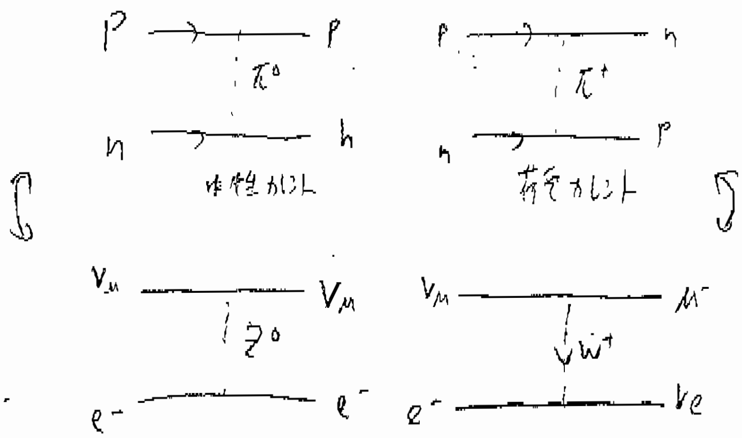
4-2 The Yang-Mills Field

核子のアイソスピン対称性 とのアナロジー から、レプトンの理論をつくる。



$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$ アイソスピン2重項

$\phi = \begin{pmatrix} \phi_{\pi^+} \\ \phi_{\pi^0} \\ \phi_{\pi^-} \end{pmatrix}$ アイソスピン3重項

核子とパイオンのカップリング $\mathcal{L}_{int} = g_{\pi N} \bar{\Psi} \gamma^5 (\tau \cdot \phi) \Psi$

$\downarrow$

アイソスピン回転に関して不変

$$U = \exp\left(\frac{i}{2} a \cdot \tau\right), \quad \Psi' = U\Psi$$

レプトンと $W^\pm$, Z^0 ボソンのカップリング $\mathcal{L}_{int} = g \sum_{i=1}^{3} \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\tau^i}{2} A^i_\mu \Psi = g \bar{\Psi} \gamma^\mu A_\mu \cdot \underbrace{\frac{\tau}{2}}_{= \hat{T}} \Psi$

$\hat{T}$ の表示 $\rightarrow$ $\hat{T}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{T}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{T}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\hat{T}$ のLie代数 (SU(2))

$$[\hat{T}^i, \hat{T}^j] = i \epsilon_{ijk} \hat{T}^k$$

$$\sum_i (\hat{T}^i)^2 = \frac{3}{4} \mathbb{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \mathbb{1}$$

ベクトル場 A^i_μ の自由ラグランジアンを

$$\mathcal{L}_{free} = -\frac{1}{4} F^i_{\mu\nu} F_i^{\mu\nu} \qquad (F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu)$$

で定義する

ただし、この表示は局所($a(x)$)ゲージ変換に対して不変ではない。

局所ゲージ変換 $\Psi \to \Psi' = \hat{U}\Psi$, $\hat{U} = \exp(i a\cdot T)$ を施すと、フェルミオン場は下のような変換

$$\partial_\mu \Psi \to \hat{U}\partial_\mu \Psi = \hat{U}\partial_\mu(\hat{U}^{-1}\hat{U}\Psi) = [\partial_\mu + \underbrace{\hat{U}(\partial_\mu \hat{U}^{-1})}]\Psi'$$

この項は A_μ も同時にゲージ変換することで吸収できる。(後で)

相互作用を含したラグランジアンは、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{int} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + g\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\cdot\vec{T}\Psi$$

となる。

ここでは、意図的に電子の質量項をとり入れなかった。ゲージ対称性は、フェルミオンで電子、の2つの成分は区別できないことを示唆している。理論のこの性質は、電子とニュートリノに異なる質量を付け加えることで、こわされる。

電荷，質量差は，ヒッグス場を通した自発的対称性の破れに関係している。

このラグランジアンを局所ゲージ変換不変な形につくることを原理的に要求する。

〃 は，全ての場のラグランジアンを含んでいるわけではない。

(例)，A_μ 場の運動エネルギー項が抜けている)

↑電磁場とのアナロジーから簡単に付け足せる。

└電磁場では $F_{\mu\nu}$ 自身がゲージ不変である。

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + g\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\cdot\vec{T}\Psi$$

demand!!

$$\mathcal{L}' = i\bar{\Psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\Psi' + g\bar{\Psi}'\gamma^\mu A'_\mu\cdot\vec{T}\Psi' \qquad (\Psi' = \hat{U}\Psi(x) = \exp(i a(x)\cdot\vec{T})\Psi(x))$$

No.

Date

$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + g\bar{\Psi}\gamma^\mu \mathbf{A}_\mu\cdot\vec{\pi}\Psi$

$\leftarrow \hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$ 成り立つ, $[\gamma^\mu, \hat{U}] = 0$

$= i\bar{\Psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\Psi' + g\bar{\Psi}'\gamma^\mu\left[\hat{U}\mathbf{A}_\mu\cdot\vec{\pi}\hat{U}^{-1} + \frac{i}{g}\hat{U}(\partial_\mu\hat{U}^{-1})\right]\Psi'$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ となるには, $\mathbf{A}_\mu$ の局所ゲージ変換性は,

$\mathbf{A}'_\mu\cdot\vec{\pi} = \hat{U}\mathbf{A}_\mu\cdot\vec{\pi}\hat{U}^{-1} + \underbrace{\frac{i}{g}\hat{U}(\partial_\mu\hat{U}^{-1})}$ となる。

⇓

この項を付け加える必要がある。

↳ 電磁場の共変微分の項に対応

$\Rightarrow \mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ig\mathbf{A}_\mu\cdot\vec{\pi})\Psi$

$\equiv i\bar{\Psi}\gamma^\mu\hat{D}_\mu\Psi$

$\hat{D}_\mu$ = ゲージ共変微分

↳ $\hat{D}'_\mu = \hat{U}\hat{D}_\mu\hat{U}^{-1}$ と変換する。

準備がととのったので, $\mathbf{A}_\mu$ のゲージ不変な運動エネルギーをつくろう。

まず, ゲージ不変な場の強さテンソル行列を定義する。

$\hat{F}_{\mu\nu} = \mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{\pi} = \sum_{i=1}^{3} F^i_{\mu\nu}\pi^i = \hat{D}_\mu(\mathbf{A}_\nu\cdot\vec{\pi}) - \hat{D}_\nu(\mathbf{A}_\mu\cdot\vec{\pi})$

$\vdots$

$= \underbrace{(\partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu + g\mathbf{A}_\mu\times\mathbf{A}_\nu)}_{=\mathbf{F}_{\mu\nu}}\cdot\vec{\pi}$

$\mathbf{F}_{\mu\nu}$ (ベクトルはアイソスピン成分に対して)

これから, 局所ゲージ不変なラグランジアンができた。

$\Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_A = \bar{\Psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu + g\mathbf{A}_\mu\cdot\vec{\pi})\Psi - \bar{\Psi}\hat{M}\Psi - \frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}^{\mu\nu}$

$\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}^{\mu\nu} = (\partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu)\cdot(\partial^\mu\mathbf{A}^\nu - \partial^\nu\mathbf{A}^\mu) + 2g(\partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu)\cdot(\mathbf{A}^\mu\times\mathbf{A}^\nu)$
$+ g^2(\mathbf{A}_\mu\times\mathbf{A}_\nu)\cdot(\mathbf{A}^\mu\times\mathbf{A}^\nu)$

ゲージ不変性にかかわるヤン・ミルズ理論の技術的な問題をムシしたファインマン・ルールの全セットを手に入れた。ウェーブオペレーター（$\Box g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu$）の特異性のせいで、ヤン・ミルズ場のプロパゲーター $D_{\mu\nu}$ のユニークに決まった表現を手に入れるには、特別なゲージをとる必要がある。（ランダウ・ゲージ）

明らかにゲージ不変なファインマン・ルールを手に入れるには、ローレンツ・ゲージをとる。

ローレンツ・ゲージ → $\partial_\mu A^\mu = 0$　このゲージは先ほどのランダウ・ゲージのプロパゲーターを導く。

より一般的には、ゲージ条件 $\hat{L}_\mu A^\mu = 0$　（$\hat{L}_\mu$ は任意の線形オペレーター）をとる。

例）（$\hat{L}_\mu = \partial_\mu$ ：ローレンツ・ゲージ）

クーロン・ゲージ（$\nabla \cdot A = 0$）を得るには、$\hat{L}_\mu = (0, \nabla)$ をとる。

ここでは触れないが、厳密な解析から、少なくとも1つのベクトル場のループを含むファインマングラフはもはやゲージ不変ではないことが示されている。すなわち、物理的な解釈の行列要素ではなく、ゲージのとり方に依存してしまう。これはもちろん受け入れられない。

Fadeev と Popov によって示されたように、この失敗の原因は、ヤン・ミルズ理論のファインマン・ルールが今のところ不完全だからである。いわゆるゴースト場の寄与を入れなければならない。

ゴースト場は下のラグランジアンで記述される。

$$\mathcal{L}_{ghost} = -\bar{\chi}_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ゲージ}}}{\hat{L}_\mu} (\partial^\mu \delta_{ij} + g\varepsilon_{ijk} A^\mu_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ゴースト場}}}{\chi_j}$$

ローレンツ・ゲージでのゴースト場は、

$$\mathcal{L}_{ghost} = -\bar{\chi}_i \partial_\mu (\partial^\mu \delta_{ij} + g\varepsilon_{ijk} A^\mu_k) \chi_j$$

$$= -\bar{\chi}_i \Box \chi_i - g\varepsilon_{ijk} A^\mu_k \bar{\chi}_i \partial_\mu \chi_j$$ である。

ゴースト場　　　実際場の非物理的過程

打ち消し合う。

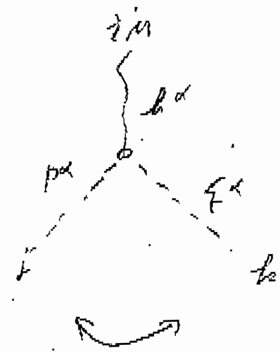
δA^3_1

ゴースト場のラグランジアンを自由部分と、ゴースト・ベクトルボソン間相互作用部分に分けると、

相互作用部分は、$L_{FP,A} = -g\varepsilon_{ijk}\,\bar{\chi}_i\,\partial_\mu \chi_j\,A_k^\mu$ となる。

↓これから得られるバーテックス関数は、

$\Gamma_\mu^{ijk}(FP,A) = -ig\varepsilon_{ijk}\,p_\mu$ である。



自由部分は、$L_{FP} = -\bar{\chi}_i \Box \chi_i$ となる。

↓これから得られるプロパゲーターは、

$\Delta(p) = \dfrac{1}{p^2+i\epsilon}$ となる。

(スピン0、質量0の場のプロパゲーターと同じ)

まとめ：ゴースト場を含む全ラグランジアンは、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_{FP,A}$$

$$= \bar{\Psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu + gA_\mu\cdot\vec{T})\Psi - \bar{\Psi}M\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu\bar{\chi}_i\,\partial^\mu\chi_i - g\varepsilon_{ijk}\bar{\chi}_i\,\partial_\mu\chi_j,$$

となる。

6 EXAMPLE

プロパゲーターとゲージ不変性 → 次で

EXERCISE

ゲージ場の自己相互作用 → 次で

No.

Date

EXCERCISE 4.4 アイソスピン回転

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\phi} \to \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\phi}' = \underbrace{\exp\left(\tfrac{i}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\phi}\exp\left(-\tfrac{i}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)}_{\text{角度 } |\boldsymbol{a}|,\ \text{軸 } \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\ \text{まわりのアイソスピン空間での回転}}$$

$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau})^2 = |\boldsymbol{a}|^2$ (Pauli行列の関係をつかう)

$$\exp\left(\pm\tfrac{i}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\pm\tfrac{i}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)^n \cdots = \cos\frac{|\boldsymbol{a}|}{2} \pm i(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\tau})\sin\frac{|\boldsymbol{a}|}{2}$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + i\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\phi}' = \left[\cos\theta + i(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\tau})\sin\theta\right](\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\phi})\left[\cos\theta - i(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\tau})\sin\theta\right]$$

$$= \cdots = \boldsymbol{\tau}\cdot\underbrace{(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\phi}) - (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\phi})\sin 2\theta + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\phi})\times\boldsymbol{n}\cos 2\theta)}_{\text{回転}}$$

EXCERCISE 4.5 Minimal Coupling and of the Field-Strength Tensor のゲージ不変性

(a) $\bar{\Psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu + g\boldsymbol{A}_\mu\cdot\hat{\boldsymbol{T}})\Psi$ がゲージ不変であることを示す。

(b) $F_{\mu\nu}$ のゲージ不変性 $\hat{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{F}'_{\mu\nu} = \hat{U}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot\hat{\boldsymbol{T}}\hat{U}^{-1}$ を示す。

$\gamma^\mu\partial_\mu = \hat{\partial}$, $\gamma^\mu\boldsymbol{A}_\mu\cdot\hat{\boldsymbol{T}} = \hat{A}$ とする。

ディラック、スピノルとアイソスピノル空間での行列 ($\hat{\partial}\hat{1}$) (2×2単位行列)

$$\bar{\Psi}(i\hat{\partial} + g\hat{A})\Psi = \bar{\Psi}'\hat{U}(i\hat{\partial} + g\hat{A})\hat{U}^{-1}\Psi' = \cdots = \bar{\Psi}'(i\hat{\partial} + g\hat{A}')\Psi'$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1} + \frac{i}{g}\hat{U}(\hat{\partial}\hat{U}^{-1})$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{A}'_\mu\cdot\hat{\boldsymbol{T}} = \hat{U}(\boldsymbol{A}_\mu\cdot\hat{\boldsymbol{T}})\hat{U}^{-1} + \frac{i}{g}$$

No. ....

Date

$$\hat{A}_\mu = A_\mu \cdot \hat{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^+ \hat{T}_- + A_\mu^- \hat{T}_+\right) + A_\mu^0 \hat{T}_0 , \quad \hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\cdot\hat{T}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_\mu^3 & \frac{A_\mu^1 - iA_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ \frac{A_\mu^1 + iA_\mu^2}{\sqrt{2}} & -A_\mu^3 \end{pmatrix} \qquad = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} F_{\mu\nu}^3 & \frac{F_{\mu\nu}^1 - iF_{\mu\nu}^2}{\sqrt{2}} \\ \frac{F_{\mu\nu}^1 + iF_{\mu\nu}^2}{\sqrt{2}} & -F_{\mu\nu}^3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ig\left[\hat{A}_\mu , \hat{A}_\nu\right]_-$$

$$\hat{F}_{\mu\nu}' = \partial_\mu \hat{A}_\nu' - \partial_\nu \hat{A}_\mu' - ig\left[\hat{A}_\mu' , \hat{A}_\nu'\right]_- = \cdots = \hat{U}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{U}^{-1}$$ が得られる。

EXAMPLE 4.6 プロパゲーターとゲージ不変性

Yang-Mills 理論のファインマン・ルール

Propagator

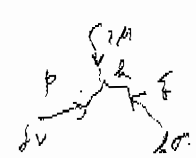
- Fermion $\xrightarrow[p]{}$ $\quad i S_F(p) = i\frac{\gamma^\mu p_\mu + M}{p^2 - M^2 + i\varepsilon}$
- Boson $i\mu \sim\sim_p\sim k\nu$ $\quad i(D_{F\mu\nu}(p))_{ik} = \frac{-i P_{\mu\nu}(p)\delta_{ik}}{p^2 + i\varepsilon}$
- Ghost $i \cdots\xrightarrow[p]{}\cdots k$ $\quad i(\Delta(p))_{ik} = \frac{-i\delta_{ik}}{p^2 + i\varepsilon}$

Vertex function

- Fermion vertex

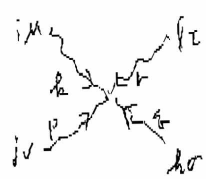
$(\Gamma^\mu)^i = ig\gamma^\mu T^i$

- triple vertex



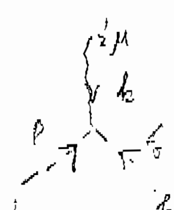
$(\Gamma^{\mu\nu\sigma})_{ijk} = ig\varepsilon_{ijk}\left[g_{\mu\nu}(k-p)_\sigma + g_{\nu\sigma}(p-q)_\mu + g_{\sigma\mu}(q-k)_\nu\right]$

- Quadruple vertex



$$(\Gamma^{\mu\nu\sigma\tau})_{ijkl} = -g^2\left[\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klm}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau}g_{\nu\sigma}) + \varepsilon_{ikm}\varepsilon_{jlm}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\tau} - g_{\mu\tau}g_{\nu\sigma}) + \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jkm}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau} - g_{\mu\nu}g_{\sigma\tau})\right]$$

- Ghost vertex



$(\Gamma^\mu(q))_{ijk} = g\varepsilon_{ijk}q_\mu$

$_\mu \hat{U}^{-1})$

$(\partial_\mu \hat{U})\hat{U}^{-1}$

No

Date

いろいろなPropagator

① Electron propagator $\frac{i}{E_i - \hat{H}_0 + i\epsilon}$

② 相対論的スピン0のPropagator (K-G eq) $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

③ 相対論的 電子の propagator (Dirac eq) $\frac{i\sum_s (u_s \bar{u}_s)}{p^2 - m^2}$

④ 光子の propagator (Maxwell eq) $\frac{1}{\xi^2 - M^2}\left[-g^{\lambda\mu} + \frac{\xi^\lambda \xi^\mu (1-\xi)}{\xi^2 - \xi M^2}\right]$

EXERCISE 4.7 ゲージ場の自己相互作用