§2.4 ミューオンの崩壊におけるパリティの破れ

ミューオンが偏極している場合と、そうでない場合の2つのケースを考える。

ケース1. 偏極していない場合.

電子のヘリシティーを調べてやることで、パリティの破れを見つける。
ミューオンは勝手なスピンを持つ場合を想定しているので、s'について平均をとる。
(2.54)式より、

$$
\begin{aligned}
d\tilde{W} &= \frac{1}{2}\sum_{s'} dW \\
&= \frac{G^2}{3}\frac{\pi d^3p}{(2\pi)^5 p^0}\left[\left\{3(m_\mu-p^0)^2-\mathbb{p}^2\right\}(p^0-m_e s^0)+2(m_\mu-p^0)(\mathbb{p}^2-m_e\,\mathbb{p}\cdot\mathbb{s})\right] \qquad (2.66) \\
&= \frac{G^2}{3}\cdot\frac{\pi d^3p}{(2\pi)^5 p^0}\left[\left\{3(m_\mu-p^0)^2-\mathbb{p}^2\right\}(p^0-\mathbb{p}\cdot\mathbb{s})+2(m_\mu-p^0)(\mathbb{p}^2-p^0(\mathbb{p}\cdot\mathbb{s}))\right]
\end{aligned}
$$

※特に断らない限り、ミューオンの静止系で考える。

従って、電子のヘリシティーの期待値は、

$$
\begin{aligned}
\langle\Lambda\rangle &= \frac{d\tilde{W}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{s}=|\mathbb{p}|)-d\tilde{W}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{s}=-|\mathbb{p}|)}{d\tilde{W}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{s}=|\mathbb{p}|)+d\tilde{W}(\mathbb{p}\cdot\mathbb{s}=-|\mathbb{p}|)} \\
&= -\frac{|\mathbb{p}|}{p^0}\cdot\frac{3p^0_{max}-2p^0-\frac{m_e^2}{m_\mu}}{3p^0_{max}-2p^0-\frac{m_e^2}{p^0}} \qquad (2.70)
\end{aligned}
$$

となる。特に高エネルギー極限（ $E=p^0\gg m_e$ ）では、

$$
\langle\Lambda\rangle \simeq -\frac{E-\frac{m_e^2}{m_\mu}}{E-\frac{m_e^2}{E}} = -\frac{1-\frac{m_e^2}{m_\mu E}}{1-\frac{m_e^2}{E^2}} \simeq -1+\mathcal{O}\left(\frac{m_e^2}{E^2}\right)
$$

のようになり、ほぼ完全に左巻きになることが分かる。（確かにパリティが破れている。）

ケース2　偏極している場合

偏極したミューオンの崩壊生成物である電子の角分布からパリティの破れを見る。今度は、$\mathbb{S}'$ は固定し、電子のスピンを測定しない(区別しない)ので、S については和をとる。(2.50)より、

$$d\bar{W} = \sum_{s} dW$$

$$= \frac{2G^2}{3(2\pi)^3} \cdot m_\mu |\mathbb{P}| p^0 dp^0 \sin\theta d\theta \times \Theta(p^0_{max} - p^0)$$

$$\times \left[\left(3p^0_{max} - 2p^0 - \frac{m_e^2}{p^0}\right) + \frac{|\mathbb{P}|}{p^0} \cos\theta \left(p^0_{max} - 2p^0 + \frac{m_e^2}{m_\mu}\right) \right] \qquad (2.72)$$

を得る。ただし、$\hat{\mathbb{S}}' \cdot \mathbb{P} = |\mathbb{P}| \cos\theta$ である。この式は、

$$d\bar{W} = Ⓐ + Ⓑ \cos\theta .$$

という形をしており、パリティ変換 $\theta \mapsto \pi - \theta$ によって、第2項が符号を変えてしまう!
(この式の形は、電磁相互作用による補正が入っても維持される。)

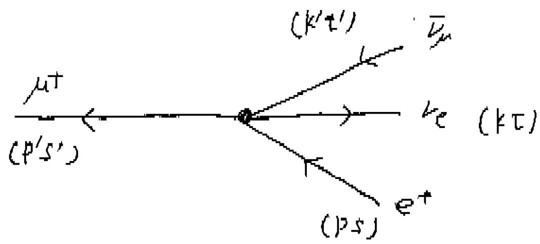
(Ex 2.10). ミューオンの崩壊におけるCP不変性.

$\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$; において、C, P は各々破れているが、CP は破れないことを見る。

まず、C が破れていることを見るため、反粒子の崩壊 $\mu^+ \to e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ の遷移確率を計算する。S行列は、

$$S = -i\int d^4x \frac{G}{\sqrt{2}}\left[\bar{U}_\mu(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)U_{\nu_\mu}(x)\right]\left[\bar{U}_{\nu_e}(x)\gamma_\mu(1-\gamma_5)U_e(x)\right]$$

である。従って、



$$dW = \frac{G^2}{2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^5}\cdot\frac{d^3p}{2p^0\,2p'^0}\int\frac{d^3k}{2k^0}\int\frac{d^3k'}{2k'^0}\,\delta^4(p+k+k'-p')\sum_{\tau,\tau'}|M|^2$$

$$\text{where}\quad M = \left[\bar{v}_\mu\gamma^\mu(1-\gamma_5)v_{\nu_\mu}\right]\left[\bar{u}_{\nu_e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)v_e\right]$$

を計算すれば良い。結果は、μ^-の崩壊の式において、

$$\begin{array}{l} (m_\mu \to -m_\mu) \\ s \to -s \qquad , \qquad \mu \leftrightarrow \nu \\ s' \to -s' \end{array}$$

とすれば得られることが分かる。

$$\begin{array}{ccc} \mu^-\text{の崩壊} & & \mu^+\text{の崩壊} \\ \sum|M|^2 = 64[(p-m_e s)\cdot k'][(p'-m_\mu s')\cdot k] & \xrightarrow{C} & 64[(p+m_e s)\cdot k'][(p'+m_\mu s')\cdot k] \end{array}$$

ところが、パリティ変換によって　P : $s\cdot k' \longmapsto -s\cdot k'$　などのようになることから、

$$\xrightarrow{P}\ 64[(p+m_e s)\cdot k'][(p'+m_\mu s')\cdot k]$$

である。従って、C, P を続けて行えば、$\sum|M|^2$ が不変になることが分かった。

(CPの破れが問題になるのは、クォークを考えたときである。)

§ Michel パラメータ

ここでは、ある現象を V-A 理論で記述するのが妥当かどうかを判定する方法について述べる。

まず、V-A 理論をいったん忘れて、相互作用を次のような一般的な形で書く。

$$H_{int} = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3x \sum_{i=1}^{16} \left[\bar{u}_{\nu_\mu} \hat{\Theta}_i u_\mu \right] \left[\bar{u}_e \hat{\Theta}^i (A_i + A_i' \gamma_5) u_{\nu_e} \right] \qquad (2.74)$$

これはちょうど、(2.10) の一般化になっている。（スカラー型やテンソル型の相互作用も含まれている。）慣習上の理由により、(2.74) を Fierz 変換した形で議論する。

$$H_{int} = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3x \sum_{i=1}^{16} \left[\bar{u}_e \hat{\Theta}_i u_\mu \right] \left[\bar{u}_{\nu_\mu} \hat{\Theta}^i (C_i + C_i' \gamma_5) u_{\nu_e} \right] \qquad (2.76)$$

このハミルトニアンを用いて、以前と同じように dW を計算すれば良い。その結果 (2.81) のように、4つのパラメータ $(\rho, \xi, \eta, \delta)$ を含む形で dW が求まる。実験でこのパラメータを測定し、V-A 型の理論を仮定した場合の値、$(\frac{3}{4}, 1, 0, \frac{3}{4})$ に一致すれば、V-A 理論が正しいと結論できる。

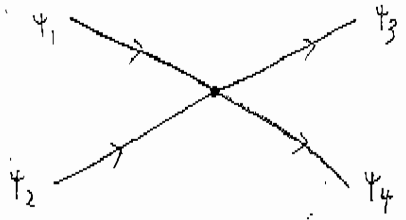
※ 計算のポイント.

① $\mathrm{Tr}[$奇数コの $\gamma^\mu] = 0$ であることから、$(\hat{\Theta}_i, \hat{\Theta}^i)$ の組み合わせは、
(S, S) (S, P) (P, S) (P, P) (V, A), (A, V) (V, V) (A, A), (T, T), …
に制限される。

② $k^\mu k^\nu$ に関する反対称な項は、対称テンソル $I_{\alpha\beta}$ と縮約をとることにより、dW には寄与しない。

③ $\sum_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$ のような計算をした後は、計算の結果を $\frac{1}{2}$ する。
(2.76) の $\hat{\Theta}^i$ のうち、T 型として独立なものは 6コ であるので、和 $\sum_{\mu\nu}$ は重複が生じてしまうためである。

※ Fierz変換



フェルミ型の相互作用では、左図の反応は、

「ψ_1がψ_3，ψ_2がψ_4に遷移」
「ψ_1がψ_4，ψ_2がψ_3に遷移」

したと、2通りの見方があり、等価である。

前者. $\displaystyle\sum_{i=1}^{16} C_i (\bar\psi_3 \hat{O}_i \psi_1)(\bar\psi_4 \hat{O}^i \psi_2)$

後者. $\displaystyle\sum_{i=1}^{16} C_i' (\bar\psi_4 \hat{O}_i \psi_1)(\bar\psi_3 \hat{O}^i \psi_2)$

↳ 一般的な相互作用を仮定。

1	γ_μ	$\sigma_{\mu\nu}$	$\gamma_5\gamma_\mu$	$i\gamma_5$
$\hat{O}_1$	$\hat{O}_2 \sim \hat{O}_5$	$\hat{O}_6 \sim \hat{O}_{11}$	$\hat{O}_{12} \sim \hat{O}_{15}$	$\hat{O}_{16}$

$$
\begin{aligned}
\sum_i C_i (\bar\psi_3 \hat{O}_i \psi_1)(\bar\psi_4 \hat{O}^i \psi_2) = \; & C_1 (\bar\psi_3 1 \psi_1)(\bar\psi_4 1 \psi_2) \\
& + C_2 (\bar\psi_3 \gamma_0 \psi_1)(\bar\psi_4 \gamma^0 \psi_2) \\
& + C_3 (\bar\psi_3 \gamma_1 \psi_1)(\bar\psi_4 \gamma^1 \psi_2) \\
& + C_4 (\bar\psi_3 \gamma_2 \psi_1)(\bar\psi_4 \gamma^2 \psi_2) \\
& + C_5 (\bar\psi_3 \gamma_3 \psi_1)(\bar\psi_4 \gamma^3 \psi_2) \\
& + \cdots
\end{aligned}
$$

これは、相互作用項のLorentz不変性から、

$$
\begin{aligned}
\sum_i C_i (\bar\psi_3 \hat{O}_i \psi_1)(\bar\psi_4 \hat{O}^i \psi_2) = \; & C_S (\bar\psi_3 1 \psi_1)(\bar\psi_4 1 \psi_2) \\
& + C_V (\bar\psi_3 \gamma_\mu \psi_1)(\bar\psi_4 \gamma^\mu \psi_2) \\
& + \cdots
\end{aligned}
$$

とまとめられるはずなので、$C_1 \sim C_{16}$ は勝手な値はとれない。SVTAPによって、係数が決まる。

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
C_2 = \cdots = C_5 = C_V & \cdots & \text{V type} \\
C_6 = \cdots = C_{11} = C_T & \cdots & \text{T type} \\
C_{12} = \cdots = C_{15} = -C_A & \cdots & \text{A type}
\end{array}
\right.
\qquad
\left\{
\begin{array}{lll}
C_1 = C_S & \cdots & \text{S type} \\
C_{16} = C_P & \cdots & \text{P type}
\end{array}
\right.
$$

任意の $\psi_1 \sim \psi_4$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{16} C_i (\bar{\psi}_{3\gamma} \hat{O}_{i\,\gamma\alpha} \psi_{1\alpha})(\bar{\psi}_{4\delta} \hat{O}^{i}_{\delta\beta} \psi_{2\beta}) = \sum_{i=1}^{16} C_i' (\bar{\psi}_{4\delta} \hat{O}_{i\,\delta\alpha} \psi_{1\alpha})(\bar{\psi}_{3\gamma} \hat{O}^{i}_{\gamma\beta} \psi_{2\beta})$$

が成り立つためには、各成分についても等式が成り立たないといけない。

$$\sum_{i=1}^{16} C_i (\hat{O}_i)_{\gamma\alpha} (\hat{O}^i)_{\delta\beta} = \sum_{i=1}^{16} C_i' (\hat{O}_i)_{\delta\alpha} (\hat{O}^i)_{\gamma\beta} \quad \cdots \quad (5)$$

これを、C_i について解いていく。C_i と C_j' の変換行列を、

$$C_i = \sum_j \Lambda_{ij} C_j'$$

とおく。これを、Fierz 変換という。(5) の両辺に $(\hat{O}^l)^{\alpha\gamma} (\hat{O}_l)^{\beta\delta}$ をかける。

$$\sum_{i=1}^{16} C_i (\hat{O}_i)_{\gamma\alpha} (\hat{O}^l)^{\alpha\gamma} (\hat{O}^i)_{\delta\beta} (\hat{O}_l)^{\beta\delta} = \sum_{i=1}^{16} C_i' (\hat{O}_i)_{\delta\alpha} (\hat{O}^l)^{\alpha\gamma} (\hat{O}^i)_{\gamma\beta} (\hat{O}_l)^{\beta\delta}$$

$$\sum_{i=1}^{16} C_i \underbrace{\mathrm{Tr}[\hat{O}_i \hat{O}^l]}_{4\delta^l_i \varepsilon_l} \underbrace{\mathrm{Tr}[\hat{O}^i \hat{O}_l]}_{4\delta^i_l \varepsilon_l} = \sum_{i=1}^{16} C_i' \mathrm{Tr}[\hat{O}_i \hat{O}^l \hat{O}^i \hat{O}_l]$$

$$16 \sum_{i=1}^{16} C_i \delta^l_i (\varepsilon_l)^2 = \sum_{i=1}^{16} C_i' \mathrm{Tr}[\hat{O}_i \hat{O}^l \hat{O}^i \hat{O}_l]$$

$$\therefore \quad C_l = \frac{1}{16} \sum_{j=1}^{16} C_j' \mathrm{Tr}[\hat{O}_j \hat{O}^l \hat{O}^j \hat{O}_l]$$

$$= \sum_j \tilde{\Lambda}_{lj} C_j'$$

$$\tilde{\Lambda}_{lj} = \frac{1}{16} \mathrm{Tr}[\hat{O}_j \hat{O}^l \hat{O}^j \hat{O}_l]$$

$$= \frac{1}{16} \mathrm{Tr}[\hat{O}^j \hat{O}^l \hat{O}_j \hat{O}_l]$$

$$= \frac{1}{16} \mathrm{Tr}[\hat{O}_l \hat{O}^j \hat{O}^l \hat{O}_j] = \tilde{\Lambda}_{jl} \quad \text{（対称行列）}$$

よって、

$$C_i = \sum_{j=1}^{16} C_j' \tilde{\Delta}_{ij}$$

$$= C_1' \tilde{\Delta}_{i1} + \sum_{j=2}^{5} C_j' \tilde{\Delta}_{ij} + \sum_{j=6}^{11} C_j' \tilde{\Delta}_{ij} + \sum_{j=12}^{15} C_j' \tilde{\Delta}_{ij} + C_{16}' \tilde{\Delta}_{i16}$$

$$= C_S \underbrace{\tilde{\Delta}_{i1}}_{\Delta_{iS}} + C_V \underbrace{\left(\sum_{j=2}^{5} \tilde{\Delta}_{ij} \right)}_{\Delta_{iV}} + C_T \underbrace{\left(\sum_{j=6}^{11} \tilde{\Delta}_{ij} \right)}_{\Delta_{iT}} - C_A \underbrace{\left(\sum_{j=12}^{15} \tilde{\Delta}_{ij} \right)}_{\Delta_{iA}} - C_P \underbrace{\tilde{\Delta}_{i16}}_{\Delta_{iP}}$$

$$= \sum_{J} \Delta_{iJ}$$

一般に
$$\Delta_{IJ} = \sum_{j \in J} \varepsilon^I \varepsilon^J \tilde{\Delta}_{ij} \qquad (i \in I)$$

$$\varepsilon^I = \begin{cases} +1 & I = S, V, T \\ -1 & I = A, P \end{cases}$$

と書ける。