

2. レプトン相互作用

2.1 カレント-カレント相互作用 (荷電流)

レプトン間に弱い相互作用のみ働くことを考える。

β 崩壊におけるパリティの破れから導かれる相互作用のハミルトニアン ((1.30)参照)

$$H_{int} = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3x [\bar{u}_p(x) \gamma_\alpha (C_V + C_A \gamma_5) u_n(x)] [\bar{u}_e(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_\nu(x)] \quad (2.1)$$

レプトンの寄与 $\bar{u}_e(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_\nu(x) \quad (2.2)$

は確率密度 (電磁カレント) に似た部分を含む。

$$\vec{j}^\alpha(x) = e \bar{\Psi}(x) \gamma^\alpha \Psi(x) \quad (2.3)$$

電磁カレントとの類推から 弱レプトンカレント

$$\begin{aligned} J_\alpha^{(L)}(x) &= \bar{u}_e(x) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}(x) + \bar{u}_\mu(x) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_\mu}(x) \\ &\quad + \bar{u}_\tau(x) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_\tau}(x) \\ &= J_\alpha^{(e)}(x) + J_\alpha^{(\mu)}(x) + J_\alpha^{(\tau)}(x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

(2.1)式を一般化して以下を仮定

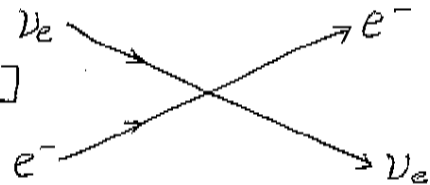
$$H_{int}^{(L)} = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3x J_\alpha^{(L)\dagger}(x) J_\alpha^{(L)}(x) \quad (2.5)$$

$H_{int}^{(L)}$ が $J_\alpha^{(L)}$ の2次式なので、各レプトンは他の2世代と同じように自分の世代とも相互作用する。

可能なダイアグラムの例

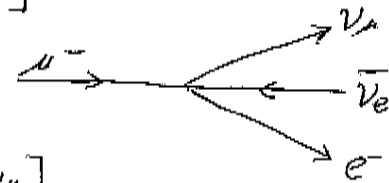
- ニュートリノ-電子散乱

$$J_\alpha^{(e)\dagger} J_\alpha^{(e)} = [\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_e] [\bar{u}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}]$$



- ミューオン崩壊

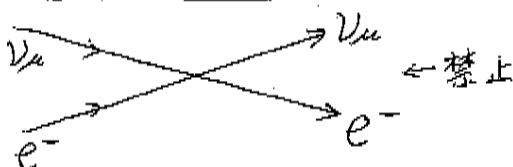
$$J_\alpha^{(\mu)\dagger} J_\alpha^{(e)} = [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_\mu] [\bar{u}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}]$$



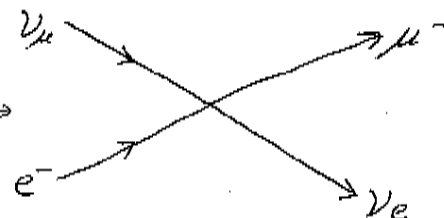
- ミュー-ニュートリノ-電子散乱による
ミューオン生成

$$J_\alpha^{(e)\dagger} J_\alpha^{(\mu)} = [\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_e] [\bar{u}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_{\nu_\mu}]$$

禁止される例



O.K. →



ν_μ と e^- は μ^- の生成を伴ってのみ相互作用可

粒子の変換 ($\nu_\mu \rightarrow \mu^-$ etc.) なしに相互作用することはできない。

ニュートリノ) が荷電レプトンに (又はその逆) 変換することになり、必ず粒子の電荷の変化を伴う。→ 荷電流

$e\bar{e}$ - mag では電荷が変わらない → 中性流

Ex. 2.1 ニュートリノ-電子交換のカレント

$$J_{(e)}^{\mu+} = \bar{u}_{\nu e} \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) u_e$$

[証明] $\gamma_5^+ = \gamma_5$, $\bar{u} = u^+ \gamma^0$ を使う

$$\begin{aligned} J_{(e)}^{\mu+} &= [\bar{u}_e \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) u_{\nu e}]^+ = \underbrace{u_{\nu e}^+}_{\text{min}} (1 - \gamma_5) \gamma^{\mu+} \underbrace{\bar{u}_e^+}_{\text{min}} \\ &= \underbrace{\bar{u}_{\nu e} \gamma^0}_{\text{min}} (1 - \gamma_5) \gamma^{\mu+} \gamma^0 u_e \end{aligned}$$

注 $\gamma^{\mu+} = \gamma^{\mu} \gamma^0$ を使う ($\gamma^{0+} = -\gamma^0$, $\gamma^{i+} = \gamma^i$)

$$\begin{aligned} J_{(e)}^{\mu+} &= \bar{u}_{\nu e} \gamma^0 (1 - \gamma_5) \gamma^0 \gamma^{\mu} u_e \\ &= \bar{u}_{\nu e} (1 + \gamma_5) \gamma^{\mu} u_e \\ &= \bar{u}_{\nu e} \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) u_e \end{aligned}$$

2.2 ミューオンの崩壊

レプトン過程の中でもミューオンの崩壊は高い精度で測定された。

時間に依存する擾動論で記述できる。

$$\Psi(x) = \hat{U}(x, x') |\Psi(x')\rangle = e^{-i\hat{H}(x-x')} |\Psi(x')\rangle \quad (2.6)$$

$|x-x'| \ll 1$ のとき \hat{U} を展開して

$$\hat{U}(x, x') \approx 1 - i\hat{H}(x-x') \quad (2.7)$$

行列要素 S が次のように定義される

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \langle \Psi_f | \Psi(x) \rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{x' \rightarrow -\infty} \langle \Psi_f | \hat{U}(x, x') | \Psi_i \rangle \\ &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{int}^{(i \rightarrow f)} + O(H_{int}^2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

ミューオンの崩壊に限定すると遷移振幅は

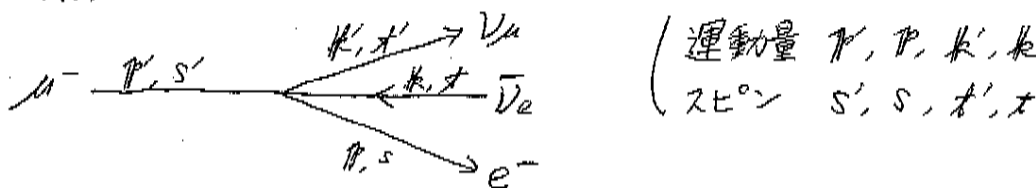
$$S_{fi} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{int}^{(i)} (\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_{\mu}) \quad (2.9)$$

2.1節よりこの反応に寄与する $H_{int}^{(i)}$ は

$$\frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3x [\bar{u}_{\nu_{\mu}}(x) \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) u_{\mu}(x)] [\bar{u}_e(x) \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}(x)] \quad (2.10)$$

1次の近似では、自由な波動関数を選ぶことができる。

\bar{u}_e は負エネルギーの波動関数として表される。平面波を用いると、
入射は



$$\begin{cases} U_{\mu}(x) = (2E_{\mu}V)^{-\frac{1}{2}} U_{\mu}(p, s) \exp(-i p_{\mu} x^{\mu}) \\ U_e(x) = (2E_e V)^{-\frac{1}{2}} U_e(p, s) \exp(-i p_{\mu} x^{\mu}) \\ U_{\bar{e}}(x) = (2E_{\bar{e}}V)^{-\frac{1}{2}} \bar{v}_{\bar{e}}(k, s) \exp(+i k_{\mu} x^{\mu}) \\ U_{\nu_{\mu}}(x) = (2E_{\nu_{\mu}}V)^{-\frac{1}{2}} U_{\nu_{\mu}}(k', s') \exp(-i k'_{\mu} x^{\mu}) \end{cases} \quad (2.11)$$

ここで

$$E_{\mu} = p^0, E_e = p^0, E_{\bar{e}} = k^0, E_{\nu_{\mu}} = k'^0 \quad (2.12)$$

$U(p, s), \bar{v}(p, s)$ は Dirac-Dirac の 2成分部分を示す

$$\begin{cases} U(p, s) = (E+m)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} \\ \bar{v}(p, s) = (E+m)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.13)$$

これを行列要素 (2.9) に代入して

$$\begin{aligned} S(\mu \rightarrow e^{-} \bar{\nu}_e \nu_{\mu}) &= -\frac{iG}{\sqrt{2}} \int d^4x \frac{\exp[-i(k'_{\mu} - p'_{\mu} + p_{\mu} + k_{\mu})x^{\mu}]}{[16(k'^0 V)(p'^0 V)(p^0 V)(k^0 V)]^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad \times [\bar{U}_{\nu_{\mu}}(k', s') \gamma_{\mu} (1-\gamma_5) U_{\mu}(p', s')] \\ &\quad \times [\bar{U}_e(p, s) \gamma^{\mu} (1-\gamma_5) \bar{v}_{\bar{e}}(k, s)] \\ &= -i(2\pi)^4 \frac{G}{\sqrt{2}} \frac{\delta^4(p+k+k'-p')}{[16V^4 k^0 k^0 p^0 p^0]^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad \times [\bar{U}_{\nu_{\mu}}(k', s') \gamma_{\mu} (1-\gamma_5) U_{\mu}(p', s')] \\ &\quad \times [\bar{U}_e(p, s) \gamma^{\mu} (1-\gamma_5) \bar{v}_{\bar{e}}(k, s)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

遷移確率を得るために (2.14) 式に Dirac 共役をかけること、因子が出る

$$[\delta^4(p+k+k'-p')]^2 = \delta^4(p+k+k'-p') \delta^4(0) \quad (2.15)$$

ここで

$$\delta^4(0) = \lim_{q \rightarrow 0} \delta^4(q) = \lim_{q \rightarrow 0} \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{i q_{\mu} y^{\mu}} = \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} = \frac{VT}{(2\pi)^4} \quad (2.17)$$

により、(2.15)式は

$$\frac{VT}{(2\pi)^4} \delta^4(p+k+k'-p') \quad (2.16)$$

となる。V, T は有限の時空間の体積。

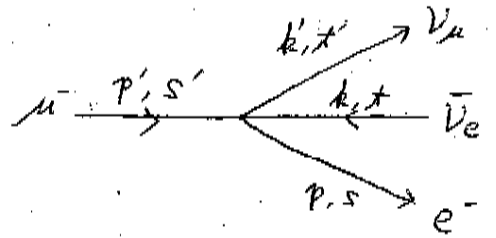
2つのニュートリノは観測できないので、全終状態について足し上げた必要があり、運動量が十分小さい区間での遷移確率を得るために電子の終状態密度をかけて、崩壊確率 (単位時間当り遷移確率) を得るために、Tで割ると

$$\begin{aligned} dW &= \frac{1}{T} \frac{V d^3p}{(2\pi)^3} V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \sum_{s, s'} |S(\mu \rightarrow e^{-} \bar{\nu}_e \nu_{\mu})|^2 \\ &= \frac{G^2}{2} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3p}{2p^0 2p^0} \int \frac{d^3k}{2k^0} \int \frac{d^3k'}{2k'^0} \delta^4(p+k+k'-p') \left(\sum_{s, s'} |M|^2 \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$M = \underbrace{[\bar{U}_{\nu_{\mu}} \gamma^{\mu} (1-\gamma_5) U_{\mu}]}_{M^{\mu}} \underbrace{[\bar{U}_e \gamma_{\mu} (1-\gamma_5) \bar{v}_{\bar{e}}]}_{E_{\mu}} \quad (2.19a) \quad (2.19b)$$

崩壊率 dW のミューオン因子の計算

$$\begin{aligned}
 X^{\mu\nu}(\mu) &= M^{\mu} M^{\nu\dagger} \\
 &= \sum_{s'} [\bar{u}_{\nu}(k', s') \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) u_{\mu}(p', s')] \\
 &\quad \times [\bar{u}_{\nu}(k', s') \gamma^{\nu} (1 - \gamma_5) u_{\mu}(p', s')]^{\dagger} \\
 &= \sum_{s'} \bar{u}_{\nu}(k', s') \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) u_{\mu}(p', s') \\
 &\quad \times \bar{u}_{\mu}(p', s') \gamma^{\nu} (1 - \gamma_5) u_{\nu}(k', s')
 \end{aligned}$$



(2.20)

Appendix B について

4元ベクトルと γ 行列のスカラ-積をスラッシュで表す。

$$\gamma^{\mu} p_{\mu} = \gamma^0 p^0 - \gamma \cdot \mathbf{p} = \not{p} \text{ etc.}$$

ディラックスピノルと γ 行列には次の関係式が成り立つ (B.15)(B.18) より

$$\sum_{s'} u_{\nu}(k', s')_{\alpha} \bar{u}_{\nu}(k', s')_{\beta} = (\not{k}' + m_{\nu})_{\alpha\beta} = \not{k}'_{\alpha\beta} \quad (\because m_{\nu} = 0) \quad (2.21)$$

ミューオンの始状態はスピ=1/2で和を取らないので、

$$u_{\mu}(p', s')_{\alpha} \bar{u}_{\mu}(p', s')_{\beta} = \left[(\not{p}' + m_{\mu}) \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}'}{2} \right) \right]_{\alpha\beta} \quad (2.22)$$

\not{s}' はスピ=1/2の4元ベクトル

$$\not{s}' = \left(\frac{p' \cdot s'}{m}, s' + \frac{(p' \cdot s') p'}{m(E' + m)} \right) \quad (2.23)$$

s' : 静止系でのスピ=1/2ベクトル

これらの式を(2.20)式に代入すると、透物カレントのミューオン寄与が得られる、

$$\begin{aligned}
 X^{\mu\nu}(\mu) &= \sum_{s'} \bar{u}_{\nu}(k', s')_{\alpha} \gamma^{\mu}_{\alpha\beta} (1 - \gamma_5)_{\beta\gamma} \left[(\not{p}' + m_{\mu}) \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}'}{2} \right) \right]_{\gamma\delta} \\
 &\quad \times \gamma^{\nu}_{\delta\epsilon} (1 - \gamma_5)_{\epsilon\zeta} u_{\mu}(p', s')_{\zeta} \\
 &= \gamma^{\mu}_{\alpha\beta} (1 - \gamma_5)_{\beta\gamma} \left[(\not{p}' + m_{\mu}) \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}'}{2} \right) \right]_{\gamma\delta} \gamma^{\nu}_{\delta\epsilon} (1 - \gamma_5)_{\epsilon\zeta} \not{k}'_{\zeta\alpha} \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

初項と終りの π で和を取ると、4x4行列のトレースをとることにたいて、

$$X^{\mu\nu}(\mu) = \text{Tr} \left\{ \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) (\not{p}' + m_{\mu}) \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}'}{2} \right) \not{k}' \gamma^{\nu} (1 - \gamma_5) \not{k}' \right\} \quad (2.25)$$

ここで $\gamma^{\alpha} \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma^{\alpha}$, $\text{Tr}\{AB\} = \text{Tr}\{BA\}$ より

$$\begin{aligned}
 X^{\mu\nu}(\mu) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ (\not{p}' + m_{\mu}) (1 + \gamma_5 \not{s}') \gamma^{\nu} \not{k}' (1 + \gamma_5) \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) \right\} \\
 &= \text{Tr} \left\{ (\not{p}' + m_{\mu}) (1 + \gamma_5 \not{s}') \gamma^{\nu} \not{k}' \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) \right\} \quad (\because (1 - \gamma_5)^2 = 2(1 - \gamma_5)) \\
 &= \text{Tr} \left\{ \not{p}' \gamma^{\nu} \not{k}' \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) + \not{p}' \gamma_5 \not{s}' \gamma^{\nu} \not{k}' \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) \right. \\
 &\quad \left. + m_{\mu} \gamma^{\nu} \not{k}' \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) + m_{\mu} \gamma_5 \not{s}' \gamma^{\nu} \not{k}' \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) \right\} \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

• γ 行列、奇数個の積のトレースは消える。

• $\gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ なので γ 4個 \rightarrow 偶数個と数える。

• スラッシュは γ 1個

第2項, 第3項は“奇” → 消え

第1項, 第4項は“偶” → 残り

$$X^{\mu\nu}(\mu) = \text{Tr} \{ \not{p}' \not{\epsilon}^{\nu} \not{k}' \not{\epsilon}^{\mu} (1 - \gamma_5) - m_{\mu} \not{\epsilon}^{\nu} \not{k}' \not{\epsilon}^{\mu} (1 - \gamma_5) \}$$

$$= \text{Tr} \{ (\not{p}' - m_{\mu} \not{\epsilon}') \not{\epsilon}^{\nu} \not{k}' \not{\epsilon}^{\mu} (1 - \gamma_5) \} \quad (2.28)$$

また、 γ 行列は次の式を用いた。

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}$$

$$\begin{cases} \text{Tr} \{ \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} \gamma^{\gamma} \gamma^{\delta} \} = 4(g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \\ \text{Tr} \{ \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} \gamma^{\gamma} \gamma^{\delta} \gamma^{\epsilon} \} = -4i \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \end{cases} \quad (2.29)$$

これを(2.28)に使うと遷移カレントの γ_5 -部分の最終的な形が得られる。

$$X^{\mu\nu}(\mu) = 4 [(\not{p}' - m_{\mu} \not{\epsilon}')^{\nu} \not{k}'^{\mu} - (\not{p}' - m_{\mu} \not{\epsilon}')^{\mu} \not{k}'^{\nu} + (\not{p}' - m_{\mu} \not{\epsilon}')^{\mu} \not{k}'^{\nu} + i \epsilon^{\alpha\nu\beta\mu} (\not{p}' - m_{\mu} \not{\epsilon}')^{\alpha} \not{k}'^{\beta}] \quad (2.30)$$

電子の寄与についても同様に得ることに注意して、

$$X_{\mu\nu}(e) = E_{\mu} E_{\nu}^{\dagger}$$

$$= \sum_{s, s'} [\bar{u}_e(p, s) \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) v_{\nu}(k, s')] [\bar{u}_e(p, s) \gamma_{\nu} (1 - \gamma_5) v_{\mu}(k, s')]^{\dagger}$$

$$= \text{Tr} \{ (\not{p} - m_e \not{\epsilon}) \gamma_{\mu} \not{k} \gamma_{\nu} (1 - \gamma_5) \} \quad (\because \text{Ex 2.2})$$

$$= 4 [(\not{p} - m_e \not{\epsilon})_{\mu} \not{k}_{\nu} - (\not{p} - m_e \not{\epsilon})^{\alpha} \not{k}_{\alpha} g_{\mu\nu} + (\not{p} - m_e \not{\epsilon})_{\nu} \not{k}_{\mu} - i \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} (\not{p} - m_e \not{\epsilon})^{\alpha} \not{k}^{\beta}] \quad (2.31)$$

(2.30), (2.31) をかいて (2.32) を得る。(Ex 2.3 で詳しく計算)

$$\sum_{s, s'} |M|^2 = X^{\mu\nu}(\mu) X_{\mu\nu}(e) = 64 (\not{p}' - m_{\mu} \not{\epsilon}')^{\alpha} \not{k}_{\alpha} (\not{p} - m_e \not{\epsilon})^{\beta} \not{k}_{\beta} \quad (2.32)$$

Ex 2.2 (2.31)式 の証明

$\not{p} \rightarrow \not{p}'$
 $m_e \rightarrow m_{\mu}$
 $\not{\epsilon} \rightarrow \not{\epsilon}'$
 $\gamma_{\mu} \rightarrow \gamma^{\nu}$
 $\not{k} \rightarrow \not{k}'$
 $\gamma_{\nu} \rightarrow \gamma^{\mu}$

と置き換えると γ_5 -部分は同じ。

$$\begin{aligned} & \text{Tr} [\not{\epsilon}^{\nu} \not{p} \not{\epsilon}^{\mu} \not{k} \not{\epsilon}^{\nu}] \\ &= 2g^{\nu\mu} \text{Tr} [\not{\epsilon}^{\sigma} \not{\epsilon}^{\tau}] \\ & \quad - \text{Tr} [\not{p} \not{\epsilon}^{\mu} \not{\epsilon}^{\nu} \not{k}] \end{aligned}$$

Ex 2.3 $\sum_{s, s'} |M|^2$ の計算

$\not{\epsilon}'_{\nu} \equiv (\not{p}' - m_{\mu} \not{\epsilon}')_{\nu}$
 $\not{\epsilon}_{\mu} \equiv (\not{p} - m_e \not{\epsilon})_{\mu}$ とおく。
 $(\not{\epsilon} \cdot \not{k}) \equiv \not{\epsilon}_{\alpha} \not{k}^{\alpha}$

$$\begin{aligned} &= 2g^{\alpha\beta} \text{Tr} [\not{\epsilon}^{\sigma} \not{\epsilon}^{\tau}] \\ & \quad - 2g^{\alpha\sigma} \text{Tr} [\not{\epsilon}^{\beta} \not{\epsilon}^{\tau}] \\ & \quad + \text{Tr} [\not{\epsilon}^{\beta} \not{\epsilon}^{\sigma} \not{\epsilon}^{\mu} \not{\epsilon}^{\nu}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \therefore \text{Tr} [\not{\epsilon}^{\sigma} \not{\epsilon}^{\tau}] \\ &= 2g^{\sigma\tau} \text{Tr} [1] \\ &= 2g^{\sigma\tau} \cdot 4 = 8g^{\sigma\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2g^{\alpha\beta} \text{Tr} [\not{\epsilon}^{\sigma} \not{\epsilon}^{\tau}] \\ & \quad - 2g^{\alpha\sigma} \text{Tr} [\not{\epsilon}^{\beta} \not{\epsilon}^{\tau}] \\ & \quad + 2g^{\alpha\tau} \text{Tr} [\not{\epsilon}^{\beta} \not{\epsilon}^{\sigma}] - \text{Tr} [\not{\epsilon}^{\beta} \not{\epsilon}^{\sigma} \not{\epsilon}^{\mu} \not{\epsilon}^{\nu}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} |M|^2 &= 16 \left[g'^{\nu} k'^{\mu} - (g' \cdot k') g^{\mu\nu} + g'^{\mu} k'^{\nu} - \epsilon^{\alpha\nu\beta\mu} g'_{\alpha} k'_{\beta} \right] \\ &\quad \times \left[g_{\mu} k_{\nu} - (g \cdot k) g_{\mu\nu} + g_{\nu} k_{\mu} + \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} g^{\alpha} k^{\beta} \right] \\ &= \dots \left(\begin{array}{l} \bullet \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = 2(\delta_{\bar{\alpha}}^{\alpha} \delta_{\bar{\alpha}}^{\beta} - \delta_{\bar{\alpha}}^{\beta} \delta_{\bar{\alpha}}^{\alpha}) \\ \quad \uparrow \text{証明は Ex 2.4} \\ \bullet \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} (g'^{\mu} k'^{\nu} + g'^{\nu} k'^{\mu}) g^{\alpha} k^{\beta} = 0 \text{ etc.} \\ \quad \text{対称} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$= 64 (g' \cdot k) (k' \cdot g)$$

Ex 2.4 ϵ の 4 成分記号の公式

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} \text{sgn}(\hat{P}) & (\alpha\beta\mu\nu) = \hat{P}(0123) \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad \text{と定義}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = -\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$$

μ, ν について縮約を $\gamma \rightarrow t$. $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\mu\nu}$ は

$$\alpha = \bar{\alpha}, \beta = \bar{\beta} \text{ or } \alpha = \bar{\beta}, \beta = \bar{\alpha} \quad \text{以外ゼロ}$$

$\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ が決まると μ, ν について 2通りだけ和を取ればよい

$$\text{Case A: } \alpha = \bar{\alpha}, \beta = \bar{\beta}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\mu\nu} &= \sum_{\mu,\nu} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\mu\nu} \\ &= \sum_{\mu,\nu} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (\because \alpha = \bar{\alpha}, \beta = \bar{\beta}) \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\text{Case B: } \alpha = \bar{\beta}, \beta = \bar{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\mu\nu} &= \sum_{\mu,\nu} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} \quad (\because \alpha = \bar{\beta}, \beta = \bar{\alpha}) \\ &= -\sum_{\mu,\nu} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = +2 \end{aligned}$$

以上より

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\mu\nu} = \begin{cases} -2 & (\alpha = \bar{\alpha}, \beta = \bar{\beta}) \\ +2 & (\alpha = \bar{\beta}, \beta = \bar{\alpha}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$= 2(\delta_{\bar{\alpha}}^{\alpha} \delta_{\bar{\alpha}}^{\beta} - \delta_{\bar{\alpha}}^{\beta} \delta_{\bar{\alpha}}^{\alpha})$$

崩壊率 $d\Gamma$ を得るために (2.32) の $\sum |M|^2$ を (2.18) に代入、積分部分

$$I_{d\Gamma} = \frac{\int d^3k}{2k^0} \frac{\int d^3k'}{2k'^0} k_{\alpha} k'_{\beta} \underbrace{\int d^4(p+k+k'-p')}_{0\text{-レベール不変}} \quad (2.33)$$

$$= A g^2 g_{\alpha\beta} + B g_{\alpha} g_{\beta} \quad (g_{\alpha} g_{\beta} = (p' - p)_{\alpha} (p' - p)_{\beta}, g^2 = g^{\alpha} g_{\alpha}) \quad (2.34)$$

よって、

(2.35)式と(2.46)式からA, Bについて解くと、

$$\begin{cases} A = \frac{\pi}{24} \Theta(\beta^0) \Theta(\beta^2) \\ B = \frac{\pi}{12} \Theta(\beta^0) \Theta(\beta^2) \end{cases}$$

(2.34)に代入して

$$I_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{24} (\beta^2 g_{\alpha\beta} + 2\beta_\alpha \beta_\beta) \Theta(\beta^0) \Theta(\beta^2) \quad (2.49)$$

スピンS'のミューオンがスピンSの電子に崩壊する場合の崩壊率は、

(2.18), (2.32), (2.49)式から

$$\begin{aligned} dW &= \frac{G}{2} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3p}{2p^0 2p^0} \int \frac{d^3k}{2k^0} \int \frac{d^3k'}{2k'^0} \sum_{\pm, \pm'} \delta^4(p+k+k'-p') |M|^2 \\ &= \frac{G}{2} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{64 d^3p}{2p^0 2p^0} I_{\alpha\beta} (\gamma' - m_\mu S')^\alpha (\gamma - m_e S)^\beta \\ &= \frac{G}{3} \frac{\pi d^3p}{(2\pi)^5 p^0 p^0} \left[\underbrace{(\gamma' - \gamma)^2}_{\beta^2} (\gamma' - m_\mu S')^\alpha (\gamma - m_e S)_\alpha \right. \\ &\quad \left. + 2(\gamma' - \gamma)_\alpha (\gamma' - m_\mu S')^\alpha (\gamma' - \gamma)_\beta (\gamma - m_e S)^\beta \right] \\ &\quad \times \Theta(\gamma^0 - \gamma'^0) \Theta((\gamma' - \gamma)^2) \end{aligned} \quad (2.50)$$

上式から、時間遅れの効果でミューオンの寿命が延びるに気が分かる。
ミューオンが動いている系で $p'^0 = \gamma m_\mu$ なので $dW \propto \frac{1}{\gamma}$
寿命 $\tau_\mu \propto \gamma$ と γ 倍のびる。

次に、ミューオンの静止系で、 $p'^\alpha - p^\alpha = (m_\mu - p^0, -\mathbf{p})$

$$\begin{aligned} (p' - p)^2 &= (m_\mu - p^0)^2 - p^2 = (m_\mu - p^0)^2 - (p^{0^2} - m_e^2) \\ &= -2p^0 m_\mu + m_\mu^2 + m_e^2 \end{aligned}$$

$(p' - p)^2 > 0$ から、 dW が消えないための条件なので、 p^0 に制限が付き、

$$p^0 < p_{max}^0 = (m_\mu^2 + m_e^2) / 2m_\mu$$

したがって

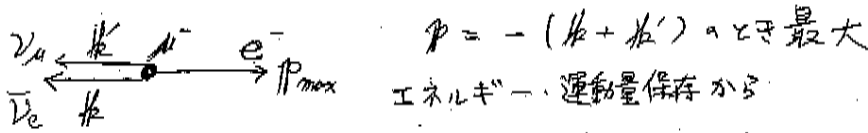
$$p'^0 - p^0 = m_\mu - p^0 > m_\mu - p_{max}^0 = \frac{m_\mu^2 - m_e^2}{2m_\mu} > 0$$

$p^0 < p_{max}^0$ とき必ず $\Theta(p'^0 - p^0) = 1$ なので、これを $\Theta(p_{max}^0 - p^0)$ に置き換えて、
ミューオンの静止系では $S'^\mu = (0, \mathbf{S}')$ となるから、

$$\begin{aligned} dW(\mathbf{S}') &= \frac{G^2}{3} \frac{\pi d^3p}{(2\pi)^5 p^0} \left\{ [(m_\mu - p^0)^2 - p^2] [(p^0 - m_e S^0) + \mathbf{S}' \cdot (\mathbf{p} - m_e \tilde{\mathbf{S}})] \right. \\ &\quad \left. + 2[m_\mu - p^0 - \mathbf{S}' \cdot \mathbf{p}] [(m_\mu - p^0)(p^0 - m_e S^0) + \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} - m_e \tilde{\mathbf{S}})] \right\} \\ &\quad \times \Theta(p_{max}^0 - p^0) \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S} + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{p}}{m_e(p^0 + m_e)} \quad : \text{電子のスピンのベクトルの空間成分}$$

Ex 2.5 ミューオン崩壊における電子のエネルギーの最大値



$$m_\mu = p_{max}^0 + k^0 + k'^0 = p_{max}^0 + |k| + |k'| = p_{max}^0 + |p_{max}^0|$$

$$= p_{max}^0 + [(p_{max}^0)^2 - m_e^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow p_{max}^0 = \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2m_\mu} = 52.83 \text{ MeV}$$

$$|p_{max}| = \frac{m_\mu^2 - m_e^2}{2m_\mu} //$$

2.3 ミューオンの寿命

電子スピン S は和をとり、ミューオンスピン S' は平均をとるので、

$$\frac{1}{\tau_\mu} = W_\mu = \frac{1}{2} \sum_{S, S'} \int dW$$

電子のスピンの平均 $\langle S \rangle = 0$ や (2.56) を使うと、

$$W_\mu = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3} [1 - 8\beta + 8\beta^3 - \beta^4 - 12\beta^2 \ln \beta], \quad \beta \equiv \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \sim \left(\frac{1}{200}\right)^2$$

β の影響は小さくて、

$$W_\mu = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3} (1 - 1.87 \times 10^{-4}) \quad (2.58)$$

もし $\beta = 1$ とすると ($m_\mu = m_e$) $W_\mu = 0$ つまりミューオンが粒子の種類を変えないような崩壊は起こさない。

(2.58) 式は放射による補正を含んでいない。(制動放射 etc. 図 2.3)

これらの補正を含めると

$$1 - \frac{\alpha}{2\pi} \left(\pi^2 - \frac{25}{4}\right) = 0.9958 \dots$$

となり、 β による影響より大きい。以上より

$$W_\mu = \frac{1}{\tau_\mu} = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi} \left(\pi^2 - \frac{25}{4}\right) - \beta \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \dots\right)$$

これをミューオンの平均寿命の実験値と比較することでフェルミ結合定数 G が求まる。

$$\tau_\mu = (2.19703 \pm 0.00004) \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$W_\mu = \tau_\mu^{-1} = 2.996 \times 10^{-16} \text{ MeV}$$

$$m_\mu = (105.658387 \pm 0.000034) \text{ MeV}$$

$$\rightarrow G = (1.16637 \pm 0.00002) \times 10^{-11} \text{ MeV}^{-2}$$

G は次元を持つので $ele. mag$ と直接比べることはできない。

粒子の質量が増すと、結合は強くなるので、質量との比をとって

$$\frac{E_{\mu}^{-1}}{m_{\mu}} = \frac{W_{\mu}}{m_{\mu}} \approx \frac{1}{142\pi^2} (Gm_{\mu}^2)^2 \quad \text{実効的な結合定数 (無次元)}$$

GM^2 が微細構造定数 α と一致するような質量 M を求めると

$$GM^2 = \alpha \rightarrow M = \sqrt{\frac{\alpha}{G}} = 25 \text{ GeV}$$

→ 弱い相互作用の新情報

Ex. 2.6 ニュートリノの質量が有限の場合 $\beta = -1$ の崩壊

(2a)(2c) の計算に q^{α} が時間成分だけになった系を用いる。 (2.49) 式の一般化

$$\tilde{q}^{\alpha} = (\tilde{q}^0 = \sqrt{q^2}, 0)$$