

2012年3月21日

2011年度P3理論

格子QCDによる $q\bar{q}$ ポテンシャルの計算

筒井翔一郎、土居孝寛、藤林翔

概要

- QCD: 連続的な時空
格子 QCD: 離散的な格子状の時空
- フルの QCD では計算が困難な量を、
格子 QCD でなら計算可能。
- 今回は格子 QCD を用いて、
クォーク・反クォーク間のポテンシャル
($q\bar{q}$ ポテンシャル) を計算した。

0.1 QCDの特徴

QCD:強い相互作用を記述する。

SU(3)ゲージ理論

QCDのラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{2}\text{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

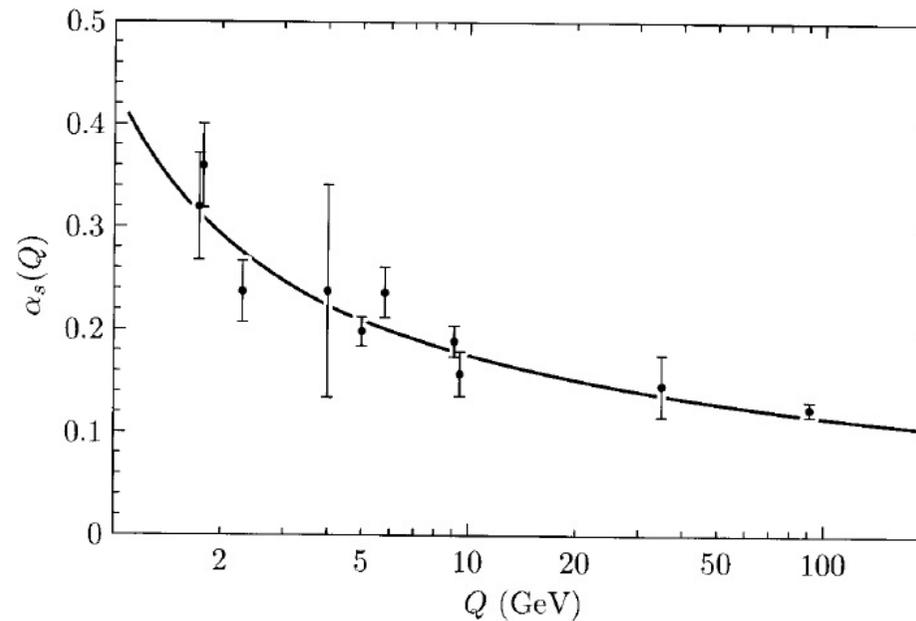
$$G_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$$

$$A_\mu \equiv A_\mu^a t^a \quad (t^a \in \text{su}(3)_C, A_\mu^a(x) \in \mathbb{R})$$

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$$

0.1 QCDの特徴

非可換性⇒漸近的自由



出典:Michel E.Peskin,Daniel V.Schroeder : An Introduction to Quantum Field Theory,The

Advanced Book Program (1995)

0.1 QCDの特徴

低エネルギーでは $\alpha_s \simeq 0.4$ ← 大きい
摂動論が使えない

(c.f. in QED $\alpha_{EM} \simeq \frac{1}{137}$)

非摂動論的性質は一般に理解が難しい
格子ゲージ理論の必要性

0.2 QCD の経路積分形式

作用 S

$$S[A, \psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \mathcal{L}(A, \psi, \bar{\psi})$$

物理量 O の期待値

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} O \exp(iS[A, \psi, \bar{\psi}])$$

$$Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp(iS[A, \psi, \bar{\psi}])$$

0.2 QCDの経路積分形式

ミンコフスキー空間 \rightarrow ユークリッド空間

$$x = (t, x, y, z) \rightarrow x_E = (\tau, x, y, z) \quad (\tau = it)$$

$$dt = -i d\tau$$

$$\mathcal{L} = -\mathcal{L}_E \quad (\mathcal{L}_E = \mathcal{H})$$

$$\exp(iS) = \exp(-S_E) \quad (S_E = \int d^4x_E \mathcal{L}_E(A, \psi, \bar{\psi}))$$

以後虚時間形式で議論を行う。

\mathcal{L}_E を \mathcal{L} 、

S_E を S と書く。

0.2 QCDの経路積分形式

作用 S (ユークリッド)

$$S[A, \psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \mathcal{L}(A, \psi, \bar{\psi})$$

物理量 O の期待値 (ユークリッド)

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} O \exp(-S[A, \psi, \bar{\psi}])$$

$$Z = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp(-S[A, \psi, \bar{\psi}])$$

1 ゲージ理論の格子化

QCD を、4次元の格子点上で定義する。

(格子間隔 a)

ポイント 1 : 連続極限で連続理論と一致する。

ポイント 2 : 局所ゲージ不変な理論にする。

1 ゲージ理論の格子化

- ・ $\psi(x) \rightarrow \psi(n)$ ($n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$)
- ・ 局所ゲージ変換: $\psi(n) \rightarrow V(n)\psi(n)$
($V(n) \in SU(3)$)

↑自明

微分項 $\partial_\mu \psi$ は工夫が必要

1 ゲージ理論の格子化

連続理論では、 \mathcal{L} が局所ゲージ不変にするために、微分を共変微分に置き換える。その際、ゲージ場 $A_\mu(x)$ が定義される。

格子理論でも同様に共変微分を定義するが、その際、ゲージ場の代わりにリンク変数 U_l が定義される。 U_l は各サイトを結ぶリンクで定義されるSU(3)の元。

1 ゲージ理論の格子化

閉じたループ C に沿ってリンク変数をとって、そのトレースをとったものはゲージ不変量である。 C を一番小さい正方形にとったものをプラケットと呼ぶ。

全てのプラケットの和を考えると、それは連続理論のラグランジアン $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$ に対応する。

1 ゲージ理論の格子化

格子理論の作用（クエンチ近似）は

$$S_{\text{gauge}} = \frac{1}{g^2} \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr} U_{\square}$$

また、物理量 O の期待値

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \left(\prod_{\text{link}} dU_l \right) O(\{U\}) e^{-S_{\text{gauge}}(\{U\})}$$

$$Z = \int \left(\prod_{\text{link}} dU_l \right) e^{-S_{\text{gauge}}(\{U\})}$$

2 ウィルソンループ

連続理論で、

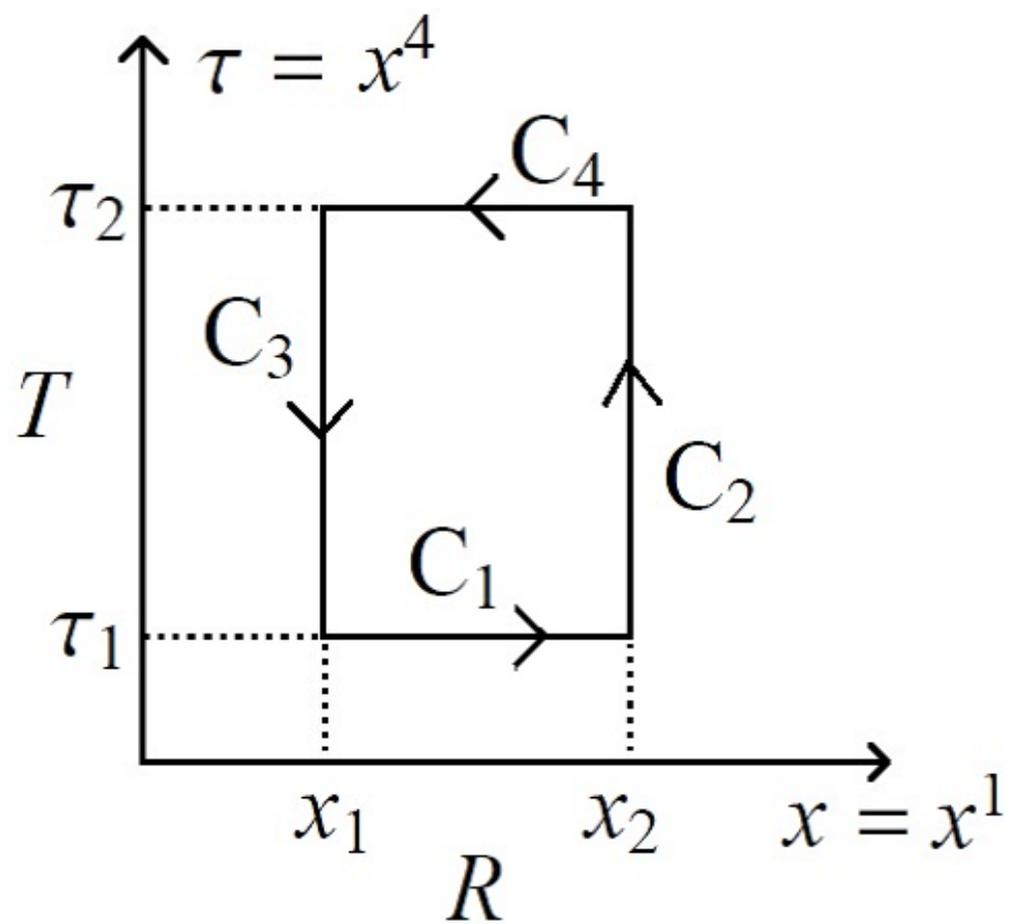
$$W(R \times T) = \exp \left[ie \oint_C dx^\mu A^\mu(x) \right]$$

$(\mu = 1, 2, 3, 4 \quad x^4 = \tau)$

の経路 C を時間方向に T 、空間方向に R の長さを持った長方形の経路に取ったものをウィルソンループという。

(形が簡単なのでこれは QED のウィルソンループ)

2 ウィルソンループ



2 ウィルソンループ

ウィルソンループ $W(R \times T)$ は T が十分大きい時、 $q\bar{q}$ ポテンシャルと関係がある。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} W(R \times T) \simeq e^{-TV(R)}$$

$V(R)$: $q\bar{q}$ ポテンシャル

2 ウィルソンループ

格子理論でのウィルソンループは、

$$\begin{aligned} W(R \times T) &\equiv \langle \text{Tr} \prod_{\text{c}} U_l \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \int \left(\prod_{\text{link}} dU_l \right) \left(\text{Tr} \prod_{\text{c}} U_l \right) e^{S(\{U\})} \\ S(\{U\}) &= \frac{1}{g^2} \sum_{\square} \text{Tr} U_{\square} \end{aligned}$$

3 モンテカルロ法

$$W(R \times T) = \frac{1}{Z} \int \left(\prod_{\text{link}} dU_l \right) \left(\text{Tr} \prod_{\text{c}} U_l \right) e^{S(\{U\})}$$

をまともに数値積分することは到底無理。

例： 16^4 個のサイトを持つ格子を考える。

⇒ $16^4 \times 4 \times 8 \sim 200$ 万重積分の数値計算！！

3 モンテカルロ法

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \left(\prod_{\text{link}} dU_l \right) O(\{U\}) e^{S(\{U\})}$$

$P(\{U\}) \sim e^{S(\{U\})}$ の確率分布を持つ変数の組 $\{U\}_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$) を選び出し、

$$\langle O \rangle \simeq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N O(\{U\}_k)$$

3 モンテカルロ法

$P(\{U\}) \sim e^{S(\{U\})}$ の確率分布を持つ
変数の組の作り方

3 モンテカルロ法

$P(\{U\}) \sim e^{S(\{U\})}$ の確率分布を持つ

変数の組の作り方

現世代のリンク変数の組： $\{U\}_n$

次世代の変数の組： $\{U\}_{n+1}$

$\{U\}_n \rightarrow \{U\}_{n+1}$ の更新 (update) を繰り返す。

3 モンテカルロ法

$P(\{U\}) \sim e^{S(\{U\})}$ の確率分布を持つ

変数の組の作り方

現世代のリンク変数の組： $\{U\}_n$

次世代の変数の組： $\{U\}_{n+1}$

$\{U\}_n \rightarrow \{U\}_{n+1}$ の更新 (update) を繰り返す。

更新の方法

$$P(\{U'\}_{n+1}) = \int dU W(\{U\}_n, \{U'\}_{n+1}) P(\{U\}_n)$$

$W(\{U\}_n, \{U'\}_{n+1})$ の選び方はいくつかある。

3 モンテカルロ法

今回の方法は熱浴法 (heatbath)。

1. あるリンク変数 U^* 以外を固定

U^* 以外と様々な U^* を用いて e^S を計算し、

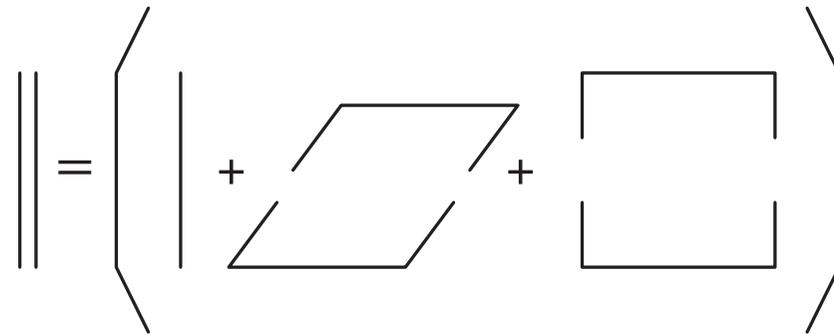
その重みで $U^{*'}$ を決める

2. 上の1. を全リンク変数で行い、これで1回更新

4 smearing とは

- $q\bar{q}$ の基底状態と励起状態を分離するためのテクニック
- 直感的には、リンク変数を太らせる方法である
- この操作を繰り返して、リンク変数を帰納的に定義する

4 smearing とは



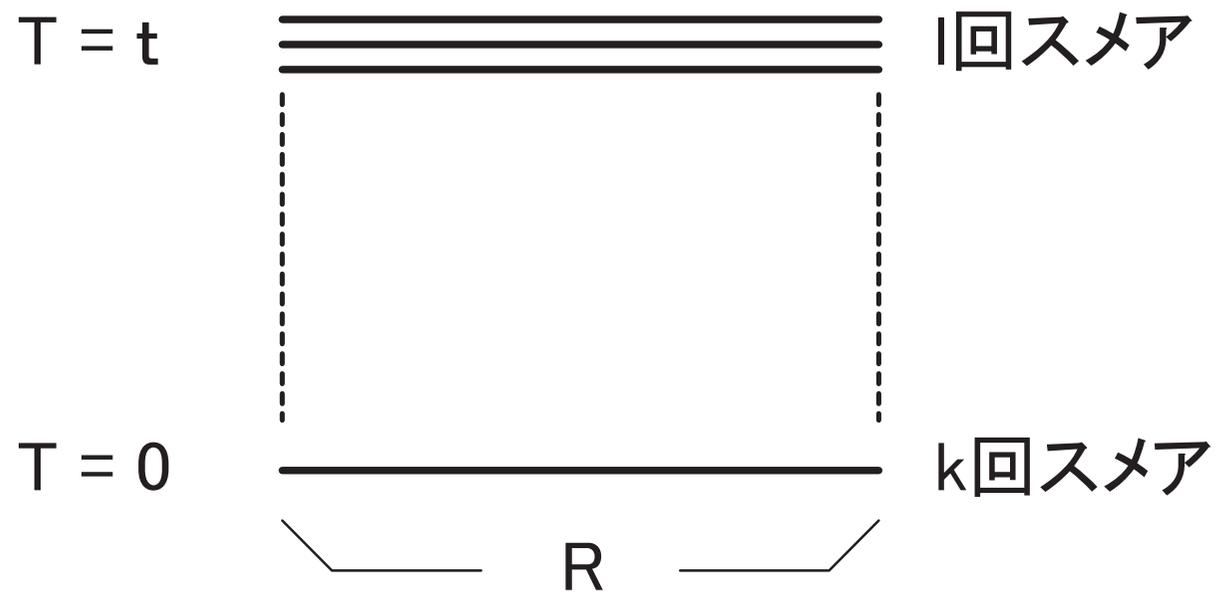
$$V_i(s) \equiv \alpha U_i(s) + \sum_{i \neq j} \left[U_j(s) U_i(s + \hat{j}) U_j^\dagger(s + \hat{i}) + U_{j-\hat{j}}^\dagger(s) U_i(s - \hat{j}) U_j^\dagger(s + \hat{i} - \hat{j}) \right]$$

5 励起状態のポテンシャル

$T = 0$ のリンクが k 回、 $T = t$ のリンクが1回スミアされたウィルソンループを $W(T, R)_{lk}$ とする。

$$W(T, R)_{lk} \approx \langle q\bar{q}_l | e^{-\hat{H}T} | q\bar{q}_k \rangle$$

5 励起状態のポテンシャル



5 励起状態のポテンシャル

k回のスメアリングによって構成された $q\bar{q}$ 系の状態を $|q\bar{q}_k\rangle$ とする。これをハミルトニアンの固有状態 $|n\rangle$ で展開する。

5 励起状態のポテンシャル

$$\begin{aligned} W(T, R)_{lk} &= \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{m,l}^* c_{n,k} \langle m | e^{-V_n(R)T} | n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,l}^* c_{n,k} e^{-V_n(R)T} \end{aligned} \quad (1)$$

対角化して固有値を求める。

$$M = C^\dagger e^{-V_n(R)T} I_{N \times N} C \quad (2)$$

5 励起状態のポテンシャル

$$\begin{aligned} W^{-1}(T, R)W(T + 1, R) \\ = C^{-1} \text{diag} \left(e^{-V_0(R)}, e^{-V_1(R)}, \dots, e^{-V_N(R)} \right) C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \left| W^{-1}(T, R)W(T + 1, R) - tI_{N \times N} \right| \\ = \prod_k \left(e^{-V_k(R)} - t \right) = 0 \end{aligned}$$

⇒各 R についてポテンシャルが求まる

6 数値計算

以上を踏まえて、実際に数値計算してみた。

- ・ 計算に使用したコンピュータ
スーパーコンピュータ SX-8R (NEC)



出典:<http://www.nec.co.jp/press/ja/0610/1701.html>

6 数値計算

- ・ リンク変数の配位 (configuration) の計算のパラメータ

格子サイズ : 16^4

$$N_{\text{thermal}} = 5000, N_{\text{sweep}} = 500, N_{\text{conf}} = 100$$

6 数値計算

様々な β で configuration を計算する。

これは様々な格子間隔 a で configuration を計算することに相当する。

目安

$$\beta = 5.7 \leftrightarrow a = 0.19\text{fm}$$

$$\beta = 5.8 \leftrightarrow a = 0.14\text{fm}$$

$$\beta = 6.0 \leftrightarrow a = 0.10\text{fm}$$

6 数値計算

- ・ ウィルソンループの計算のパラメータ

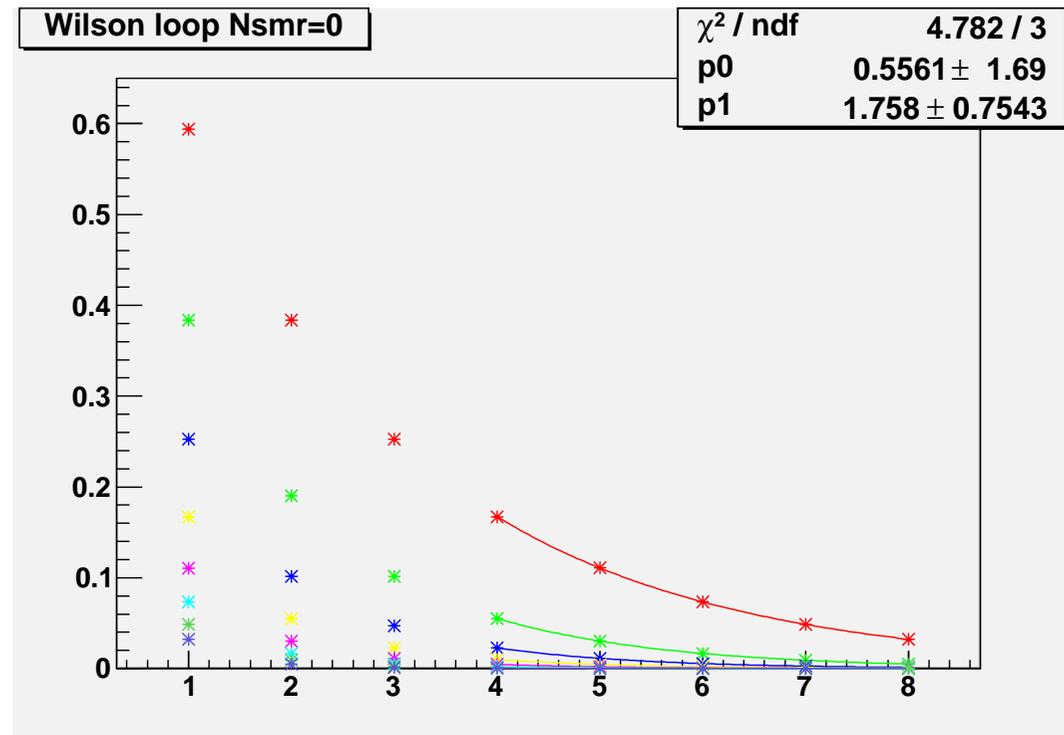
$$N_{\text{smear}} = 30, N_{\text{measure}} = 10 (N_{\text{state}} = 4)$$

7 計算結果

$\beta = 6.0$ の場合の計算結果

7.1 基底状態

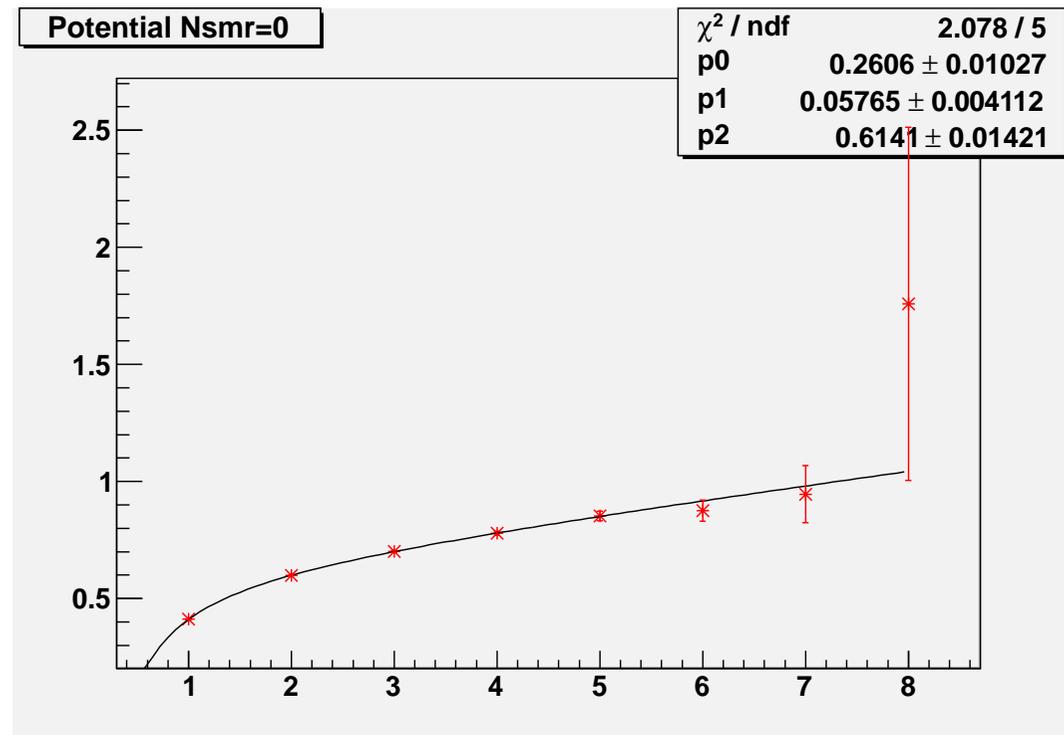
ウィルソンループの期待値 ($N_{\text{smr}} = 0$)



$$p_0 e^{-p_1 t}$$

7.1 基底状態

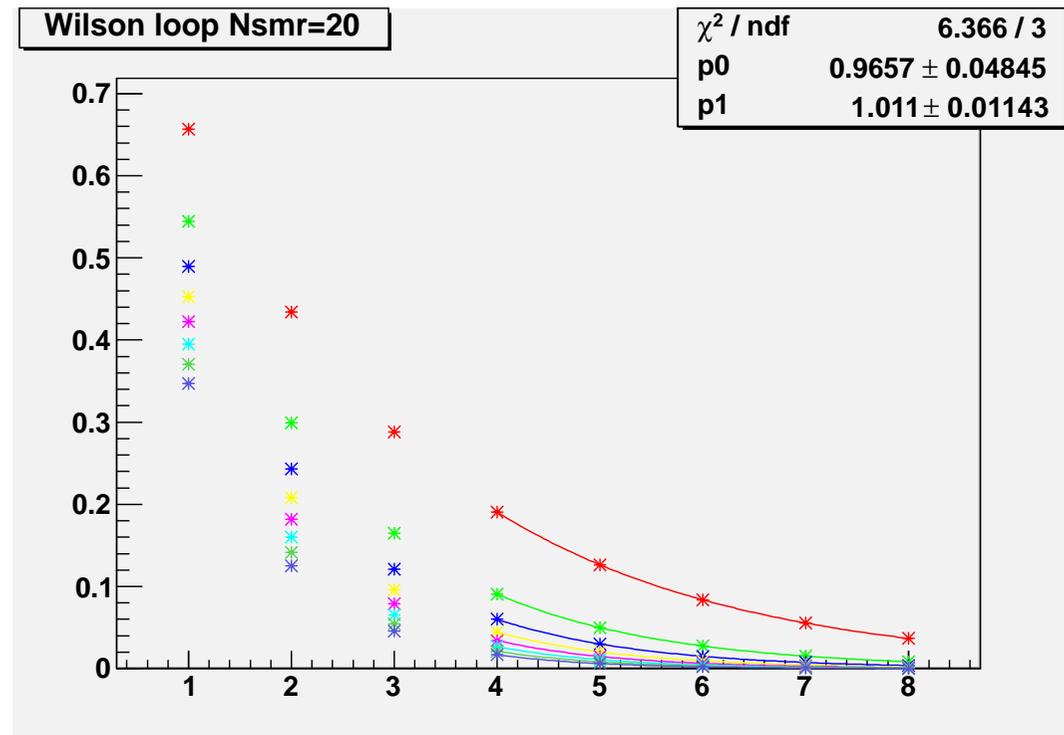
基底状態のポテンシャル ($N_{\text{smr}} = 0$)



$$-p_0/r + p_1 r + p_2$$

7.1 基底状態

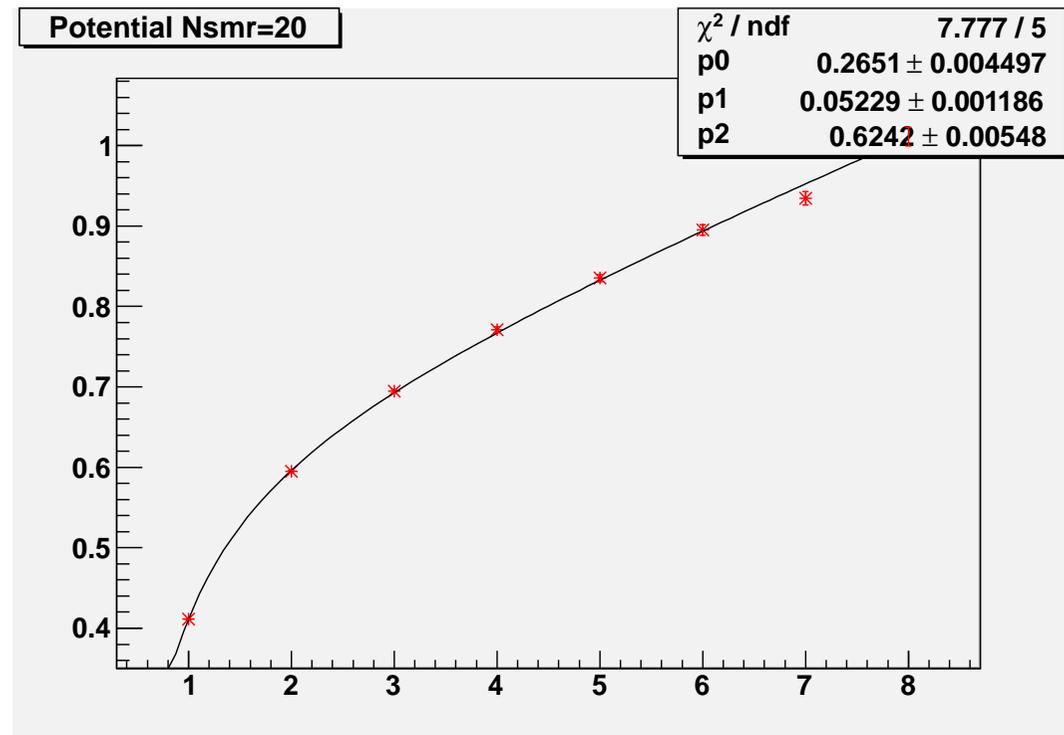
ウィルソンループの期待値 ($N_{\text{smr}} = 20$)



$$p_0 e^{-p_1 t}$$

7.1 基底状態

基底状態のポテンシャル ($N_{\text{smr}} = 20$)



$$-p_0/r + p_1 r + p_2$$

7.2 格子間隔

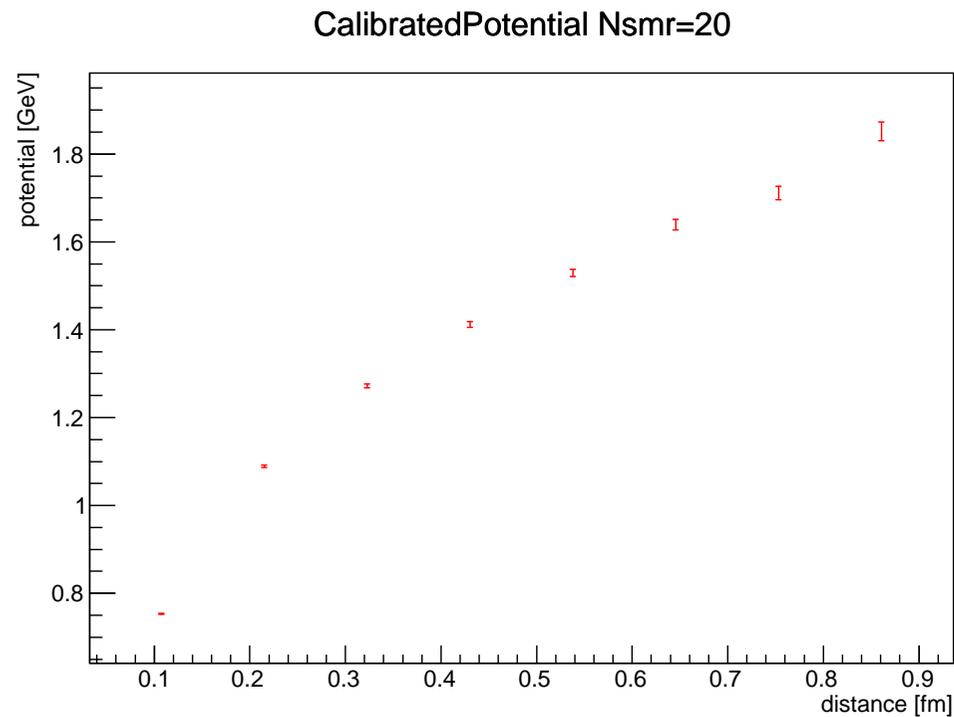
線型ポテンシャルの定数（先ほどの p_1 ）から、実験値 $\sigma = 0.89 \text{ GeV/fm}$ と比較して

$$a \sim 0.1 \text{ fm}$$

である。また、エネルギーの単位は 1.8 GeV である。

7.2 基底状態

基底状態のポテンシャル ($N_{\text{smr}} = 20$)
キャリブレーション後の値



7.2 基底状態

- クーロン型ポテンシャル (A/r) と線型ポテンシャル (σr) の和として綺麗に見えている。
- スメアリングを施した方が基底状態のエネルギーをよく抜き出していた。(ポテンシャルが綺麗に見えた)

7.3 励起状態

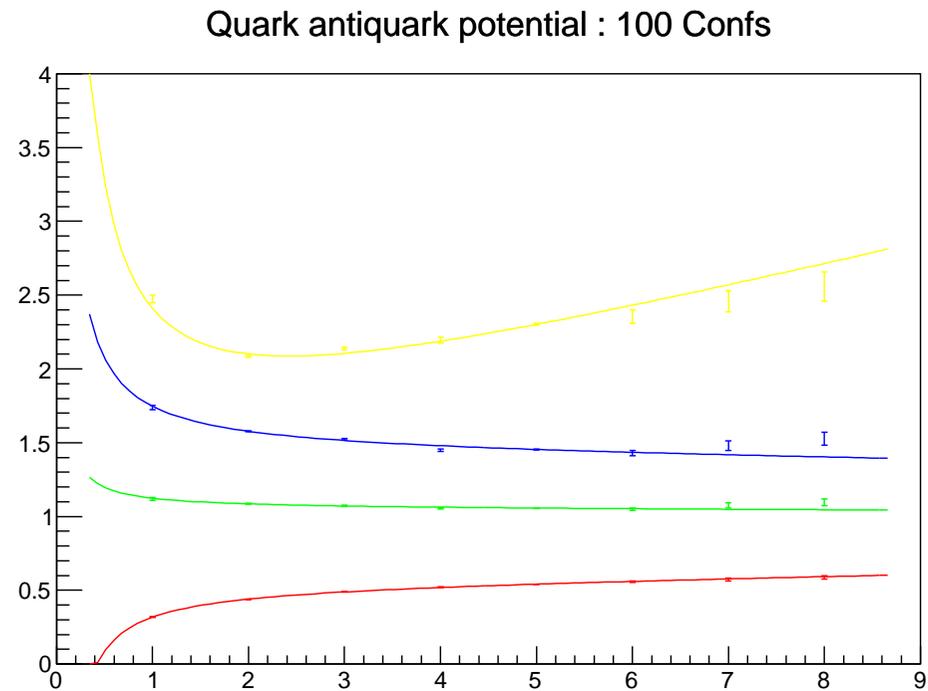
$\beta = 6.7(a \sim 0.05\text{fm})$ 、

$N_{\text{state}} = 4$ (始状態、終状態が各4つ) で計算した。

4 × 4 行列を対角化することになる。

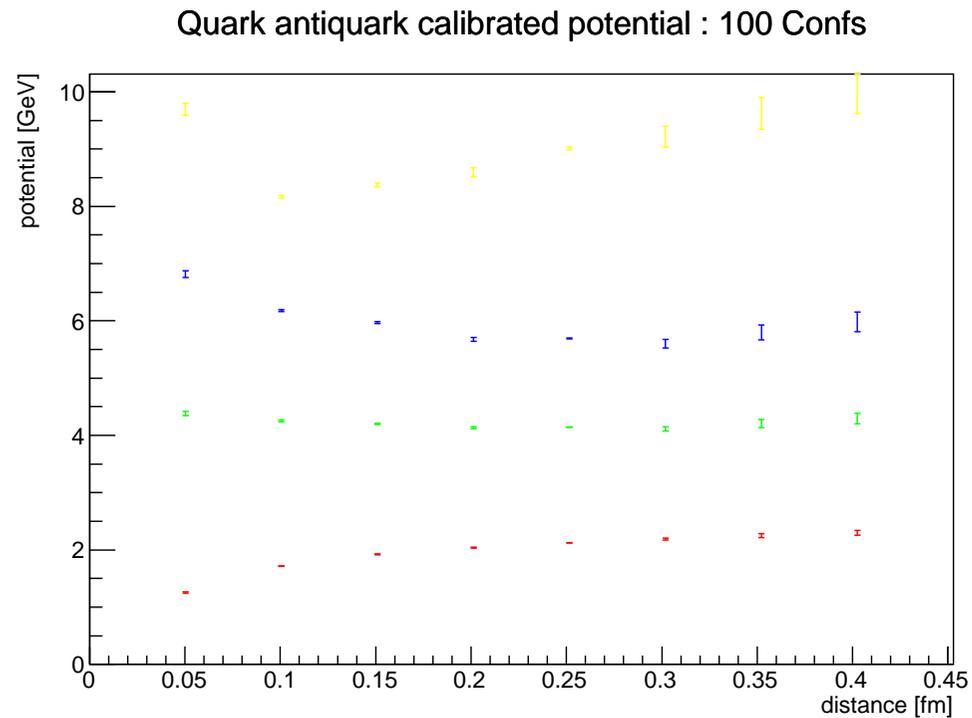
7.3 励起状態

励起状態 (基底～第三励起) のポテンシャル



7.3 励起状態

励起状態のポテンシャル（キャリブレーション後）



7.3 励起状態

第三励起状態は、更に上の励起状態からの寄与が効いて、予想される振る舞いをしなかった。
以下、第一、第二励起状態のみ扱う。

7.4 弦の振動とのアナロジー

波長 λ の弦の振動のエネルギー $E \propto 1/\lambda$

r の長さの弦

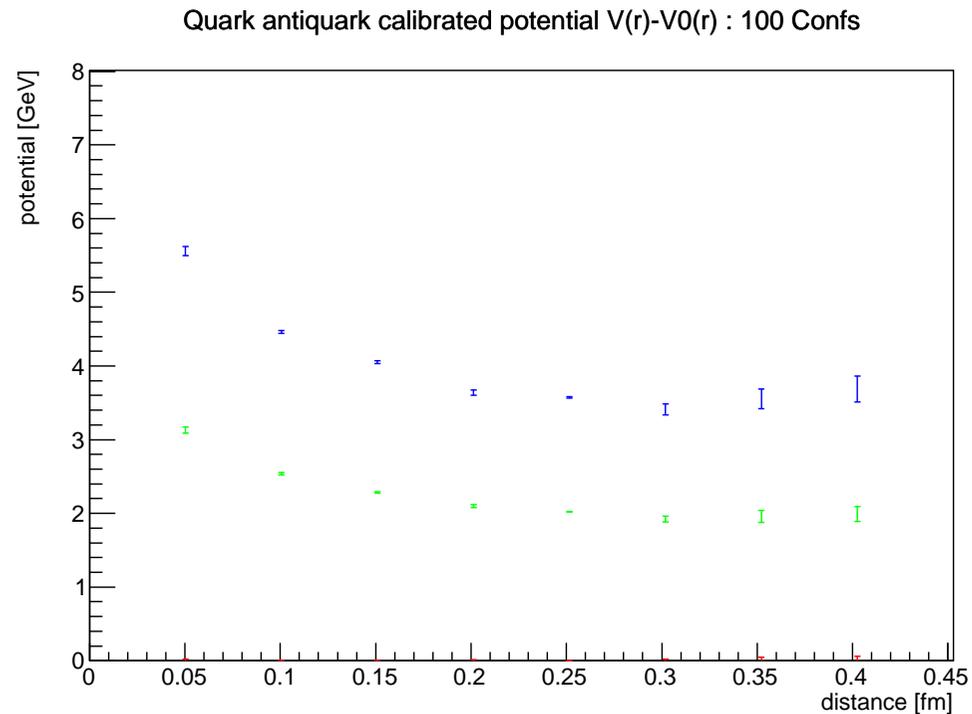
固定端では

基準振動 $\lambda = 2r \rightarrow E = C/2r$

二倍振動 $\lambda = r \rightarrow E = C/r$

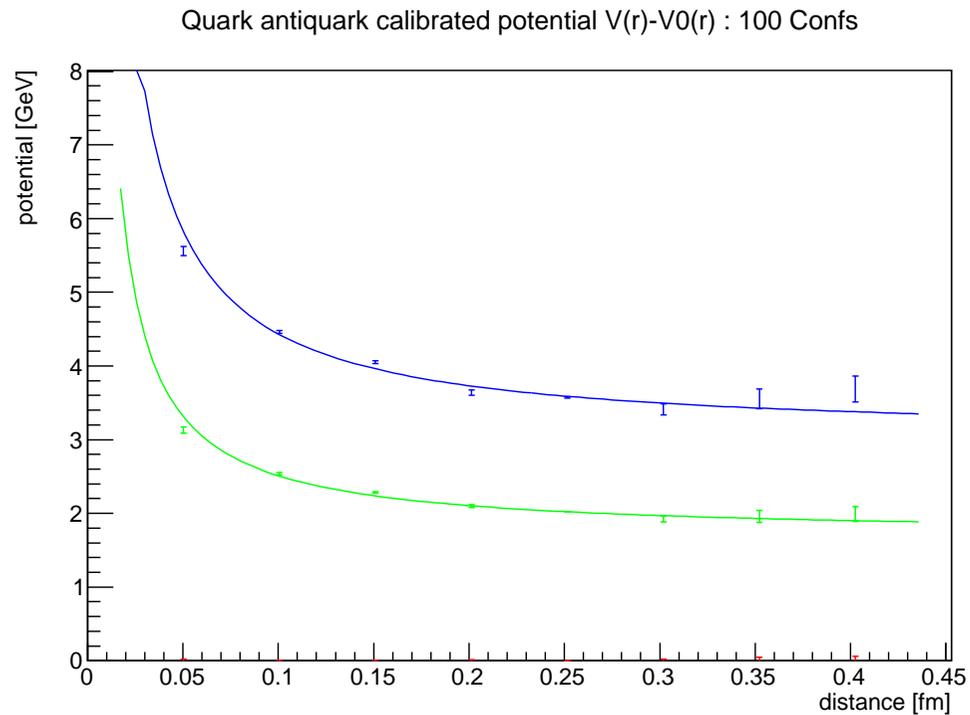
$1/r$ の係数が、二倍振動では基準振動の二倍

7.4 弦の振動とのアナロジー



励起状態-基底状態 : $V_i(r) - V_0(r)$

7.4 弦の振動とのアナロジー



$a/r + b$ でフィッティングした図

7.4 弦の振動とのアナロジー

フィッティングの結果

第一励起：

$$V_1(r) - V_0(r) = (0.081 \pm 0.002)/r + (1.700 \pm 0.008)$$

第二励起：

$$V_2(r) - V_0(r) = (0.141 \pm 0.003)/r + (3.03 \pm 0.02)$$

$1/r$ の係数が0.08,0.14 → だいたい二倍？になっている。

7.4 弦の振動とのアナロジー

フィッティングの結果

第一励起：

$$V_1(r) - V_0(r) = (0.081 \pm 0.002)/r + (1.700 \pm 0.008)$$

第二励起：

$$V_2(r) - V_0(r) = (0.141 \pm 0.003)/r + (3.03 \pm 0.02)$$

$1/r$ の係数が0.08, 0.14 \rightarrow だいたい二倍？になっている。

弦の振動のアナロジーが成り立っている！

7.5 まとめ

7.6 まとめ

●ウィルソンループの期待値から基底状態のポテンシャルを計算した。その際に、スメアリングという手法を用いることでより綺麗なポテンシャルを得ることが出来た。

7.6 まとめ

- ウィルソンループの期待値から基底状態のポテンシャルを計算した。その際に、スメアリングという手法を用いることでより綺麗なポテンシャルを得ることが出来た。
- 励起状態のポテンシャルを求めた。励起状態については、弦の振動のアナロジーを確かめることが出来た。