

1σ 0.6827
 2σ 0.9545
 3σ 0.9973
 4σ 0.9999398
 5σ 0.9999994
 6σ 0.999999998

4.1-4.2.2
 担当：土居

4 統計と実験データの取り扱い

統計は、測定データから結論を引き出すための道具として本質的な役割を担っている。実験をする前に、必要な精度に対して実験器具の許される誤差や、必要な計測時間を考えなければならない。素粒子・原子核物理学実験に最も関連のある事のみを扱う。

4.1 確率分布の特徴

統計では確率過程を扱う。確率過程は確率変数 x と確率密度関数 $P(x)$ によって記述される。確率変数は連続的か離散的な値をとる。

- 例：さいころを1回振るという確率過程
- 確率変数：さいころの目 $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
- 確率密度関数：それぞれの目が出る確率 $P(x) = \frac{1}{6}$

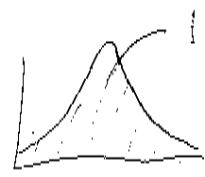
確率密度関数の意味

x が離散的な時、 $P(x_i)$ はそれぞれの x_i が実現する確率を表している。
 x が連続的な時、 $x \sim x + dx$ 中の確率変数が実現する確率が $P(x)dx$ となる。

4.1.1 累積分布関数

区間 (x_1, x_2) 中の確率変数 x が実現する確率 $P(x_1 \leq x \leq x_2)$ を累積分布関数、または確率分布関数と言ひ、

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} P(x) dx \quad (4.1)$$



で定義される。

確率変数が離散的な時、積分を和にして、

$$P(x_i \leq x \leq x_j) = \sum_{k=i}^j P(x_k) \quad (4.2)$$

確率の和を1と定義して、

$$\int P(x) dx = 1 \quad (4.3)$$

$$\sum_i P(x_i) = 1 \quad (4.4)$$

式(4.3),(4.4)の積分範囲、和の範囲は取りうる全ての x 。
 $P(x)$ は $0 \leq P(x) \leq 1$ を満たす。

4.1.2 期待値

x の期待値 $E[x]$ は

$$E[x] = \int xP(x)dx \quad (4.5)$$

で定義される。

x が離散的な時、 x の期待値 $E[x]$ は

$$E[x] = \sum_i x_i P(x_i) \quad (4.6)$$

同様に、 x の関数 $f(x)$ の期待値は

$$E[f(x)] = \int f(x)P(x)dx \quad (4.7)$$

で定義される。

以下確率変数 x は連続変数とする。特に断らない限り、離散的な時は積分を和に交えればよい。

4.1.3 分布のモーメント、平均、分散

確率分布はモーメント (積率) で特徴づけられる。固定点 x_0 に対する r 次のモーメントは、 $(x-x_0)^r$ の期待値として定義される。 $(r$ は整数) 実際は 1 次と 2 次のモーメントのみが重要である。

・平均

最も重要なものは $x=0$ に対する 1 次の積率 μ である。;

$$\mu = E[x] = \int xP(x)dx \quad (4.8)$$

これは平均または x の平均と呼ばれる。

式 (4.8) で定義された「平均」と繰り返し測定したデータから計算した「平均」は区別しなければならないことに注意。前者は理論的分布から計算した理論的平均、後者はサンプルから取った実験的平均と呼び、区別する。4.4.2 で見るように、実験的平均は理論的平均を見積もるために使う。以下理論的平均を μ と表記する。(実験的平均は \bar{x})

・分散

2 番目の重要な量は、平均に対する 2 次のモーメント σ^2 である。;

$$\sigma^2 = E[(x-\mu)^2] = \int (x-\mu)^2 P(x)dx = E[x^2] - \mu^2 \quad (4.9)$$

これは分散と呼ばれる。 σ は標準偏差と呼ばれる。 σ は分布のばらつきや幅を表し、 x が平均 μ からどれくらい変動するのかがわかる。平均と同様、理論的分散とサンプルから計算した実験的分散は区別する。

・高次のモーメント

他のモーメントも計算できる。例えば、3 次のモーメントは歪度、4 次のモーメントは尖度と呼ばれていて、歪度は分布の非対称性、尖度は分布のどがり具合をそれぞれ示す指標となっている。これらはめったに使われないが、より高次のモーメントからより細かな情報が得られることは知っておくべきである。

実験的平均
理論的平均
2
この二つは
異なる
指標
である

4.1.4 共分散

これまで：1変数の確率分布

これから：多変数の確率分布

複数の確率変数 x, y, z, \dots と多変数分布 $P(x, y, z, \dots)$ で特徴づけられる確率過程を考える。
多変数分布について、それぞれの確率変数に対する平均と分散は上と同様に定義される。

例 $P(x, y, z)$ に対して

$$\mu_x = \int dx \int dy \int dz x P(x, y, z)$$

$$\sigma_y = \int dx \int dy \int dz (y - \mu_y)^2 P(x, y, z)$$

3番目の重要な量として、確率変数 x, y の共分散 $\text{cov}(x, y)$ を

$$\text{cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E[xy] - \mu_x \mu_y \quad (4.10)$$

で定義する。3変数なら (${}_3C_2 = 3$ で) 3種類の共分散が定義できる。

共分散は2つの変数間の1次の相関関係を示す指標である。相関関係を表す指標として、相関係数 ρ がよく使われる。;

$$\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (4.11)$$

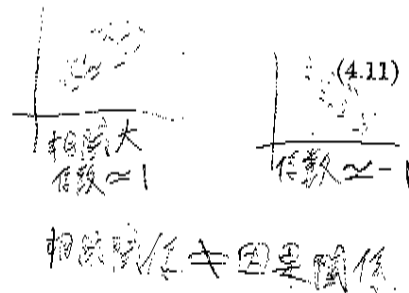
相関係数 ρ の性質

・ $-1 \leq \rho \leq 1$

・ 2変数が完全に線型従属ならば $|\rho| = 1$

・ 2変数が完全に独立ならば $\rho = 0$ ← 逆は成り立たない

注意：2変数が独立 $\Leftrightarrow P(x, y) = P(x)P(y)$



4.2 よく使う確率分布

多くの確率分布が存在するが、大抵の場合はいくつかの分布で物理を議論できて、特に重要なのは二項分布、ポアソン分布、ガウス分布である。

4.2.1 二項分布

結果が2通りしかないような試行を N 回繰り返す時、一方の結果が順序を問わず r 回実現する確率分布が二項分布である。

例：コインを10回投げて、表が r 回出る確率

以下では結果は「成功(起こる)」か「失敗(起こらない)」の2通りとする。1回の試行で成功する確率を p とすると、二項分布 $P(r)$ は

$$P(r) = \frac{N!}{r!(N-r)!} p^r (1-p)^{N-r} \quad (4.12)$$

である。

式(4.8),(4.9)で定義される式(4.12)の平均 μ 、分散 σ^2 は、

$$\mu = \sum_r r P(r) = Np \quad (4.13)$$

$$\sigma^2 = \sum_r (r - \mu)^2 P(r) = Np(1-p) \quad (4.14)$$

である。

二項分布という名前は二項展開 (二項定理) に由来しており、実際

$$\sum_r P(r) = \sum_r \frac{N!}{r!(N-r)!} p^r (1-p)^{N-r} = [(1-p) + p]^N = 1 \quad (4.15)$$

二項分布の累積分布は、和の形よりも簡単な形にできない。項が多くない時は、個々の項を計算して足せばよい。項が多い時は計算機で計算する。

p がそんなに小さくない時、 N を大きくすると二項分布は平均と分散が Np と $Np(1-p)$ で与えられるガウス分布に近づく。実際の計算では、 $N \geq 30, p \geq 0.05$ ならばガウス分布を用いる事はよい近似になっている。

(注意) 二項分布は離散分布、ガウス分布は連続分布

p が小さい時 ($p \leq 0.05$) の時、二項分布はポアソン分布に近似できる。

4.2.2 ポアソン分布

ポアソン分布は、二項分布において $\mu = Np$ を有限値として $p \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ として得られる確率分布であり、

$$P(r) = \frac{\mu^r e^{-\mu}}{r!} \quad (4.16)$$

で与えられる。

ポアソン分布は、1回の成功率は低いが生回数が大きい事象をよく記述する。

例: ^{137}Cs の崩壊

$$\lambda(\text{崩壊率}) = p = 8.2 \times 10^{-10} [\text{1/s}]$$

$$1\mu\text{g の } ^{137}\text{Cs}: N = 10^{15} \text{ 個の原子核}$$

$$\Rightarrow Np = \mu = 8.2 \times 10^5 [\text{1/s}]$$

(必ずしも $\mu = Np$ と思わなくてもよい) 例えば単位時間当たりの反応数 λ , 時間 t を使えば、 $\mu = \lambda t$ とできて、時間 t の間に r 回イベントを観測する確率は

$$P(r) = \frac{(\lambda t)^r e^{-\lambda t}}{r!} \quad (4.17)$$

となる。

ポアソン分布の平均と分散は一致していて、値は μ である。

$$\sigma^2 = \mu \quad (4.18)$$

ポアソン分布は最頻値と平均が一致しない。

$\mu \geq 20$ で、平均 μ 、分散 $\sigma^2 = \mu$ のガウス分布に近似できる。

二項分布の時と同様、ポアソン分布は離散分布で、ガウス分布は連続分布であることに注意。

$\left\{ \begin{array}{l} \text{discovery} > 5\sigma & > 9\sigma \\ \text{evidence} > 3\sigma & > 5\sigma \\ \text{observation} & > 3\sigma & > 4.3\sigma \\ \text{indication} & < 3\sigma & \sim 2 \sim 3\sigma \end{array} \right.$

4.2.3 The Gaussian or Normal Distribution - 4.3.2 Random Errors

中塚徳継

20 June 2011

1 4.2.3 The Gaussian or Normal Distribution

ガウス分布はあらゆる統計で最も重要な役割を果たし、あらゆる科学にありふれた分布である。測定誤差、特に系統誤差は一般的にガウス分布で表わされる。さらに、ガウス分布が適用できないような場合でも、ガウス分布は真の分布の良い近似になる。

ガウス分布は、連続で対称な分布で、確率密度は以下の式で与えられる。

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \dots (4.19)$$

μ : 平均

σ^2 : 分散

σ : 標準偏差

である。ガウス分布の幅を表すパラメーターとして、標準偏差 σ のほかに、半値幅 FWHM や 1/10 値幅 FWTM もしばしば使われる。図 (4.4)

$$\text{FWHM} = 2.35\sigma$$

ガウス分布の面積

$\mu \pm \sigma \rightarrow 68.3\%$

$\mu \pm 2\sigma \rightarrow 95.5\%$

$\mu \pm 3\sigma \rightarrow 99.7\%$

2σ でも 95.5%!!

他の分布で使われる

2 4.2.3 The Chi-Square Distribution

χ^2 乗分布は理論値と実験値との一致の良さを確かめるのに特に適している。

平均 μ_i 、標準偏差 σ_i のガウス分布に従うランダム変数 x_i を n 個集める。このとき、以下の量を χ^2 と呼ぶ。

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2$$

χ^2 は以下の分布に従う。

$$P(\chi^2) d\chi^2 = \frac{(\chi^2/2)^{\nu/2-1} \exp(-\chi^2/2)}{2\Gamma(\nu/2)} d\chi^2$$

ν :平均

2ν :分散

ただし、 ν は整数である。図(4.6)

χ^2 は、データの揺らぎを表している。理論値と実験値の χ^2 を求めることで、データの妥当性を検証することができる。

3 4.3 Measurement Errors and the Measurement Process

系統誤差と偶然誤差

4.3.1 系統誤差

系統誤差→実験機器の持つずれによってすべての実験データがシフトする誤差

例：ゼロ点があっていない電圧計で測った実験データ

どのような実験でも起こるが、一貫して扱うことは難しい

4.3.2 偶然誤差

偶然誤差→測定ごとにばらつく誤差

測定機器の精度がよくないことや、測定している現象に内在する不確かさなどから生まれる。とくに前者による誤差を器差、後者による誤差を統計誤差と呼ぶ。

例：放射性崩壊のデータ→統計誤差をもつ

例：定規を使って測った机の長さのデータ→器差をもつ

いずれも統計的に扱うことで評価できる。ほとんどすべての誤差の分布はガウス型であるといえる。平均は真の値に対応し、標準偏差は測定精度に比例する。

4.4 サンプルとパラメータの推定 ~ 最尤法 ~

- 実験によって、ある物理量に対して有限個の値を測定。〈サンプリング=標本抽出〉
それらの値が、どのような分布に基づいて得られたものなのか考えよう。
測定する点は、分布において代表的な点であり、偏りのないことが重要 (例えば世帯調査)
また、よほどの場合を除き、「おかしい値をとったとしてもその点を除外しないこと。
- 得られた有限個の測定値から、その物理量を記述するもっともよい分布を決めよう。(推定)
もっともよい分布: 分布と測定値のズレ(分散)が全体として最も小さいもの。
- 推定における問題
⇒ ① もっともよい推定は?
② 推定の不確かさは?

データから分布を推定する原理はたくさんあるが、ここでは最もメジャーであり我々の目的にあった手法である、最尤法について記述する。

4.4.1 標本モーメント

標本 x_1, x_2, \dots, x_n について考える。(標本母集団)

これらの値を支配する分布の「理論的な」平均(分散): μ, σ^2

• 標本平均: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

• 標本分散: $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

標本が 2 変数の場合。(ここでは (x, y) の 2 変数)

• 標本共分散: $\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

それぞれ $n \rightarrow \infty$ とすると、理論的な μ, σ, cov に収束する。

4.4.2 最尤法

最尤法は、標本の従う分布の形が既知の場合にのみ有効。

→ 物理実験の場合、たいがい Gauss 分布か Poisson 分布。

ここではより一般に、標本が $f(x|\theta)$ という分布に従うことを考えよう。

θ は分布関数のパラメータであり、こいつを定めてやりたい。

まず、尤度関数 $L(\theta|x)$ を定める。

$$L(\theta|x) = f(x_1|\theta) f(x_2|\theta) \cdots f(x_n|\theta)$$

$L(\theta|x)$ は、 x_1, x_2, \dots, x_n という一連の値が得られる確率と解釈できる。

この確率が最も大きな確率となるような θ が、求めたい θ の値。

すなわち、

$$\frac{dL}{d\theta} = 0 \text{ なる } \theta \text{ を求めればよい。}$$

また分布の形によっては $\ln L$ のほうが扱いやすいので、

$$\frac{d(\ln L)}{d\theta} = 0 \text{ としてもよい。} \quad (= \ln L \text{ は } L \text{ について単調増加)}$$

この方程式を解いて得られた $\hat{\theta}$ を、パラメータ θ の最尤推定量という。

・ $\hat{\theta}$ は標本 x_1, x_2, \dots, x_n から得られた値。すなわち、標本 x_i が変われば $\hat{\theta}$ も変わる。
どのくらいバラつきがあるのか? $\rightarrow \hat{\theta}$ の分散 $\sigma^2(\hat{\theta})$ を調べよう。

$$\sigma^2(\hat{\theta}) = \int (\hat{\theta} - \theta)^2 L(\theta|x) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

これを解析的に解くのは、シリアルな場合を除いて不可能。
よって、 n が大きい時にはよい近似となる以下の式を用いる。

$$\sigma^2(\hat{\theta}) \approx - \left(\frac{d^2 \ln L}{d\theta^2} \right)^{-1}$$

パラメータ θ が複数あるときは、行列

$$U_{ij} = - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$$

を用いて、

$$\sigma^2(\hat{\theta}_i) \approx U_{ii}^{-1}$$

と表せる。

・ $\sigma^2(\hat{\theta})$ の式において、 $\hat{\theta}$ の平均を θ (分布における理論的な値) としたが、これは有限の n において必ずしも保証されるものではない。

$\hat{\theta}$ の平均が θ に一致する性質を、推定量の不偏性という。 \rightarrow 不偏推定量

実際は $\hat{\theta}$ が不偏性を備えていなくても、 $\sigma^2(\hat{\theta})$ の評価の式は問題なく適用できる。

・最尤法のもう一つの便利な性質として、 $u = f(\theta)$ という量があるとき、

u の推定値 \hat{u} は、 $\hat{u} = f(\hat{\theta})$ と表せることがある。

次からは、最尤法を実際に Poisson 分布と Gauss 分布の場合に当てはめてみよう。

4.4.3 Poisson分布に対する推定量

平均が μ のPoisson分布から、 n 個の標本 x_1, x_2, \dots, x_n が得られたとする。
尤度関数は以下のようになる。

$$L(\mu|x) = \prod_{i=1}^n \frac{\mu^{x_i}}{x_i!} \exp(-\mu) = \exp(-n\mu) \prod_{i=1}^n \frac{\mu^{x_i}}{x_i!}$$

対数をとって、

$$L^* = \ln L = -n\mu + \sum x_i \ln \mu - \sum \ln x_i!$$

最尤法より、

$$\frac{dL^*}{d\mu} = -n + \frac{1}{\mu} \sum x_i = 0$$

$$\therefore \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{x}$$

すなわち、 μ の最尤推定量は標本平均に一致する。

\bar{x} の分散はテキスト(4.35)式から求めることができるが、
ここでは異なる方法で求めてみる。すなわち、テキスト(4.9)式から出発する。

$$\begin{aligned} \sigma^2(\bar{x}) &= E[(\bar{x} - \mu)^2] \\ &= E\left[\left(\frac{1}{n} \sum x_i - \mu\right)^2\right] \\ &= E\left[\frac{1}{n^2} (\sum x_i - n\mu)^2\right] \\ &= \frac{1}{n^2} E\left[\left(\sum (x_i - \mu)\right)^2\right] \end{aligned}$$

ここで、

$$\left[\sum (x_i - \mu)\right]^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 + \sum_{i \neq j} (x_i - \mu)(x_j - \mu)$$

であり、期待値をとると第2項は消える。

よって、

$$\begin{aligned} \sigma^2(\bar{x}) &= \frac{1}{n^2} E\left(\sum_i (x_i - \mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

これは分布によらない一般的な式である。

上式の平方根をとって誤差 $\sigma(\bar{x})$ を求めると、Poisson分布においては $\sigma^2 = \mu$ であることに留意して、

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\mu}{n}} \approx \sqrt{\frac{\hat{\mu}}{n}} = \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}$$

と2.3.

4.4.4 Gauss 分布に対する推定量

x_1, x_2, \dots, x_n の標本があるとき、尤度関数は

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$L^* = \ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

2つの変数 μ と σ^2 について推定量を求めたいので、それぞれで偏微分したものを0とすると、

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mu} = \sum \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{x}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{\sigma^2} = 0$$

となる。

ところで、テキスト(4.4.3)式の標本平均の分散に関する一般的な式より、

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{平均の標準偏差})$$

が得られる。すなわち、測定回数が多いほど、標本平均の誤差が小さくなる。

今のところ、 σ はまだ未知である。

$\frac{\partial L^*}{\partial \sigma^2} = 0$ の式を解いて、 σ^2 を推定してやると、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu)^2 \approx \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \alpha^2 \quad (\hat{\mu} = \bar{x} \text{ より、} \mu \text{ を } \bar{x} \text{ で置き換えた})$$

である。しかし、これは偏った推定量である。

すなわち、 $E[\alpha^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2$ となってしまう。

n が大きいと、この期待値は真の分散 σ^2 に近づくが、 n が小さい場合には、

σ^2 はより小さい値が推定されてしまう。

その理由は、標本の数が少ないときは平均から大きく外れた標本が得られるとはまれであり、分散が小さめに見られてしまうことにある。

よって実用的には、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

という推定量が用いられる。

$\hat{\sigma}^2$ の分散と $\hat{\sigma}$ の標準偏差は、計算すると

$$\sigma^2(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \approx \frac{2\hat{\sigma}^4}{n-1}$$

$$\sigma(\hat{\sigma}) = \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}} \approx \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2(n-1)}} \quad \text{となる。}$$

4.4.5 重みつき平均

ある同じ量を、精度の異なる計器で測定した場合、たとえば平均など
考えようとする時には、単純に標本 x_1, \dots, x_n の算術平均をとればよいわけ
ではない。

それぞれの x_i に対し、その誤差 σ_i に応じて重みをかけて計算してやればよい。

標本 x_1, \dots, x_n があり、それぞれの x_i は、 μ は同じだが、各々異なる σ_i をとる Gauss
分布に従うとする。

このとき尤度関数は

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

となり、ここから最大法を用いて

$$\hat{\mu} = \frac{\sum x_i / \sigma_i^2}{\sum 1 / \sigma_i^2}, \quad \sigma^2(\hat{\mu}) = \frac{1}{\sum 1 / \sigma_i^2}$$

が得られる。

4.4.5 荷重平均

平均と標準偏差を同じ計器で測定した値から求めたが、誤差の異なる2つ以上の測定値の扱いについて考える。

誤差の小さい測定を重視するよう重みをつけた荷重関数を使う。

同じ平均 μ で、異なる標準偏差 σ_i を持つガウス分布に従う標本 x_1, \dots, x_n において尤度関数は(4.45)式より

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma_i^2}\right]$$

となりこれを最大にする荷重平均 $\hat{\mu}$ は、

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial \mu} = \sum_i \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_i^2} \right) = 0$$

$$\therefore \hat{\mu} = \frac{\sum x_i / \sigma_i^2}{\sum 1 / \sigma_i^2}$$

(4.55)

(4.33)式より荷重平均の誤差は

$$\sigma^2(\hat{\mu}) = -\left(\frac{\partial^2(\ln L)}{\partial \mu^2} \right)^{-1} = \frac{1}{\sum 1 / \sigma_i^2}$$

(4.56)

上2式は σ_i が全て等しいとき(4.49), (4.50)式に一致する。

4.5 応用例

4.5.1 測定値の平均と誤差

例4.1 (机の)長さの測定

測定値はガウス分布に従う。

$$\text{平均 } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 17.61533 \dots$$

$$\text{標準偏差 } \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 5.855 \times 10^{-3}$$

$$\text{平均の標準誤差 } \sigma(\bar{x}) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{5.855 \times 10^{-3}}{\sqrt{15}} = 0.00151175$$

よって机の長さとして適した値は $x = 17.615 \pm 0.002$

測定の不確かさは標準偏差でなく、平均の標準誤差で与えられる。

4.5.2 誤差の異なるデータの統合

例4.2 ミューオンの寿命

文献によると異なる実験で7個の値が得られている。理想的な値を得るために、誤差が最も小さいものを選ぶ方法もあるが、ここでは荷重平均を用いると、

$$\text{寿命 } \tau = \frac{\sum x_i / \sigma_i^2}{\sum 1 / \sigma_i^2} = \frac{5961684}{2713611} = 2.196956012$$

$$\text{誤差 } \sigma(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\sum 1/\sigma_i^2}} = \frac{1}{\sqrt{27/3611}} = 0.000607$$

これは個々の測定よりも誤差が小さく

$$\tau = 2.1970 \pm 0.0006 \text{ ms}$$

4.5.3 計数率の定義と誤差

例4.3 線源 ^{22}Na の 1分当り崩壊数の測定

放射線崩壊はポアソン分布に従う。推定量は、

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 2205.6$$

$$\sigma(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}} = \sqrt{\frac{2205.6}{5}} = 21.00$$

よって計数率は $2206 \pm 21 \text{ counts/min}$

これを5分間まとめて1回だけ測定したと考えると、計11028回で

$$\text{誤差 } \sigma = \sqrt{11028} = 105.01$$

計数率は $(11028 \pm 105) \div 5 = 2206 \pm 21$ となり1分ずつ分けて考えたときと

等しい。

4.5.4 イベント数ゼロのときの信頼限界の設定

理論的な保存則を破るようなイベントを探す実験は、1回でも観測できれば、

その理論が間違っていた証明になるが、イベントが起きなかったからといって、理論が正しい証明にはならない。そこで、何も観測されなかった場合、そのような反応や崩壊の寿命に下限をつける。

4.17)式 $P(t) = \frac{(\lambda t)^r e^{-\lambda t}}{r!}$ より T 秒間でイベントが1回も起こらない確率は、

$$P(0|T) = \exp(-\lambda T)$$

これは λ についての確率分布とみることで、反応率 λ が λ_0 より小さい確率は、

$$P(\lambda \leq \lambda_0) = \int_0^{\lambda_0} T \exp(-\lambda T) d\lambda = 1 - \exp(-\lambda_0 T) \quad (4.58)$$

ただし、 T は規格化因子) この確率を信頼水準 CL (confidence level) とおくと

$$\lambda_0 = -\frac{1}{T} \ln(1 - CL) \quad (4.59)$$

例4.4 50g の ^{82}Se 100日間 ニュートリノレスダブルβ崩壊の観測

$2n \rightarrow 2p + 2e^- + 2\bar{\nu}_e \leftarrow \nu_e = \bar{\nu}_e$ ニュートリノがマヨラナ粒子なら対消滅
L光子数の保存を破るが最新の理論では起こり得る。

測定機器の検出率 20%。このとき 90% 信頼限界は、

$$\lambda \leq \lambda_0 = -\frac{1}{T} \ln(1 - 0.9) = -\frac{1}{100 \times 0.2} \ln(1 - 0.9) = 0.115 \text{ day}^{-1}$$

これを1個の原子核が崩壊する寿命に換算する

$$50\text{g の } ^{82}\text{Se} \text{ の原子核の数は } N = \frac{N_A}{A} \times 50 = 3.67 \times 10^{23} \text{ 個}$$

原子核 1 個当りの崩壊率は

$$\lambda \leq \frac{0.115}{3.67 \times 10^{23}} = 3.13 \times 10^{-25} \text{ day}^{-1}$$

寿命 $\tau = \frac{1}{\lambda}$ 秒

$$\tau \geq \frac{1}{3.13 \times 10^{-25}} = 3.19 \times 10^{24} \text{ day} = 8.74 \times 10^{21} \text{ years} \quad (90\% \text{ 信頼水準})$$

90% の信頼率で寿命 87 垓年以上

(cf. 宇宙の年齢は 137 億年 $= 1.37 \times 10^{10}$ years とすると宇宙の年齢の 6400 億倍)

例 4.5 N 回のヒールズを N 回検出した検出器の検出率

N 回中 r 回検出する確率は検出率を ϵ とし

$$P(N, r) = \frac{N!}{(N-r)! r!} \epsilon^r (1-\epsilon)^{N-r}$$

N 回中 N 回検出する確率は

$$P(N, N) = \epsilon^N$$

これを ϵ についての関数とみて、 N 回検出したときに検出率が ϵ' になる条件付確率は、

$$P(\epsilon = \epsilon') \propto \epsilon'^N$$

$$\int_0^1 P(\epsilon') d\epsilon' = 1 \text{ となるように規格化すると } P(\epsilon) = \frac{1}{N+1} \epsilon^N$$

検出率が ϵ_0 以上となる確率は

$$CL = \int_{\epsilon_0}^1 P(\epsilon') d\epsilon' = 1 - \epsilon_0^{N+1} \quad \therefore \epsilon_0 = (1 - CL)^{\frac{1}{N+1}}$$

$$N = 100, CL = 95\% \text{ のとき } \epsilon_0 = (1 - 0.95)^{\frac{1}{101}} = 0.97$$

→ 検出率 $\epsilon \geq 0.97$ である確率は 95% といえる。

4.5.5 イベント間の時間間隔の分布

崩壊率 λ の線源で時間 T だけイベントがない確率は (4.57) 式より

$$P(0|\lambda) = \exp(-\lambda T)$$

時間 T についての確率分布とみなし $\int_0^{\infty} P(T) dT = 1$ となるように規格化すると

$$P(T) = \lambda \exp(-\lambda T) \quad (4.60)$$

→ 実験で確かめられる。

4.6 誤差の伝播

$u = f(x, y)$ という量があった、 x, y を実験によって誤差付きで得たとき、 u の誤差はどのように評価できるか？

u の分散を、 $\sigma_u^2 \equiv E[(u - \bar{u})^2]$ と定めるとき、Taylor展開の1次のオーダーで、

$$\sigma_u^2 \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + 2 \text{cov}(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

↓
物理の測定では、しばしば0.

* correlation が無視できない場合の例。これは無視できない場合がある。

- データを fitting して、fit 関数のパラメータを求めたような場合。
- データから平均と分散を評価するとき。(平均 \bar{u} の σ^2)

(例) 4.6.1

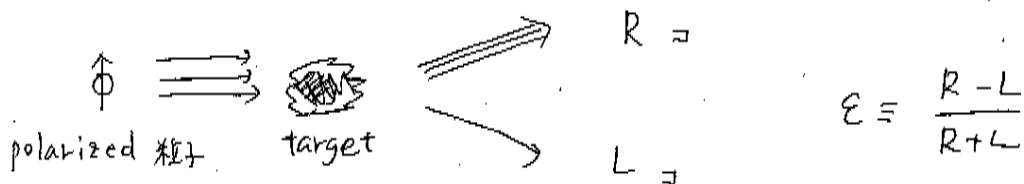
誤差の四則演算は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{i) } u = x + y \text{ のとき, } & \sigma_u^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2 \text{cov}(x, y) \\ \text{ii) } u = x - y \text{ のとき, } & \sigma_u^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2 \text{cov}(x, y) \\ \text{iii) } u = xy \text{ のとき, } & \frac{\sigma_u^2}{u^2} \approx \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} + 2 \frac{\text{cov}(x, y)}{xy} \\ \text{iv) } u = x/y \text{ のとき, } & \frac{\sigma_u^2}{u^2} \approx \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} - 2 \frac{\text{cov}(x, y)}{xy} \end{aligned}$$

$$u \ll x, y \Leftrightarrow x \approx y$$

注) ii) の場合、 $u \ll x - y$ のとき、 $\frac{\sigma_u}{u}$ が11%以下に大きくなることに注意。差は直接測定されたものから望まれない。

例 4.6 (非対称度の測定)



$$\epsilon = \frac{R-L}{R+L}$$

R, L を測定したとき、 ϵ の誤差はどうか？

解)

$$\begin{aligned} \sigma^2(\epsilon) &= \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 \\ &= \left(\frac{2L}{N_{tot}^2}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{-2R}{N_{tot}^2}\right)^2 \sigma_L^2 \quad \therefore N_{tot} = R+L \end{aligned}$$

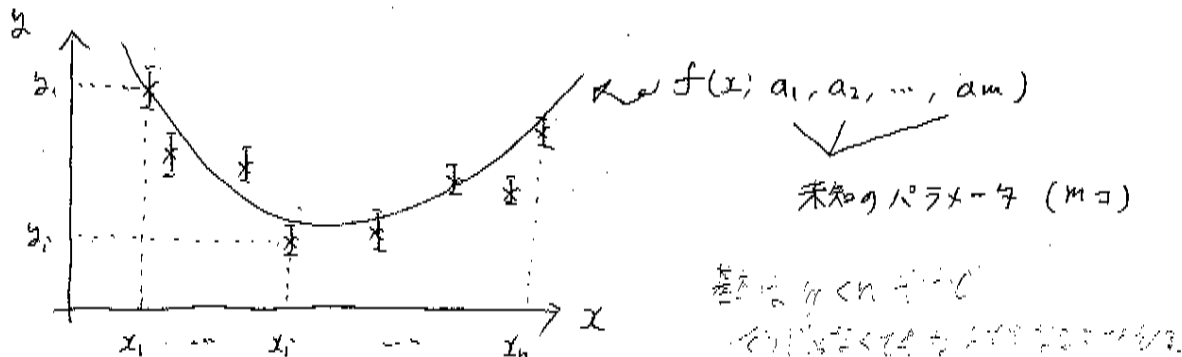
計数実験の error は Poisson 分布で与えられるとすれば、

$$\sigma^2(\epsilon) = 4 \frac{L^2 R + R^2 L}{N_{tot}^4} = \frac{4RL}{N_{tot}^3}$$

もし、非対称度が小さければ、 $\sigma \approx \sqrt{1/N_{tot}}$ である。

4.7. フィットting

4.7.1 最小二乗法



実験を行って、 $f(x; a_m)$ のパラメータ $\{a_i\}$ を決定するには、...

$$S[a_1, \dots, a_m] = \sum_{i=1}^m \left[\frac{y_i - f(x_i; a_j)}{\sigma_i} \right]^2$$

σ_i の誤差
 x_i の誤差
 y_i の誤差

を最小化すれば良い。つまり、 $\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0$ なる a_j を求めれば良い。

また、データの誤差がパラメータにも伝播してくることに注意。それは次の行列 V で与えられる。

$$(V^{-1})_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial a_j} \quad V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \text{cov}(1,2) & \dots \\ & \sigma_2^2 & \dots \\ & & \dots \end{pmatrix} \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

4.7.2. 線形回帰 ...

特に、 $f(x) = ax + b$ の場合、

$$S = \sum_i \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{\sigma_i^2}$$

を最小にするように、 a, b を決め、行列

$$(V^{-1})_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial a_j} \quad (i, j = 1, 2, \quad a_1 = a, \quad a_2 = b)$$

を計算すれば、 a, b の誤差が分かる。結果をまとめると、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{DB - A^2} \begin{pmatrix} BE - CA \\ DC - EA \end{pmatrix}$$

$$\sigma^2(a) = \frac{B}{DB - A^2} \quad \sigma^2(b) = \frac{D}{DB - A^2} \quad \text{cov}(a, b) = \frac{-A}{DB - A^2}$$

を得る。

$T=1$ の $f(x) = ax + b$ とおいた仮定が正しいとは限りないので、チェックが必要がある。関数形の妥当性をチェックする方法が χ^2 検定である。

$$S = \chi^2 \text{ としておく。}$$

この χ^2 は χ^2 分布、自由度 $\nu \rightarrow$ 平均 $V = n - m$

“自由度” (n-m) $\frac{\chi^2}{\nu} = \frac{S}{n-m} \approx 1$ だとよい。

検定値が大きいとき
 \Rightarrow 仮定が正しいと仮定する
 検定値が小さいとき
 \Rightarrow 仮定が正しいと仮定する

前) $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ n 個のデータの組から、 $y = f(x)$ を推定する。

y_i が、平均 $f(x_i)$ 、分散 σ_i^2 の Gauss 分布に従うと仮定する。尤度関数は、

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{(y_i - f(x_i))^2}{2\sigma_i^2}\right] = \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\right) \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_i^2}\right]$$

2. L を最大にするのは、

$$S \equiv \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_i^2}$$

を最小にするような関数 $f(x)$ である。 $[f(x; a_1, \dots, a_m)]$ とする。

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i^2} \left(\frac{\partial f}{\partial a_j}\right) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad \dots \textcircled{1}$$

が、パラメータ $\{a_j\}$ の満たすべき式である。特に、 f が $\{a_j\}$ に関して線形

$$f(x; a_1, \dots, a_m) = \sum_{j=1}^m a_j g_j(x)$$

であれば、 $\textcircled{1}$ は、

$$\sum_{i=1}^n w_i \left[y_i - \sum_{k=1}^m a_k g_k(x_i) \right] g_j(x_i) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

$$(\text{ただし、 } w_i = 1/\sigma_i^2)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \underbrace{w_i a_k g_k(x_i)}_{\alpha_{jk} a_k} g_j(x_i) = \sum_{i=1}^n \underbrace{w_i g_i g_j(x_i)}_{\beta_j}$$

$$\text{よって、 } \underline{a_j = \sum_{k=1}^m (\alpha^{-1})_{jk} \beta_k} \quad \text{とわかる。}$$

この分散は、

$$(\Delta a_j)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_j}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^m (\alpha^{-1})_{jk} \frac{\partial \beta_k}{\partial y_i} \right]^2 \frac{1}{w_i}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[w_i \sum_{k=1}^m (\alpha^{-1})_{jk} g_k(x_i) \right]^2 \frac{1}{w_i}$$

$$= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m (\alpha^{-1})_{jk} (\alpha^{-1})_{jl} \left[\sum_{i=1}^n w_i g_k(x_i) g_l(x_i) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^m (\alpha^{-1})_{jk} \delta_{jk} = (\alpha^{-1})_{jj}$$

誤差行列

特に、 $f(x; a, b) = b + ax$ ($g_1(x) = 1, g_2(x) = x$) のとき、

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \end{pmatrix}}_{\alpha_{jk}} \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}}_{\alpha_k} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n w_i y_i \\ \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i \end{pmatrix}}_{\beta_j}$$

$$\begin{pmatrix} B & A \\ A & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} D & A \\ -A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}$$

Δ ← determinant.

特に、 $\sigma^2(b) = (\alpha^{-1})_{11} = \frac{D}{\Delta}$

$$\sigma^2(a) = (\alpha^{-1})_{22} = \frac{B}{\Delta}$$

ただし、 $\Delta > 0$ である。

//

P106~

担当：藤林

Ex 4.7

x	0	1	2	3	4	5
y	0.92	4.15	9.78	14.46	17.26	21.9
σ	0.5	1	0.75	1.25	1	1.5

A= 12.69778

B= 8.862222

C= 61.4644

D= 40.98222

a= 4.226937 $\sigma^2(a)$ = 0.043881

E= 184.3932

b= 0.879203 $\sigma^2(b)$ = -0.06287

F= 835.5359

cov(a,b)= 0.202922

χ^2 = 2.077781

となる。 $\chi^2/\nu \approx 0.5$ であるので、よい近似直線だと言える。

Ex 4.8

非線形な関数での fitting は、線形化を行って最小二乗法を適用する。

$$N = N_0 e^{-t/\tau} \Leftrightarrow \ln N = -\frac{1}{\tau} t + \ln N_0$$

ここで重要なのは誤差が変化するということである。誤差伝播の式より、

$$\sigma^2(\ln N) = \left(\frac{\partial \ln N}{\partial N}\right)^2 \sigma^2(N) = \frac{1}{N^2} \cdot (\sqrt{N})^2 = \frac{1}{N}$$

t	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135
N	106	80	98	75	74	73	49	38	37	22
lnN	4.6634	4.382	4.585	4.3175	4.3041	4.2905	3.8918	3.6376	3.6109	3.091
$\sigma(\ln N)$	0.0971	0.1118	0.101	0.1155	0.1162	0.117	0.1429	0.1622	0.1644	0.2132

A 33240

B 652

C 2780.263818

a= -0.009032116 $\sigma^2(a)$ 1.01003E-06

D 2684700

b= 4.724679987 $\sigma^2(b)$ 0.004158929

E 132799.8411

cov(a,b) -5.14928E-05

F 11951.87907

χ^2 10.92570785

(計算結果が一致しなかった。)

(テキストに従えば)結果、 $\chi^2 = 15.6$ となり、やや大きいはまだ許容範囲である。ただ、 χ^2 値が大きいのでなにか見落としがあるかもしれない。例えばバックグラウンドを無視していること。

$$N = N_0 e^{-t/\tau} + C$$

第二の可能性は資料の中に崩壊する元素が2種類あって

$$N = (N_0 - n_0)e^{-t/\tau} + n_0e^{-t/\tau'}$$

これは線形化出来ない。

4.7.3 どちらの変数も誤差を含む場合

xの誤差がyの誤差と比べて無視できないときは有効分散法を用いる。

$$\sigma_t^2 \rightarrow \sigma_y^2 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2 \sigma_x^2$$

と置き換えるだけで良い。df/dtは一般にパラメータ a_i を含むので、Sは非線形になる。よってSを最小化する際には数値的に解くことになる。

4.7.4 非線形の fitting

要はSを最小にする $\{a_i\}_{i=0,1,\dots}$ を求めたいので、関数F(x)の最小値を求める問題になる。大きく分けてgrid法とgradient法がある。

【grid法】

パラメータの空間に等間隔のグリッドを引き、そのなかでの最小値を実際の最小値の予想値とする。グリッドの細かさ Δx が誤差に関係する。パラメータがとる値の範囲が無限に渡れば、ある範囲に絞る必要がある。

grid法は安定な方法である。しかし計算回数が多くなる(Monte Carlo法で探す場合もある)。

最小値により速く収束させる為にvariable stepping methodを用いる。

simplex法

simplex(単体): n次元の単体とは、n+1個の頂点を持つ図形のこと。

この方法は各ステップにn+1個の点を用いる。

(Step1)

n+1個の点を選ぶ。 $\{P_i\}_{i=1,2,\dots,n+1}$ の中で最もF(P)の値が大きい点を P_H 、最も小さい点を P_L とする。

(Step2)

この P_H をより良い点に更新する。まず、 P_H を除く全ての点の重心を \bar{P} とする。

$$\bar{P} = \sum \frac{P_i - P_H}{n}$$

P^* という点を $P^* = \bar{P} + (\bar{P} - P_H)$ によって定義する。

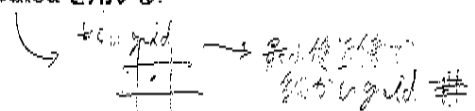
① $F(P^*) < F(P_L)$ のとき

次のステップに用いるn+1点として、 P_L の代わりに P^* を採用する(他の点は同じ)。

更に $P^{**} = \bar{P} + 2(\bar{P} - P_H)$ とも比べることでよりよい最小値の候補を見つけることができる。

② $F(P^*) > F(P_L)$ のとき

$P^{**} = \bar{P} - \frac{1}{2}(\bar{P} - P_H)$ とする。 P^{**} が P_H の代わりとしてふさわしくなければ



$$P_i \rightarrow \frac{1}{2}(P_i + P_L)$$

と点を置き直してリスタートする。

この方法は幅広い関数に適用できるが遅い。

【gradient 法】

微分を用いる。これは数値的に計算してもいいし、手で微分してもいい。基本的には微分を調べてFが減少する方向に値を動かせば良い。

より広く使われるものに Newton 法がある。x₀のまわりでF(x)を2^次まで展開する。

$$F(x) = F(x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \left. \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2$$

N 変数関数では

$$F(x) = F(x_0) + g^T (x - x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T G (x - x_0)$$

$$g^T = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)_{x=x_0}, G_{ij} = \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x=x_0}$$

これを解くとx_{min} = x₀ - G⁻¹gを得る。これは厳密な値ではないので、x_{min}のまわりで再びF(x)を展開してx_{min}を更新していく。

この方法はG_{ij}が正定値である必要があるが、G_{ij}が負になっても^準quasi-Newton methodというものを使えばある程度計算できる。

Newton 法の欠点としては、各ステップでGとその逆行列をそれぞれ計算する必要があるので計算コストが大きい。ただ、Gを計算しない、もしくは一回だけ計算してあとは値を更新していく方法もある。

最小二乗法による最小化の特別な場合では、Newton法を用いた手順はfitting関数の線形化をしている。これはHessianを以下のように近似することと等価である。

$$S = \sum s_k^2, s_k = \frac{y_k - f(x_k)}{\sigma_k}$$

として、Hessianが

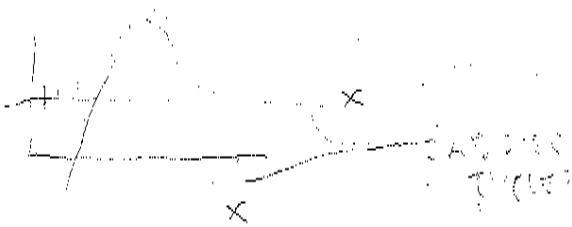
$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum 2s_k \frac{\partial s_k}{\partial x_j} = 2 \sum \left(\frac{\partial s_k}{\partial x_i} \frac{\partial s_k}{\partial x_j} + s_k \frac{\partial^2 s_k}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

となるが、最右辺二項目は2次の補正なので0と置く。

$$G_{ij} \approx 2 \sum \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \frac{\partial s_k}{\partial x_j}$$

この近似は、正定値性と、結果が正しい最小値に収束することを保証する。しかし一般には相関行列は正しいものに収束しないし、この行列によって定まる誤差も正しくないかもしれない。

全てのプログラムを書くのは大変なので、公開されているものを使えば良い(CERNなど)。



Local vs Global Minima

今までの方法はある一つの極小点を見つけるだけで他の極小点については考えていなかった。初期値を正しい範囲からスタートするために、真の値とは何かを知っていることは重要である(ただしこの場合でも正しい極小点に収束する保証はない)。

初期値を見積もる良い方法に、近似的に分かっているパラメータについては固定して、その他のパラメータを変化させて極小値を見つける方法がある。得られた結果を初期値として、今度は全てのパラメータを動かして極小点を得る。

他には、オーバーフロー、アンダーフローの可能性もある。指数関数では起こりやすいので、良い初期値からスタートするのは大切である。

Errors

近似的に得たパラメータと、真のパラメータとの間の誤差を論じる。1次元で考える。(4.72)から、

$$\sigma^2 = \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right|^{-1}$$

である。 $S(\theta)$ を真の値のまわりで展開すると、 θ は S の極小点であるので

$$S(\theta) = S(\theta^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} (\theta - \theta^*)^2 = S(\theta^*) + \frac{1}{\sigma^2} (\theta - \theta^*)^2$$

ここで $\theta = \theta^* + \sigma$ とすると

$$S(\theta^* + \sigma) = S(\theta^*) + 1$$

となる。よって θ の誤差は、 S の値が最小値から1だけずれる距離である。

4.8 最終的な値の丸め方

数値的な計算の結果は誤差と共に書かなければならない。

Ex.

$$x = 17.615335 \quad \sigma(x) = 0.0233$$

これは、 x の小数点以下2桁目が不確定ということで、 x の値としてこの全ての桁を書くのは無意味。

σ の最初の値(例では0.02)しか重要でないが、この結果がほかの解析で使用されるなら丸め誤差の累積を避けるために2桁残しても良い(それ以上はだめ)。例の場合では $0.0233 \rightarrow 0.023$ とする。

数を丸めるときの一般的なルール

少数第一位で丸めるとして少数第一位が

- ① < 0.5 のときは1の位はそのまま
- ② > 0.5 のときは1の位に1を足す
- ③ $= 0.5$ のときは1の位が奇数なら1を足し、偶数ならそのまま

\hookrightarrow 2.5 \rightarrow 2 \hookrightarrow せんぱいの取捨選択
 3.5 \rightarrow 4 ちゃんと値が合うように!

上の例に適用すると

$$x = 17.615 \pm 0.023$$

となる。

気をつけなければいけない点は、ステップを踏んで丸てはいけない。例えば 2.346 を小数 2 位で丸めるときは 2.3 となるが、

$$2.346 \rightarrow 2.35 \rightarrow 2.4$$

となってしまうからである。