

## 2.6 Tau Lepton

• 質量  $m_\tau = 1784 \pm 3 \text{ MeV}$ , 寿命  $T_\tau = (3.4 \pm 0.5) \times 10^{-13} \text{ s}$  (2.87)

• 崩壊: muon と完全に同じ.  $\mu$  と  $e$  の両方にも崩壊する.

$$\tau^- \rightarrow \begin{cases} \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_e \\ e^- + \bar{\nu}_e + \nu_e \end{cases}$$

ハドロンにも崩壊できる (今は考えない).

• 性質:  $\mu, e$  と同じようにふるまう (e $\mu\tau$  universality)

$\mu$  や  $e$  の崩壊に Michel parameter を用いて論じることができ、実験から

$$P_e = 0.742 \pm 0.035 \pm 0.020$$

より  $\tau$  も  $V-A$  coupling することを示唆する.

•  $g_W = g_{W^{\pm}}$  は,  $m_{W^\pm} \leq 170 \text{ MeV}$  の上限がつけられるが,  $m_{W^\pm} \sim 0$  としてよいと予想される.

• 中性粒子の weak current が

$$J_\alpha^{(0)}(x) = \bar{\psi}_\tau(x) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_\mu(x)$$

と書けるとするなら,  $\tau$  の崩壊率は  $\mu$  粒子と同じく計算できる.

$$W_{\tau \rightarrow e} = \frac{G^2 m_e^5}{192 \pi^3} = W_{\mu \rightarrow e} \left( \frac{m_\tau}{m_\mu} \right)^5 = 0.620 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$$

$$W_{\tau \rightarrow \mu} = \frac{G^2 m_e^5}{192 \pi^3} \left( 1 - 8 \left( \frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 \right) = W_{\mu \rightarrow e} \left( \frac{m_\tau}{m_\mu} \right)^5 \left( 1 - 8 \left( \frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 \right)$$

$$= 0.603 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$$

( $m_e$  は  $m_\mu, m_\tau$  に比べて無視し,  $\frac{m_\tau}{m_\mu} = 16.86$  を用いた.)

崩壊比は、

$$W_{\tau \rightarrow \mu} / W_{\tau \rightarrow e} = 1 - 8 \left( \frac{m_{\mu}}{m_{\tau}} \right)^2 = 0.972$$

実験値は  $0.9 \pm 1$

また、実験で得た  $B_{\tau \rightarrow e} = \frac{W_{\tau \rightarrow e}}{W_{\tau}} = 17.7 \pm 0.4$  と、理論からの  $W_{\tau \rightarrow e}$  を用いて

理論からの  $\tau$  粒子の寿命の予想は

$$\tau_{\tau} = \frac{B_{\tau \rightarrow e}(\text{実験})}{W_{\tau \rightarrow e}(\text{理論})} = (2.6 \pm 0.2) \times 10^{-13} \text{ s}$$

これは実験値 (2.87) と予盾はしていない。

⇒ よて、coupling constant  $G$  は、 $\tau, \mu$  の崩壊でほとんど変化しない。

## ② $\tau$ レプトンの発見

$e^+e^-$  の散乱実験で

$$e^+e^- \rightarrow \begin{cases} e^+\mu^- \\ e^+\mu^+ \end{cases} + (\text{少なくとも2つの粒子}) \quad \text{というイベントがあり、}$$

- 1). 3.6 ~ 3.7 GeV あたりにこのイベントのしきい値がある
- 2). 生成される  $e$  と  $\mu$  は反対方向に放出されやすい。

⇒  $e^-e^+ \rightarrow \tau\tau^+$  と経て  $e^-\mu^+$  に崩壊していた。

・  $\tau$  は何物か？

- 1).  $\tau$  レプトン なら  $\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_{\tau}$
- 2). ボソン なら  $\tau^- \rightarrow e^- + \nu_e$  という反応がある。

(しかし、2) は電子の運動量分布から否定

⇒  $\tau$  は重いレプトンである。

### 3. Fermi Theory の限界

#### 3.1 中性カレント

Fermi 理論では中性カレント過程

$$\begin{aligned} e^- + \nu_\mu &\rightarrow e^- + \nu_\mu \\ e^- + \bar{\nu}_\mu &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_\mu \end{aligned}$$

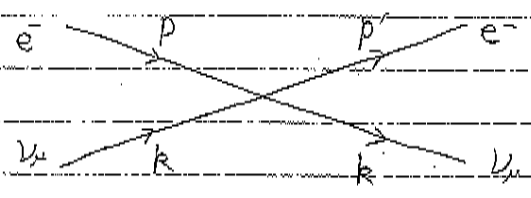
は存在しないが、実験では実際に観測された。相互作用は、中性カレント

$$\bar{\psi}_\mu(x) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_\mu(x), \quad \bar{\psi}_e \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_e$$

をつけ加えて、理論を立てる。

#### 3.2 $\nu_\mu$ と $e^-$ の散乱

$$H_{int} = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3x \left[ \bar{\psi}_e \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_e \right] \left[ \bar{\psi}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_\mu \right]$$



終状態では全ての和をとり、始状態のスピニについては平均をとった断面積

$$\bar{\sigma}(e\nu_\mu \rightarrow e\nu_\mu) = \frac{G^2}{8\pi^2} \frac{1}{16(k \cdot p)} \int \frac{d^3k'}{k'^0} \int \frac{d^3p'}{p'^0} \delta(p' + k' - p - k) \cdot \frac{1}{2} \sum_{\substack{s, s' \\ t, t'}} |M|^2 \quad (3.4)$$

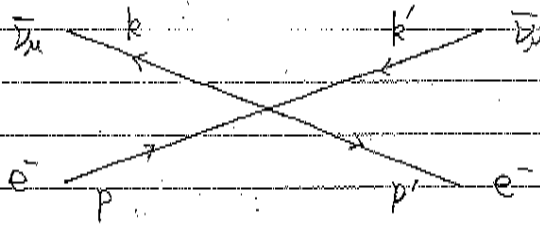
ただし

$$M = \left[ \bar{u}_\nu(k', t') \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_\nu(k, t) \right] \left[ \bar{u}_e(p', s') \gamma^\alpha (g_V - g_A \gamma_5) u_e(p, s) \right] \quad (3.5)$$

スピニについての和と、積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{G^2}{8\pi} s \left( 1 - \frac{m_e^2}{s} \right)^2 \left[ (g_V^2 + g_V g_A + g_A^2) - \left( \frac{1}{2} g_V^2 + \frac{1}{2} g_V g_A + g_A^2 \right) \frac{m_e^2}{s} + \frac{1}{4} (g_V^2 - g_A^2) \frac{m_e^4}{s^2} \right] \\ &\approx \frac{G^2}{8\pi} s (g_V^2 + g_V g_A + g_A^2) \quad \left( \frac{m_e^2}{s} \ll 1 \right) \end{aligned}$$

### 3.3 $\bar{\nu}_\mu$ と $e^-$ の 散乱.



反粒子は incoming と outgoing が入れかわることに注意すると、 $g_A \rightarrow -g_A$  で得られる。

$$\begin{aligned} \sigma(e^- \bar{\nu}_\mu \rightarrow e^- \bar{\nu}_\mu) &= \frac{G^2}{32\pi} s \left(1 - \frac{m_e^2}{s}\right) \left[ (g_V^2 - g_V g_A + g_A^2) - \left(\frac{1}{2} g_V^2 - \frac{1}{2} g_V g_A + g_A^2\right) \frac{m_e^2}{s} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (g_V^2 - g_A^2) \frac{m_e^4}{s^2} \right] \\ &\simeq \frac{G^2}{32\pi} s (g_V^2 - g_V g_A + g_A^2) \end{aligned}$$

実験によると

$$g_V = 0.043 \pm 0.063, \quad g_A = -0.545 \pm 0.056$$

よって、中性弱カレントは電子に対してはほぼ軸性ベクトル型の couple を作る。

WS theory で、 $g_V, g_A$  の値については理解できる。

### 3.4 ニュートリノと電子の散乱の高エネルギーのふるまい.

Fermi の理論の問題点.

1) 中性カレントが存在しないこと ← さっきのように導入できる。

2) 散乱断面積が  $s$  に従って大きくなること.

$$\sigma(\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = \frac{G^2}{32\pi} s \left(1 - \frac{m_e^2}{s}\right) \left(1 - \frac{m_e^4}{s^2}\right)$$

$$\sigma(\nu_e e^- \rightarrow \bar{l} \nu_e) = \frac{G^2}{\pi} s \left(1 - \frac{m_l^2}{s}\right)^2 \quad l = e, \mu, \tau$$

$e^- \nu_e \rightarrow \bar{l}_i \nu_e$  の微分断面積は等方的となる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2}{4\pi^2} S \left(1 - \frac{m_l^2}{S}\right)^2$$

微分断面積の一般的な形は。

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{cm}}\right)_{\lambda_i \lambda_f \lambda_i' \lambda_f'} = \frac{1}{p^2} \left| \sum_J (2J+1) d_{\lambda_i \lambda_i'}^J(\theta) T_{\lambda_f \lambda_f'}^J \right|^2$$

では、 $p^2 = \frac{1}{4S} \left( (S - m_1 - m_2)^2 - 4m_1 m_2 \right)$  であるので、 $S \rightarrow \infty$  では

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{cm}} \rightarrow \frac{1}{S} \left| \sum_J (2J+1) P_J(\cos\theta) T^J \right|^2$$

$S$ : 波の寄与は、 $\frac{d\sigma}{d\Omega} (J=0) = \frac{1}{S} |T^{J=0}|^2 \leq \frac{1}{S}$  (unitarity bound)

よって、 $S \gg m_i^2$  として、

$$\sigma(\nu_e e^- \rightarrow \bar{l}_i \nu_e) \simeq \frac{G^2}{4\pi^2} S \times 4\pi = \frac{G^2}{\pi} S \leq \frac{4\pi}{S} |T^{J=0}| \leq \frac{4\pi}{S}$$

よって、 $S \leq \frac{2\pi}{G} = (734 \text{ GeV})^2$  を得る。

\*  $\sigma$  は振動で計算されているので、 $\sigma \propto S$  が unitarity bound に

反しているわけではなく、高次の振動を考慮することで解決が期待される。

しかし、Fermi theory では高次の振動計算が困難である。

問3.1.  $\sigma_{\text{tot}} = 1$  となる平均電磁断面積が

$$\bar{\sigma} = \frac{G^2}{2\pi^2} \frac{1}{16(k \cdot p)} \int \frac{d^3k'}{2k^0} \int \frac{d^3p'}{2p^0} \delta(k' + p' - k - p) \cdot \frac{1}{2} \sum_{\epsilon, \epsilon'} |M|^2$$

と書けることを示す問題。全断面積は、単位体積、単位時間の遷移率

$$W = \frac{1}{VT} |\mathcal{S}|^2 \quad \epsilon.$$

$$\text{ビーム粒子 (電子)} \text{ の } \gamma\text{-速度 } J = \frac{1}{V} |w_2 - w_1| = \frac{1}{V} \left| \frac{k}{k^0} - \frac{p}{p^0} \right|$$

$$= \frac{1}{k^0 p^0 V} |p^0 k - k^0 p| = \frac{\sqrt{(k \cdot p)^2 - m_1^2 m_2^2}}{k^0 p^0 V} \quad (p \cdot k) = (p^0 k^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{k})$$

$$= \frac{(k \cdot p)}{k^0 p^0 V} = \frac{(p^0 \cdot m_2)(k^0 - m_1) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{k^0 p^0 V} = \frac{2p^0 k^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{k^0 p^0 V}$$

と、4-ベクトルの密度  $\rho = \frac{1}{V}$  を割れば得られる。

問3.2.  $\bar{\sigma}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-$  の微分断面積を計算する問題。

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$  は、終状態の運動量積分を、角度部分を残して積分して得られる。

$$|\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'| = k^0 k'^0 \cos\theta \quad \text{として、結局}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{cm}}} = \frac{G^2}{16\pi^2} s \left(1 - \frac{m_e^2}{s}\right)^2 \left(1 + \frac{m_e^2}{s} + \left(1 - \frac{m_e^2}{s}\right) \cos\theta\right)$$

更に立体角で積分して

$$\bar{\sigma} = \frac{G^2}{3\pi} s \left(1 - \frac{m_e^2}{s}\right)^2 \left(1 + \frac{m_e^2}{s} + \frac{m_e^4}{s^2}\right)$$

$$= \frac{G^2}{3\pi} s \left(1 - \frac{m_e^2}{s}\right) \left(1 - \frac{m_e^6}{s^3}\right)$$

問 3.3  $e^- \nu_e \rightarrow \mu^- \nu_e$  の断面積を示める問題.

ここでは  $\frac{1}{2} \sum |M|^2 = 128 (k \cdot p)(k' \cdot p')$  となるので、この部分が

$S$  の  $M$  に依存しなくなる。よって等力的となり。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2}{4\pi} S \left(1 - \frac{mv^2}{S}\right)^2$$

\*  $e^- \nu_e \rightarrow e^- \nu_e$  のときは  $\frac{1}{2} \sum |M|^2 = 128 (k \cdot p)(k' \cdot p')$  であつた。

\*\*  $\mu \rightarrow$  他のレプトンと置換して、 $e^- \nu_e \rightarrow \mu^- \nu_e$  の断面積となる

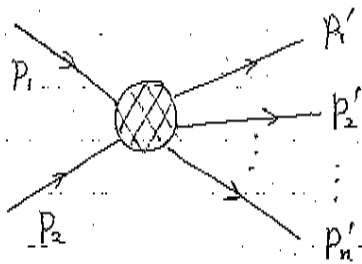
ただし、 $i=e$  のときは、これは荷電カレントのみが考えられているので、

$S$ -matrix の段階で中性カレントの寄与を足して計算しなければならない。

問 3.4 重心系での運動量の大きさを求める問題.

$$S = \left( \sqrt{m_1^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 + p^2} \right)^2 \text{ からすぐに出る.}$$

# Appendix C Feynman Rules



この反応の断面積を求めたい。

$$d\sigma = \frac{1}{J_{12} p_2} \frac{1}{VT} |S_{fi}|^2 \prod_{i=1}^n \left( V \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \right)$$

$$S_{fi} = \langle f | \left\{ T \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_{int}(t) \right) \right\} | i \rangle$$

$$= \langle f | i \rangle + \langle f | \left\{ (-i) \int_{-\infty}^{\infty} dt H(t) \right\} | i \rangle + \langle f | \left\{ \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' H(t) H(t') \right\} | i \rangle + \dots$$

$$J_{12} = \frac{|v_1 - v_2|}{V} = \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{p_1^0 p_2^0 V}, \quad p_2 = \frac{1}{V}$$

S-matrix は、座標で先に積分すること

$$F_i = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - \dots - p'_n) \quad \text{が表れる。}$$

また、波動関数の規格化因子が  $\psi(x) = (2p^0 V)^{-1/2} u(p, s) e^{-ip \cdot x}$  etc...

$$F_2 = (2p_1^0 V \times \dots \times 2p_n^0 V)^{-1/2} \quad \text{がわかる。}$$

$$S_{fi} = F_i F_2 M_{fi} \quad \text{と分離できる。}$$

$$\Rightarrow d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - \dots - p'_n)}{4((p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2)^{1/2}} \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \dots \frac{d^3 p'_n}{(2\pi)^3 2p_n^0} |M_{fi}|^2$$

を得る。



○  $M_{fi}$  の計算法.  
diagram を見て.

1) 外線は. spin 0 ... 1  
 $1/2$  ...  $u(p, s)$  や  $v(p, s)$   
 1 ...  $\epsilon_\mu(p, \lambda)$

$\epsilon_\mu(p, \lambda)$  は.  $\epsilon_\mu \epsilon^\mu = -1$   $\epsilon$  軸  $T=\vec{0}$ .  $m=0$  かつ  $s$  かつ  $(\epsilon \cdot p) = 0$  かつ

2) 内線

$$\text{spin } 0 : i\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$1/2 : iS(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$1 : iD_{\mu\nu}(p) = \begin{cases} -i \frac{g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu / \square^2}{p^2 + i\epsilon} & M=0 \\ -i \frac{g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu / M^2}{p^2 - m^2 + i\epsilon} & M \neq 0 \end{cases}$$

3) vertex Dirac 粒子と何かがつながっているか. ( $g$ : coupling const.)

$$\text{spin } 0 : \begin{cases} -ig & (\text{スカラーボソン}) \\ g\gamma_5 & (\text{擬スカラーボソン}) \end{cases}$$

$$\text{spin } 1 : \begin{cases} -ig\gamma^\mu & (\text{ベクトルボソン}) \\ -ig\gamma^\mu \gamma_5 & (\text{軸性ベクトルボソン}) \end{cases}$$

これらの vertex で 運動量が保存する. 不確定な運動量については積分する.

$$\left( \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \right)$$

◦ 今までしてきたように、終状態のスピンの(偏極)で和をとることがある。

スピン 1 の粒子については、

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \epsilon_{\mu}(p, \lambda) \epsilon_{\nu}(p, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{p^2} \quad (m=0)$$

$$\sum_{\lambda=0, \pm 1} \epsilon_{\mu}(p, \lambda) \epsilon_{\nu}(p, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{m^2} \quad (m \neq 0)$$

◦ 終状態に同種粒子がある場合は、対称、反対称性を考慮する。

また、 $n$  個の同種粒子があるときは  $n!$  で割る。