GUAGE THEORY OF WEAK INTERACTION

前田 一弥

平成23年10月13日

1 弱い相互作用の発見

力は4種類あるよ (強い相互作用、電磁気力、弱い相互作用、重力)
弱い相互作用は全ての粒子にはたらく。
弱い相互作用によって粒子は最終的に、安定な電子、ニュートリノ、陽子へと崩壊する。
他の力と違って、弱い相互作用は束縛状態をつくらない (強→原子核、EM→原子、重→銀河とか)。

1.1 普遍フェルミ相互作用

1896年 Henri Becquerel が、ウランを写真フィルムに触れさせておくと何かの跡がつくことを発見
その数年後 Becquerel,Kaufmann,Rutherford が、ウランから β 線が出てるのを発見
1910年頃 原子の構造が確立
初め、β 線 (電子) は原子核の中に存在するものと考えられたが、それは Bohr のモデルに反していた
中性子が発見され (Chadwick 1932)、電子は中性子が陽子に変換するときに同時に発生することが判明
しかし一見するとエネルギー保存則を破っているように思われた
→観測されない粒子の存在

【EXERCISE 1.1】 二体崩壊の運動学

(問)1粒子が2粒子に崩壊したときの、崩壊後の2粒子のエネルギーは？

1930 年 Pauli は中性子崩壊の時にさらに別の粒子が放出されているにちがいないと提唱→現在でいう反電子ニュートリノ

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

中性子、陽子、電子のそれぞれが大きさ $\hbar/2$ のスピンを担うので、ニュートリノも大きさ $\hbar/2$ のスピンをもてば角運動量の保存則が満たされる。
またエネルギー保存則より、中性子と陽子の質量差 1.2934MeV が、電子とニュートリノに分配されることでエネルギー保存則も満たされる。
ニュートリノは電荷をもたず、質量は 60eV 以下であることが今日では判明している (当面はニュートリノの質量は 0 として扱う)。
1934 年 Fermi は Pauli の考え方を拡張して、以下のようにハミルトニアンに 4 つの自由粒子の相互作用の項を付け加えることで、β 崩壊を定量的に扱おうとした。

$$H_F = H_n^0 + H_p^0 + H_e^0 + H_\nu^0 + \sum_i C_i \int \mathrm{d}^3x (\bar{u_p}\hat{O}_i u_n)(\bar{u_e}\hat{O}_i u_\nu)$$

ニュートリノや電子は質量が小さいので、相対論的に扱ってやらねばならない→波動関数は Dirac 方程式の解

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_k) u_k(x) = 0, (k = \mathrm{p}, \mathrm{n}, \mathrm{e}, \nu)$$

すなわち、$u_k(x)$ は四元スピノル。そして $\hat{O}_i$ は 4×4 行列でなければならない。$\hat{O}_i$ の種類や変換の性質についてはテキストの図 1.2 参照。
$(\bar{u_p}\hat{O}_i u_n)(\bar{u_e}\hat{O}_i u_\nu) = \chi$ がローレンツスカラーであるという条件から、$\hat{O}_i$ の形が絞られる。

【EXERCISE 1.2】 Dirac 演算子のローレンツ変換

(問)$(\bar{u_p}\hat{O}_i u_n)(\bar{u_e}\hat{O}_i u_\nu) = \chi$ がローレンツスカラーとする。
このとき、$\hat{O}_i$ として可能なのは $(1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu\gamma_5, \gamma_5)$ の 5 種類のみであることを示せ。

β 崩壊のときの陽子と中性子は非相対論的に扱うことができる。
Dirac スピノルを

とあらわしたとき、非相対論的な極限では ϕ は χ より十分大きいので、

$$S, V \to \phi_p^\dagger \phi_n \ , \ T, A \to \phi_p^\dagger \sigma \phi_n \ , \ P \to 0$$

としてよい。

【EXERCISE 1.3】 遷移演算子の非相対論的極限

(問) 上の場合の非相対論的極限を求めよ。

1.2 パリティの非保存

K メソンに関して
K^+ メソンは $\pi^0\mu^+\nu$ の崩壊の他に、$\pi^+\pi^0$ 、$\pi^+\pi^+\pi^-$ という崩壊モードが存在する。
だが、パリティの保存を仮定するとこのような崩壊はあり得ない。
当初は、K^+ メソンはパリティの異なる 2 種類の粒子 (τ 、θ) からできているとも考えられていた。($\tau-\theta$ パズル)
しかし、T.D.Lee と C.N.Yang がパリティ保存則の破れという可能性を指摘し、その後すぐに C.S.Wu , E.Ambler , R.W.Hayward , D.D. Hoppes , R.P.Hudson　らによって、パリティの非保存が実験的に示された。

実験の説明

【EXERCISE 1.4】 ヘリシティ演算子の性質

(問) ヘリシティ演算子 $\hat{\Lambda}=\hat{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}/p$ が Dirac ハミルトニアン $\hat{H}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m$ と交換可能であり、固有値 ±1 を持つことを示せ。

実験により、負のヘリシティが優先されることは β 崩壊の一般的な性質であることがわかった。負のヘリシティをもつ電子のみが放出されるとすると、Wu らの実験を説明することができる。
いま、電子が z 軸から θ の角で放出されるとする。
運動量は、

$$\boldsymbol{p}=p(\boldsymbol{e}_z\cos\theta+\boldsymbol{e}_x\sin\theta)$$

ヘリシティ演算子は

$$\hat{\Lambda}_\theta=\frac{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\cdot\boldsymbol{p}}{p}=\hat{\Sigma}_z\cos\theta+\hat{\Sigma}_x\sin\theta$$

$$=\begin{pmatrix} \sigma_\theta\cos\theta+\sigma_x\sin\theta & 0 \\ 0 & \sigma_\theta\cos\theta+\sigma_x\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}
$$

そして、条件

$$\hat{\Sigma}_\theta \chi_\theta^\pm = \pm\chi_\theta^\pm$$

より、固有関数 $\chi_\theta^\pm$ が求まり (四元スピノルの上二つの成分だけを考えればよい)

$$\chi_\theta^+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta \\ \sin\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}, \chi_\theta^- = \begin{pmatrix} -\sin\frac{1}{2}\theta \\ \cos\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}$$

を得る。電子が θ 方向へ放出される確率は

$$W(\theta) = |\langle\chi_{\theta=0}^{(-)} \mid \chi_\theta^{(-)}\rangle|^2 = \cos^2\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$$

に比例する。

【EXERCISE 1.5】 ヘリシティ固有関数の回転

(問)$\hat{\Lambda}_\theta$ の固有ベクトル $\chi_\theta^{(\pm)}$ が、y 軸に関する角 θ の回転によって、固有ベクトル σ_z から得られることを示せ。

放出されたニュートリノのヘリシティを直接測定することはできないが、β 崩壊を起こした後の娘核のスピンや反跳運動量を測定してやることで間接的に推定することはできる。
M.Goldhaber , L.Grodzins , A.Sunyar が美しい実験でこれを成し遂げた。

実験の説明

Hamiltonian の相互作用の項を再び考察しよう。
上記の実験で、$\bar{u}_e\hat{O}_i u_\nu$ に含まれる波動関数は負のヘリシティをもつもののみが現れることがわかった。これを実現するには、射影演算子

$$\hat{P}_\pm = \frac{1\pm\hat{\Lambda}}{2}$$

を用いればよい。これは、任意のスピノルにおいて正負のヘリシティを分離するものである。ここで、再び四元スピノルを二つの成分に分解することを考えよう。

$$u = u^{(+)} + u^{(-)} \ , \ \hat{\Lambda}u^{(\pm)} = \pm u^{(\pm)}$$

そして

$$\hat{P}_+ u = u^{(+)} \ , \ \hat{P}_- u = u^{(-)}$$

となることがわかる。
ここで、$\hat{P}_\pm$ がローレンツ不変でないという問題点がある。正確な記述を得るために、β 崩壊で放射される電子は相対論的であることを考慮に入れる。
すなわち、$E \approx p \gg m_0$ である。Dirac 方程式

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta m_0)u = Eu$$

と、$\boldsymbol{\alpha} = \gamma_5 \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \gamma_5$ を用い、

$$\hat{P}_\pm u = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5 \frac{E - \beta m_0}{p})u \approx \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)u$$

と計算することができる。これはローレンツ不変なので、射影演算子 $\hat{P}_\pm$ のかわりに

$$\hat{P}'_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$$

を用いるのが便利である。これを、正 (負) のカイラリティをあらわす射影演算子という。
ニュートリノに関しては、(質量が 0 であると仮定すると)$\hat{P}_\pm \to \hat{P}'_\pm$ の置き換えは完全に正しいが、電子の場合は近似であることに注意。
以上をふまえて、スピノル u を負のカイラリティを持つ要素で置き換えねばならない。

$$\bar{u}_e \hat{O}_i u_\nu \to \overline{(\hat{P}'_- u_e)} \hat{O}_i (\hat{P}'_- u_\nu)$$

そして、$\overline{(\hat{P}'_- u)} = \bar{u} \hat{P}'_+$ なので、電子とニュートリノの相互作用の項は、以下のように書き直される。

$$\bar{u}_e \hat{O}'_i u_\nu \quad (\hat{O}'_i = \hat{P}'_+ \hat{O}_i \hat{P}'_-)$$

次に、S,V,T,A,P のそれぞれのタイプの演算子 $\hat{O}_i$ が、どのような $\hat{O}'_i$ に変換されるか計算する必要がある。その計算結果はテキスト表 1.3 のとおりである。
表をみると、V タイプと A タイプの演算子のみが弱い相互作用に関係していることが分かる。
よって、係数を無視すると

$$\gamma^\mu(1 - \gamma_5)$$

の形の結合のみが可能であることが分かる。→ V-A coupling
そして、Hamiltonian のローレンツ不変性から、p と n の相互作用に関わるほうの部分も同様に V と A の結合となる。正確な形は、実験より

$$\bar{u}_p \gamma^\mu (C_V + C_A \gamma_5) u_n$$

$$C_A / C_V = -1.255 \pm 0.006$$

であることがわかっている。
以上をまとめると、Hamiltonian の相互作用にかかわる部分は、

$$H_{int}(\mathrm{p}, \mathrm{n}, \mathrm{e}, \nu) = \frac{G}{\sqrt{2}} \int \mathrm{d}^3x [\bar{u}_p \gamma^\mu (C_V + C_A \gamma_5) u_n][\bar{u}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_\nu]$$

とあらわせる。
最初の $\sqrt{2}$ は歴史的な経緯でついているもの。また、$G_\beta = GC_V$ とすることもあり、この G_β を核 β 崩壊の Fermi 定数とよぶ。
パリティの破れは、核 β 崩壊でのみ起こる現象ではなく、弱い相互作用を介する崩壊において一般に起こる現象であることが Wu の実験でわかった。

実験の説明

その他
いろんなレプトンがみつかった。それぞれの世代でレプトン数が保存されることがわかった

【EXERCISE 1.6】 左手 Dirac 演算子

(問) 演算子 $\hat{O}'_i$ を計算せよ。

【EXERCISE 1.7】 Weyl 方程式

(問) 四元スピノル $\Psi' = \hat{P}'_- \Psi$ は、線形独立な成分を 2 つしか持たないことを示せ。Weyl 方程式を導け。

---

3 人物