネルギー変わらず光子の数が減る
∵ ①〜③の過程でビーム中の光子が取り除かれる or 吸収 or 散乱
真っすぐつき抜ける光子は相互作用しない
⟶ 最初のエネルギーを維持するが、光子の総数は減る

$$I(x) = I_0 \exp(-\mu x) \tag{2.101}$$

I_0 : 入射ビームの Intensity
x : 吸収物質の厚さ
μ : 吸収係数 … 吸収物質に依存, 全相互作用の断面積に直接関係
γ線検出器の議論でよく出る

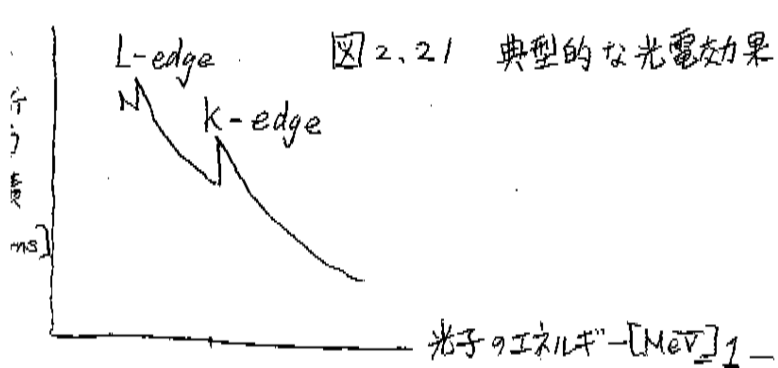
2.7.1 光電効果

〜 光子の全エネルギーを電子が吸収して光電子が飛び出す



飛び出す電子のエネルギー $E = h\nu - B.E.$ (束縛エネルギー binding energy) (2.102)
自由電子は光子の吸収をせず、運動量が保存
→ 光電効果は反跳運動量を受け取る原子核がある、束縛電子とのみ起こる.

図2.21 典型的な光電効果の断面積



・K殻の束縛エネルギーより大 → 断面積 小
・K殻の 〃 近くで 急増
・K殻の 〃 より小 ↓
K電子が飛び出せなくなってすとんと落ちる
K-edge

…子内電子 の Dirac の波動関数 が複雑なため、
光電効果を理論的に厳密に計算するのは難しい。
しかし、光子のエネルギー が K殻の B.E. より大きいとき、

ほとんどが K殻電子の寄与
非相対論的 ($h\nu \ll m_e c^2$)
→ ボルン近似で計算可

$$\Phi_{photo} = 4\alpha^2\sqrt{2}\, Z^5 \phi_0 (m_e c^2/h\nu)^{\frac{7}{2}} \quad [cm^2/atom] \qquad (2.103)$$

$$\phi_0 = \frac{8\pi r_e^2}{3} = 6.651\times 10^{-25}\, cm^2, \quad \alpha = \frac{1}{137}$$

K-edge 付近では (2.103) →

$$\Phi_{photo} = \phi_0 \frac{2^7\pi(137)^3}{Z^2}\left[\frac{\nu_k}{\nu}\right]^4 \frac{\exp(-4\xi\cot^{-1}\xi)}{1-\exp(-2\pi\xi)} \quad [cm^2/atom] \qquad (2.104)$$

$$h\nu_k = (Z-0.03)^2 m_e c^2 \alpha^2/2$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\nu_k}{\nu-\nu_k}}$$

$\nu \sim \nu_k$ のとき $\xi \gg 1$. (2.104) →

$$\Phi_{photo} = \frac{6.3\times 10^{-18}}{Z^2}\left(\frac{\nu_k}{\nu}\right)^{\frac{8}{3}} \qquad (2.105)$$

L殻, M殻については複雑なので Davisson [2.38] 参照

~ MeV (非相対論的でない) のとき 断面積 $\propto Z^4$ or Z^5 なので、
原子番号 Z が大きい物質では光電効果の影響が大きい
[illegible] → γ線検出器を選ぶとき重要 (後の chapter)

2.7.2 コンプトン散乱

光の粒子性を よく説明

自由電子と光子の散乱
↳ 物質中で電子は束縛されているが、光子のエネルギーが B.E. より十分高いと
B.E. は無視できて、電子は自由と考えられる。

エネルギー保存から

$$h\nu = h\nu' + \frac{1}{2}mv^2 \quad \cdots ①$$

運動量保存から

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\theta + mv\cos\varphi \quad \cdots ②$$

$$\frac{h}{\lambda'}\sin\theta - mv\sin\varphi = 0 \quad \cdots ③$$

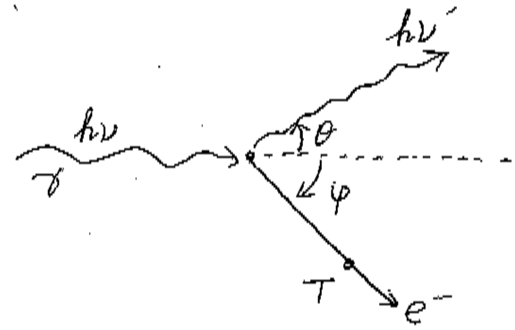


図 2.22 コンプトン散乱

②, ③で $\lambda' \simeq \lambda$ と近似し $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ より φ 消去 [illegible]

$$2(1-\cos\theta)\frac{h^2}{\lambda^2} = m^2v^2 \quad \cdots ④$$

$$① \Leftrightarrow \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)mhc = m^2v^2 = ④$$

$$\therefore \left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)mhc = (1-\cos\theta)\frac{h^2}{\lambda^2} \qquad \frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'} \simeq \frac{\lambda'-\lambda}{\lambda^2} \text{ より } \lambda'-\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

$$\underbrace{\frac{\lambda'\nu}{c}}_{\frac{\lambda'}{\lambda}} - \underbrace{\frac{\lambda\nu}{c}}_{1} = \underbrace{\frac{h\nu}{m c^2}}_{\gamma}(1-\cos\theta)$$

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1+\gamma(1-\cos\theta)} \xrightarrow{hc倍} h\nu' = \frac{h\nu}{1+\gamma(1-\cos\theta)} \quad etc.$$

①〜③より まとめると

$$\begin{cases} h\nu' = \dfrac{h\nu}{1+\gamma(1-\cos\theta)} \\ T = h\nu - h\nu' = h\nu\dfrac{\gamma(1-\cos\theta)}{1+\gamma(1-\cos\theta)} \\ \cos\theta = 1 - \dfrac{2}{(1+\gamma)^2\tan^2\varphi + 1} \\ \cot\varphi = (1+\gamma)\tan\dfrac{\theta}{2} \end{cases} \qquad (2.106)$$

, $\gamma \equiv \dfrac{h\nu}{m_e c^2}$

T：エネルギー移~~項~~行量

コンプトン散乱の断面積は量子電磁力学（QED）を用いて初めて計算されたものの1つ

クライン－仁科の公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2}\frac{1}{[1+\gamma(1-\cos\theta)]^2}\left(1+\cos^2\theta + \frac{\gamma^2(1-\cos\theta)^2}{1+\gamma(1-\cos\theta)}\right) \qquad (2.107)$$

r_e：古典的な電子半径

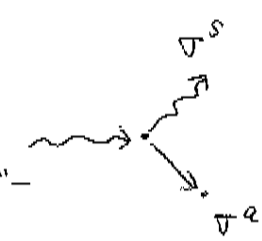
(2.107)を$d\Omega$で積分して、1個の電子当りコンプトン散乱が起こる全確率（断面積）

$$\sigma_c = 2\pi r_e^2\left\{\frac{1+\gamma}{\gamma^2}\left[\frac{2(1+\gamma)}{1+2\gamma} - \frac{1}{\gamma}\ln(1+2\gamma)\right] + \frac{1}{2\gamma}\ln(1+2\gamma) - \frac{1+3\gamma}{(1+2\gamma)^2}\right\} \quad (2.108)$$

$$\sigma_c = \sigma^s + \sigma^a \qquad (2.109)$$

σ^s: scatterd cross section　散乱した光子が持つエネルギー

σ^a: absorption cross section　反跳電子に移項したエネルギー



$$\frac{d\sigma^s}{d\Omega} = \frac{h\nu'}{h\nu}\frac{d\sigma}{d\Omega} \qquad (2.110)$$ ←（断面積）×（残った光子のエネルギーの割合）

積分すると

$$\sigma^s = \pi r_e^2\left[\frac{1}{\gamma^3}\ln(1+2\gamma) + \frac{2(1+\gamma)(2\gamma^2-2\gamma-1)}{\gamma^2(1+2\gamma)^2} + \frac{8\gamma^2}{3(1+2\gamma)^3}\right] \quad (2.111)$$

$$\sigma^a = \sigma_c - \sigma^s \qquad (2.112)$$

→ 図 2.23

検出器の議論に使える他の公式として、

コンプトン散乱の反跳電子のエネルギー分布 → 図 2.24

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{\pi r_e^2}{m_e c^2\gamma^2}\left[2 + \frac{s^2}{\gamma^2(1-s)^2} + \frac{s}{1-s}\left(s - \frac{2}{\gamma}\right)\right] \qquad (2.113)$$

$s = \dfrac{T}{h\nu}$

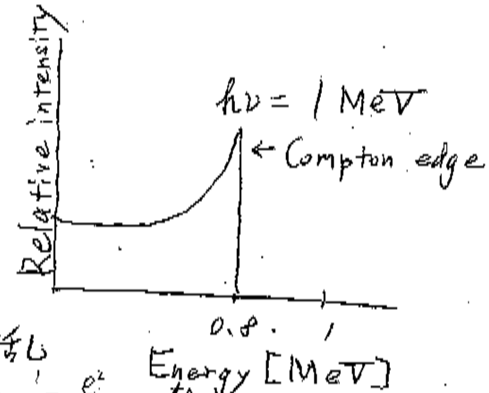
運動学的に許される最大反跳エネルギー

$$T_{max} = h\nu\left(\frac{2\gamma}{1+2\gamma}\right) \quad ((2.106)\text{ で }\cos\theta = -1) \quad (2.114)$$

を Compton edge　例、$h\nu = 1\,\mathrm{MeV}$ なら

$$\gamma = \frac{h\nu}{m_e c^2} = \frac{1}{0.511} \sim 2$$

$$T_{max} = \frac{4}{5} h\nu$$



トムソン，レイリー散乱　古典的

・トムソン散乱：古典的極限としての自由電子と光子の散乱

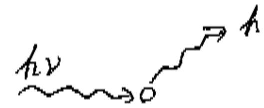
$h\nu \ll m_e c^2$ でクライン－仁科の公式に含まれる、$r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{mv^2}$ れ

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \qquad m\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \quad (2.115)$$

・レイリー散乱：原子全体と光子の散乱，コヒーレント散乱とも

これらはエネルギー移項がないので、

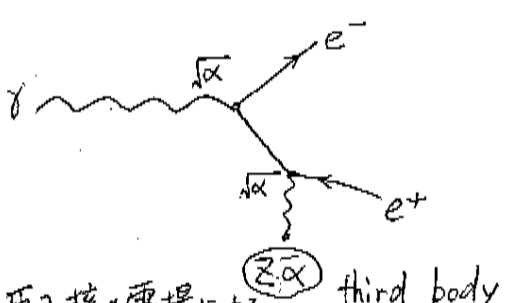
原子は励起もイオン化もせず、光子の向きが変わるだけ



相対論的高エネルギーのX線，γ線では、トムソン，レイリー散乱は無視できる。

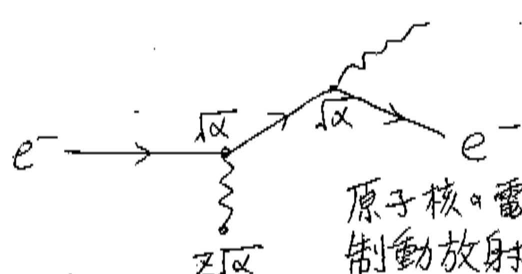
2.7.3 対生成

$$h\nu > 1.022\,\mathrm{MeV}$$



原子核の電場による e^-e^+ 対生成

理論的には制動放射と対生成は関係 → ξ に依存



原子核の電場による制動放射

(2.67)式より

$$\xi = \frac{100\, m_e c^2 h\nu}{E_+ E_- Z^{1/3}} \quad (2.116)$$

E_+：飛び出す陽電子の全エネルギー

E_-：　〃　電子　〃

極度に相対論的エネルギーかつ任意の遮へい → ボルン近似

$$d\tau = 4Z^2 r_e^2 \alpha \frac{dE_+}{(h\nu)^3}\left\{(E_+^2+E_-^2)\left[\frac{\phi_1(\xi)}{4} - \frac{1}{3}\ln Z - f(Z)\right] + \frac{2}{3}E_+E_-\left[\frac{\phi_2(\xi)}{4} - \frac{1}{3}\ln Z - f(Z)\right]\right\} \quad (2.117)$$

ϕ_1, ϕ_2：遮へい関数，他の変数 (2.69) (2.68) で定義

全く遮へいされてないとき ($\xi \gg 1$)

$$d\tau = 4Z^2\alpha r_e^2 dE_+ \frac{E_+^2+E_-^2+2E_+E_-/3}{(h\nu)^3}\left[\ln\frac{2E_+E_-}{h\nu\, m_e c^2} - \frac{1}{2} - f(Z)\right] \quad (2.118)$$

完全に遮へいされてるとき ($\xi \to 0$)

$$d\tau = 4Z^2\alpha r_e^2 \frac{dE_+}{(h\nu)^3}\left\{\left(E_+^2+E_-^2+\frac{2E_+E_-}{3}\right)\left[\ln(183Z^{-\frac{1}{3}}) - f(Z)\right] - \frac{E_+E_-}{9}\right\} \quad (2.119)$$

ボルン近似を用いるので $\left(\begin{array}{c} Z\text{が大きすぎる} \\ \text{or} \\ \text{低エネルギー} \end{array}\right)$ では正確でない。

低エネルギーや遮へいされないときの詳しい計算は [2.10] 参照

対生成の断面積を得るために数値積分する

・全く遮へいされないとき ($\xi \gg 1$) $m_e c^2 \ll h\nu \ll 137 m_e c^2 Z^{-\frac{1}{3}}$ のとき

$$\tau_{pair} = 4Z^2 \alpha r_e^2 \left[\frac{7}{9}\left(\ln\frac{2h\nu}{m_e c^2} - f(Z)\right) - \frac{109}{54}\right] \quad (2.120)$$

・同様に完全に遮へいされている ($\xi \to 0$)、$h\nu \gg 137 m_e c^2 Z^{-\frac{1}{3}}$ のとき

$$\tau_{pair} = 4Z^2 \alpha r_e^2 \left\{\frac{7}{9}\left[\ln(183 Z^{-\frac{1}{3}}) - f(Z)\right] - \frac{1}{54}\right\} \quad (2.121)$$

・他の場合 → (2.117) をそのまま数値積分

原子内電子の作る電場による対生成もある。断面積 Zだけ小さい

$Z^2 \to Z(Z+1)$ に置換

全断面積から対生成の平均自由行程 λ_{pair} を計算

$$\frac{1}{\lambda_{pair}} = N\tau_{pair} \cong \frac{7}{9} 4Z(Z+1) N r_e^2 \alpha \left[\ln(183 Z^{-\frac{1}{3}}) - f(Z)\right] \quad (2.122)$$

N: 原子密度 (個/cm³)、τ_{pair} (cm²/個)

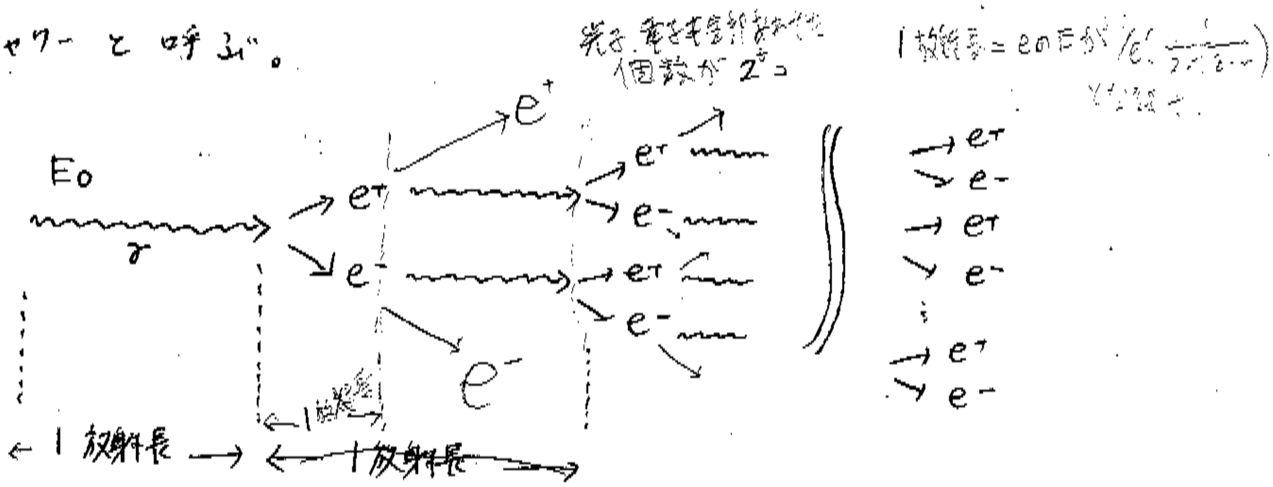
(2.81) との比較で

$$\lambda_{pair} \cong \frac{9}{7} L_{rad}$$

↑ 放射長

• 2.7.4 Electron - Photon Showers

高エネルギーの光子が物質に入ると、e^+e^- 対生成がおきる。生成した e^+e^- は制動放射によって光子を出し、再び e^+e^- 対生成がおき…、という過程が光子が対生成の臨界エネルギーを切るまで続く。これを、カスケードないし、シャワーと呼ぶ。



平均個数	2コ	4コ	2^t コ
平均エネルギー	$E_0/2$	$E_0/4$	$E_0/2^t$

☆ シャワーの広がり

シャワーの侵入長を評価してみる。臨界エネルギーを E_c とし、侵入の度合い t_{max} について解くと、

$$\frac{E_0}{2^{t_{max}}} = E_c \quad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{\log E_0/E_c}{\log 2}$$

たとえば $E_0 \to 100E_0$ で t_{max} …

ちなみに、このときの $e^+e^-+\gamma$ の最大の個数は　$N_{max} \simeq E_0/E_c$

正確な評価は、モンテカルロ・シミュレーションなどによって行う必要がある。

次に、シャワーの（進行方向に対する）横方向の広がりを考える。

よく用いられる指標として、モリエール半径がある。

$$R_M = L_{rad} \frac{E_s}{E_c}$$

where L_{rad} … 放射長

$E_s = \frac{m_e c^2}{\underset{511\,keV}{L}} \sqrt{[illegible]} \simeq 21.2\,MeV$

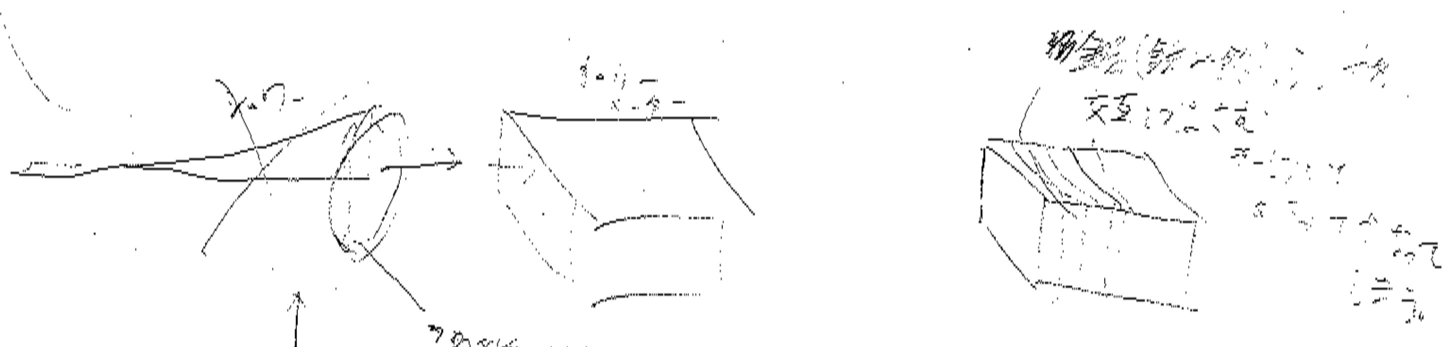
E_c … 臨界エネルギー

- モリエール半径は、ほぼ物質に依らない量となっている。
- L_{rad} 同様、化合物・混合物に対して、Bragg ルールが適用できる。
- 半径 $2R_M$ 以内に、全エネルギーの 90% が集中する。

☆ カロリーメーターへの応用

シャワーの分析は、カロリーメーターの設計には、決定的に重要。

(例) 鉄で 30 GeV のシャワーを吸収するには、20 放射長が必要。



※シャワーは円錐状に広がるわけでなく
モリエール半径は距離

2.7.5 The Total Absorbtion Coefficient and Photon Attenuation

1原子あたりの、全断面積は、各過程の和で与えられる。

$$\sigma = \sigma_{photo} + Z\sigma_{comp} + \sigma_{pair}$$

光電効果　　コンプトン　　対生成

Zは、1つの原子にある電子の数である。

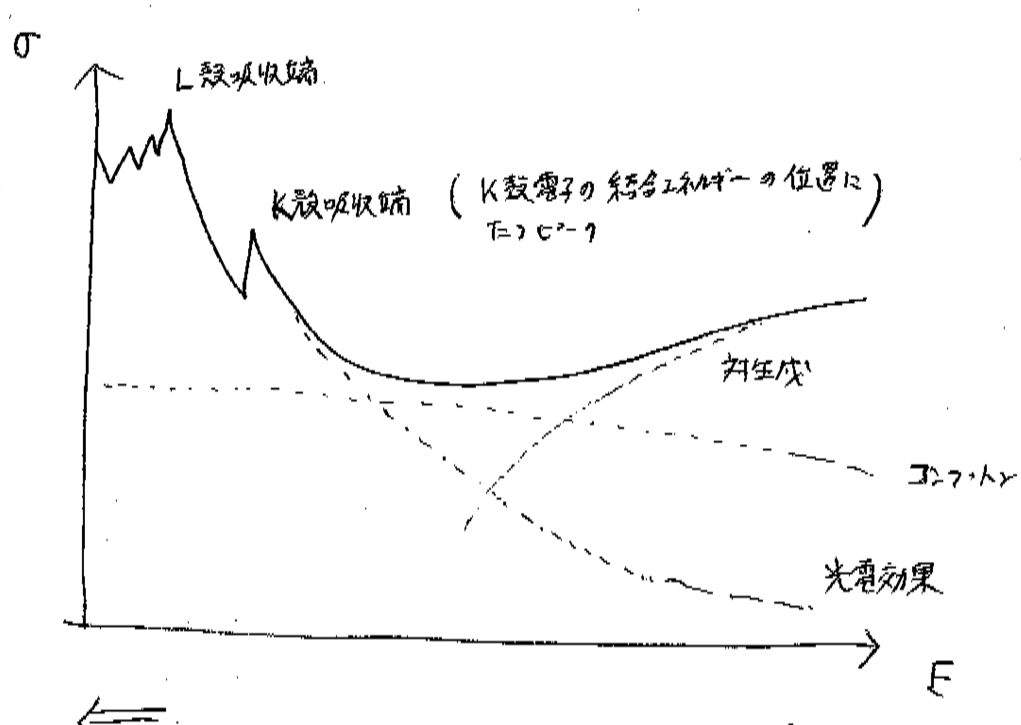
σと、原子の数密度Nの積を全吸収係数という

$$\mu \equiv \sigma N = \sigma\left(\frac{N_A \rho}{A}\right)$$

2.12より、(平均自由行程との関係は、)

$$I/I_0 = \exp(-\mu x)$$

だいじ



⟸ 光電効果が支配的　　⟹ 対生成が支配的

2.8 中性子の相互作用

電荷がないので、電磁相互作用はしない、核子の強い相互作用を受ける。
非常に透過力がある。

- 核子との反応の種類

(1) 弾性散乱　$A(n,n)A$

MeV 程度の中性子のエネルギー損失のメイン

非弾性になった

(2) 非弾性　$A(n,n')A^*$

1 MeV かそれ以上の中性子。原子核は励起され、崩壊する。

(3) 放射を伴う中性子捕獲　$n + (Z, A) \longrightarrow \gamma + (Z, A+1)$

断面積がだいたい $1/v$ ⇒ 低エネルギーで起こりやすい。

物質固有のピークも存在。

(4) その他の核反応

例：(n, p)　(中性子吸収 ⟶ 陽子放出)

eV, keV 程度で起こりやすい。断面積は $\sim 1/v$ で小さくなる。

物質に依る共鳴あり。

(5) 核分裂　(n, f)

熱中性子 ($\sim 1/40$ eV) で起こる。

(6) 高エネルギーでのハドロン生成。

100 MeV より大きい所で起こる。

- エネルギーによる呼び名。

極低温	熱中性子	高速	高エネルギー
meV, μeV	$1/40$ eV	数 MeV	100 MeV ~

全断面積 と 原子核密度から. 平均自由行程 は

$$\frac{1}{\lambda} = N\sigma_{tot} = \frac{N_A \rho}{A}\sigma_{tot}$$

物質を通り抜ける中性子の個数 は

$$N = N_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

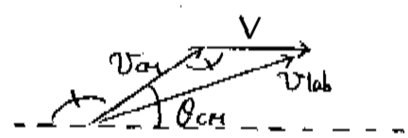
2.8.1 中性子の 減速 (moderation)

- 中性子は物質中で散乱をくり返し、熱的に ($\sim 1/40$ eV) というよりかは 核に吸収されるまで 減速する.
  $\longrightarrow$ 核に吸収されたり、核分裂等を引き起こしたりする.

- 高エネルギーでは弾性散乱によって主にエネルギーを失う.
  数 MeV の領域では. 非相対論的に考えてよい. ($m_n \simeq 940$ MeV)
  以後. 中性子の質量を単位とする.
  静止している原子核 (質量 $M=A$) に 速度 v_0 で 衝突するときを考える.

CM系では. $v_{CM} = \frac{A}{A+1}v_0$, $V = \frac{1}{A+1}v_0$

弾性衝突の後 の 中性子の速度 v_{lab} は.

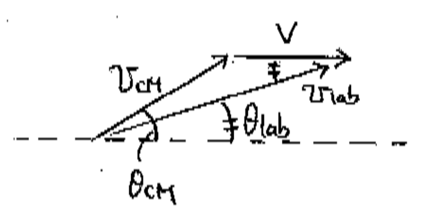


$$(v_{lab})^2 = (v_{CM})^2 + V^2 - 2v_{CM}V\cos(\pi - \theta_{CM})$$

ここから. 元のエネルギーと散乱後のエネルギーの比は

$$\frac{E}{E_0} = \frac{A^2+1+2A\cos\theta_{CM}}{(A+1)^2}$$

また. 散乱角の関係は.



$$(v_{CM})^2 = V^2 + (v_{lab})^2 - 2v_{lab}V\cos\theta_{lab}$$

より.

$$\cos\theta_{lab} = \frac{A\cos\theta_{CM}+1}{\sqrt{A^2+1+2A\cos\theta_{CM}}}$$

反跳した原子核については、速度 V_{lab} は

$$(V_{lab})^2 = 2V^2 - 2V^2\cos(\pi - \phi_{CM}) = 2V^2(1+\cos\phi_{CM})$$
$$= 2V\cos\phi_{lab}$$

よって，エネルギーは

$$E_A = \frac{1}{2}AV_{lab}^2 = E_0 \frac{2A}{(A+1)^2}(1+\cos\phi_{CM})$$

散乱角の関係は，

$$\phi_{CM} = 2\phi_{lab} \quad , \quad \cos\phi_{lab} = \sqrt{\frac{1+\cos\phi_{CM}}{2}}$$

散乱後の中性子のエネルギーは，

$$\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0 < E < E_0$$ の範囲にある。

特に $A=1$（陽子）では　$0 < E < E_0$

※中性子の減速には水やパラフィンを用いる。

- 散乱後の中性子のエネルギー分布

15 MeV 程度までのエネルギーであれば S 波散乱のみと考えてよい。

立体角 $d\Omega$ に散乱させる確率 dw は

$$dw = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2}\sin\theta_{CM}\,d\theta_{CM}$$

また，

$$\frac{dE}{E_0} = \frac{2A}{(A+1)^2} d(\cos\theta_{CM}) = \frac{2A}{(A+1)^2}\sin\theta_{CM}\,d\theta_{CM}$$

よって

$$\frac{dw_1}{dE} = \frac{(A+1)^2}{4A}\frac{1}{E_0} = \frac{1}{E_0(1-\alpha)} \quad \left(\alpha \equiv \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2\right)$$

つまり，1回の散乱後のエネルギー分布は

$\alpha E_0 < E < E_0$ の間で均一。

2回目の散乱後の分布は，

$$\frac{dw_2}{dE} = \begin{cases} \dfrac{1}{E_0(1-\alpha)^2}\ln\dfrac{E_0}{E} & \alpha E_0 < E < E_0 \\[2ex] -\dfrac{1}{E_0(1-\alpha)^2}\left[\ln\dfrac{E_0}{E} + 2\ln\alpha\right] & \alpha^2 E_0 < E < E_0 \end{cases}$$

3回散乱すると.

$$\frac{dw_3}{dE} = \begin{cases} \dfrac{1}{2E_0(1-\alpha)^3}\left(\ln\dfrac{E_0}{E}\right)^2 & \alpha E_0 < E < E_0 \\ -\dfrac{1}{2E_0(1-\alpha)^3}\left[2\left(\ln\dfrac{E_0}{E}\right)^2 + 6\ln\alpha\cdot\ln\dfrac{E_0}{E} + 3\left(\ln\alpha\right)^2\right] & \alpha^2 E_0 < E < E_0 \\ \dfrac{1}{2E_0(1-\alpha)^3}\left(\ln\dfrac{E_0}{E} + 3\ln\alpha\right)^2 & \alpha^3 E_0 < E < E_0 \end{cases}$$

特に水素原子核との n 回衝突後は.

$$\frac{dw_n}{dE} = \frac{1}{E_0(n-1)!}\left(\ln\frac{E_0}{E}\right)^{n-1}$$

○ 中性子のエネルギーが E_0 から E まで減少するまでの衝突回数.

$$u := \ln E_0 - \ln E = \ln\frac{E_0}{E} \quad : \text{lethagy change}$$

1回の散乱後では.

$$u = \ln\frac{(A+1)^2}{A^2+1+2A\cos\theta_{CM}}$$

これを全立体角で平均すると. 1回の散乱での u の平均は.

$$\xi = \langle u(\theta)\rangle = \int d(\cos\theta_{CM})\ln\frac{(A+1)^2}{A^2+1+2A\cos\theta_{CM}}\cdot\frac{1}{4\pi}$$

$$= 1 + \frac{(A-1)^2}{2A}\ln\frac{A-1}{A+1}$$

<u>例</u> ^{12}C は $\xi \simeq 0.158$. 中性子が 1MeV から 熱的 (1/40 eV) になるまでには.

$$n = \frac{1}{0.158}\cdot\ln\left(\frac{10^6}{1/40}\right) \simeq 111 \text{ 回}.$$

水素は $\xi = 1$ で.

$$n = \frac{1}{1}\ln\left(\frac{10^6}{1/40}\right) \simeq 17.5 \text{ 回}$$

CH_2 である

パラフィン中の H にぶつかって 平均自由行程は

$\sigma \sim 20$ barn

$$\lambda = \frac{1}{N\sigma} = \frac{14}{2N_A\cdot ?\cdot\sigma}$$

$\simeq 0.5$ cm