菅沼さんの話 まとめ ～ Dirac 方程式 ⇒ helicity の保存 ～

◎ QED の Lagrangian

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi$$

$$\begin{cases} F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (A_\mu : \text{4元ポテンシャル}) \quad \left(F_{\mu\nu} = \frac{i}{e}[D_\mu, D_\nu] \right) \\ \not{D} = \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) \\ m : \text{質量} \\ \gamma\text{行列の Dirac 表示} : \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\sigma^i : \text{パウリ行列} \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \\ \gamma\text{行列の反交換関係} : \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} \\ \psi : \text{ディラック場} \quad (\bar{\psi} \equiv \gamma^0\psi^\dagger) \end{cases}$$

- $A_\mu = 0$ のとき、

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

$\bar{\psi}$ に対して変分をとる

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0 \quad \text{より、} \quad (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0.$$

$p_\mu = i\partial_\mu$ より、

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0 \quad : \text{自由場の Dirac eq.}$$

$$\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \gamma^i p^i$$
$$= i\gamma^0\partial_0 - \gamma^i p^i \quad \text{なので、}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = i\gamma^0\partial_0\psi - \gamma^i p^i\psi - m\psi = 0$$

$$i\gamma^0\partial_0\psi = (\gamma^i p^i + m)\psi$$

$(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$ なので 両辺に γ^0 をかけて、更に $\beta \equiv \gamma^0$, $\alpha^i = \beta\gamma^i$ とおくと、

$$i\partial_0\psi = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m)\psi$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m$$

$$\hat{H}\varphi = E\varphi \quad : \text{時間に依存しない Dirac eq.} \quad (\psi = e^{-iEt}\varphi(x))$$

以下で $\hat{H}$ と $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$ が交換する事を確かめる。

$$\hat{H} = \alpha\cdot p + \beta m$$

$$= \begin{pmatrix} m\mathbb{1} & \sigma\cdot p \\ \sigma\cdot p & -m\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{なので}$$

$$\sigma\cdot p \equiv \sigma\cdot p \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{とすると、}$$

$[\hat{H}, \sigma\cdot p] = \hat{H}\sigma\cdot p - \sigma\cdot p\hat{H} = 0$ （$\hat{H}$に$\sigma\cdot p$と交換するものしか入っていない）

よって、ヘリシティ $h \equiv \frac{S\cdot p}{|S|\cdot|p|} = \frac{\sigma\cdot p}{|\sigma||p|}$ も $[\hat{H}, h] = 0$ をみたす。

∴ ヘリシティ h は保存量

◎ Dirac eq. $(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi_i = 0$ に左から $-(\gamma^\nu p_\nu + m)$ をかけて、

$$(-\gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu p_\mu + m^2)\psi_i = 0 \quad \cdots ☆$$

ここで
$$-\gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu p_\mu = \gamma^\nu\gamma^\mu \partial_\nu\partial_\mu$$
$$= \gamma^\nu\gamma^\mu \partial_\mu\partial_\nu \quad \text{（微分演算子は可換）}$$
$$= \gamma^\mu\gamma^\nu \partial_\nu\partial_\mu \quad (\mu \leftrightarrow \nu)$$

よって、
$$-\gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu p_\mu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\partial_\nu\partial_\mu$$
$$= g^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu \quad (\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1})$$
$$= \Box$$

☆ ⇒ $(\Box + m^2)\psi_i = 0$: Klein-Goldon eq.

◎ $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ （φ, χ は2成分）と見ると、φは粒子、χは反粒子を表していて、

2成分は スピン↑と↓を表している。

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

⊙ Maxwell eq.

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

A_μ について変分をとる。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \equiv J^\mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\left(g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}F_{\delta\gamma}F_{\alpha\beta}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\left\{(\partial_\delta A_\gamma - \partial_\gamma A_\delta)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}\left\{(\delta^\nu_\delta\delta^\mu_\gamma - \delta^\nu_\gamma\delta^\mu_\delta)F_{\alpha\beta} + F_{\delta\gamma}(\delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\beta - \delta^\nu_\beta\delta^\mu_\alpha)\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}\left\{g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}F_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}F_{\alpha\beta} + g^{\nu\delta}g^{\mu\gamma}F_{\delta\gamma} - g^{\mu\delta}g^{\nu\gamma}F_{\delta\gamma}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}(F^{\nu\mu} - F^{\mu\nu})$$

$$= F^{\mu\nu} \quad (\because F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu})$$

よって、$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \partial_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right)$ より $\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu$ …①

また、Jacobi id.

$$[A,[B,C]] + \text{cyc.} = 0$$

の A, B, C に D_μ, D_ν, D_λ を代入して、$[D_\mu, D_\nu] = \frac{e}{i}F_{\mu\nu}$ に気を付けると、

$$\left[D_\mu,[D_\nu,D_\lambda]\right] + \text{cyc.} = 0$$

$$[D_\mu, F_{\nu\lambda}] + \text{cyc.} = 0.$$

$$[\partial_\mu, F_{\nu\lambda}] + \text{cyc.} = 0.$$

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \text{cyc.} = 0. \Leftrightarrow \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0.$$

ここで、${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ として、↑に $\varepsilon^{\alpha\mu\nu\lambda}$ をかけると、

$\varepsilon^{\alpha\mu\nu\lambda}F_{\nu\lambda} = 2{}^*F^{\alpha\mu}$, $\varepsilon^{\alpha\mu\nu\lambda}F_{\lambda\mu} = 2{}^*F^{\alpha\nu}$, $\varepsilon^{\alpha\mu\nu\lambda}F_{\mu\nu} = 2{}^*F^{\alpha\lambda}$ なので、添え字を調節すると、

Bianchi 恒等式：$\partial_\nu {}^*F^{\mu\nu} = 0$ …②

①, ② より、Maxwell eq. は

$$\begin{cases} \partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu \\ \partial_\nu {}^*F^{\mu\nu} = 0 \end{cases}$$

とまとめられる。

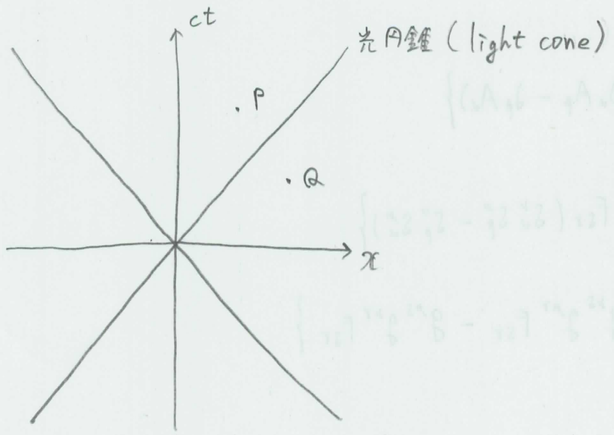
◎ パリティ変換 P

$\mathbb{E} \xrightarrow{P} -\mathbb{E}$ （極性ベクトル）

$\mathbb{B} \xrightarrow{P} \mathbb{B}$ （軸性ベクトル）

$$\left(\mathbb{B} = \nabla \times A , \quad \nabla, A \xrightarrow{P} -\nabla, -A \right)$$

◎



点 P ： 光円錐の内部（ $x^2 \equiv (ct)^2 - |\mathbb{x}|^2 > 0$ ）
原点での事象との因果関係をもつ
時間的領域（time-like）

点 Q ： 光円錐の外部（ $x^2 < 0$ ）
原点での事象との因果関係をもてない.
空間的領域（space-like）