4.4 レプトンのGSW模型

2011年11月18日
前田 担当

これまでにわかったこと&目標

1. 弱い力をつくる荷電カレントと中性カレントがある。
2. 弱い力は左巻きのレプトンにしか働かない。
3. 弱い力の媒介粒子であるW±, Z⁰ボソンは非常に重い。
4. W±, Z⁰ボソンの質量は、元は質量のない粒子が Higgs 機構によって質量を獲得したとすればよさそう。この理論において光子場も同時に考察したい。

まず、2つのベクトル場を導入。$\longrightarrow A^i_\mu \ (i=1,2,3)$, B_μ

A^i_μ ⇑ アイソスピン triplet　　B_μ ⇑ アイソスピン singlet

そして、レプトンのほうは、

$$L_e = \frac{1-\gamma_5}{2}\begin{pmatrix}\psi_{\nu_e}\\ \psi_e\end{pmatrix},\quad L_\mu = \frac{1-\gamma_5}{2}\begin{pmatrix}\psi_{\nu_\mu}\\ \psi_\mu\end{pmatrix},\quad L_\tau = \frac{1-\gamma_5}{2}\begin{pmatrix}\psi_{\nu_\tau}\\ \psi_\tau\end{pmatrix} \qquad (4.90)$$

⇒ 左巻き アイソスピン doublet

$$R_e = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi_e,\quad R_\mu = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi_\mu,\quad R_\tau = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi_\tau \qquad (4.91)$$

⇒ 右巻き アイソスピン singlet

とする。

これらの記法を用いて、さまざまなカレントを考察していこう。
以下では 代表して L_e, R_e の電子世代のレプトンを用いる。

・荷電カレント(弱い力)

$$J_-^{(e)\alpha} = \bar\psi_e\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_{\nu_e} = 2\bar L_e\gamma^\alpha\hat T_- L_e \qquad (4.93a)$$

$$J_+^{(e)\alpha} \equiv \left(J_-^{(e)\alpha}\right)^\dagger = 2\bar L_e\gamma^\alpha\hat T_+ L_e \qquad (4.93b)$$

$$\left(\begin{array}{l}\hat T_+ = \hat T_1 + i\hat T_2 = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\\[2ex] \hat T_- = \hat T_1 - i\hat T_2 = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\end{array}\right)$$

・電磁カレント

$$J_{EM}^{(e)\alpha} = \bar\psi_e\gamma^\alpha\psi_e = \bar L_e\gamma^\alpha\left(\frac{1}{2}-\hat T_3\right)L_e + \bar R_e\gamma^\alpha R_e \qquad (4.94)$$

弱い力の中性カレント $J_0^{(e)\alpha}$ の形はまだわからないけど、類推としておそらく $\bar L_e$ と L_e で $\hat T$ を挟んだ形になるだろう。

カレントのうちで、

$\hat{T}$に関するものはゲージ場A^i_μと(triplet的なもの同士)、

それ以外はゲージ場B_μと(singlet的なもの同士)結合するだろう。

よってラグランジアンは、

$$\mathcal{L}^{(e)}_{int}=g(\overline{L}_e\gamma^\alpha\hat{T}L_e)\cdot A_\alpha-g'\left\{\frac{1}{2}(\overline{L}_e\gamma^\alpha L_e)+(\overline{R}_e\gamma^\alpha R_e)\right\}B_\alpha \quad (4.96)$$

の形になる。(結合定数g, g'については後ほど)

ここで、実際の光子が結合するのは、$\left\{\frac{1}{2}(\overline{L}_e\gamma^\alpha L_e)+(\overline{R}_e\gamma^\alpha R_e)\right\}$ではなく、$J^{(e)\alpha}_{EM}$である。
したがって、現実に現れる光子場をA_μとすると、(A^i_μと区別に注意)

$$A_\mu=\cos\theta B_\mu+\sin\theta A^3_\mu \quad (4.97a)$$

のように、B_μとA^3_μが混ざり合った形になっている。
そしてこれと直交する

$$Z_\mu=-\sin\theta B_\mu+\cos\theta A^3_\mu \quad (4.97b)$$

は、弱い力の中性カレントを表しているだろう。

この混ざり具合を表すθを、Weinberg角とよぶ。

そして、$W^{(\pm)}_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(A^1_\mu\mp iA^2_\mu)$としてWボソンのほうも表すと(符号に注意!)
ラグランジアンは、

$$\mathcal{L}^{(e)}_{int}=\frac{g}{2\sqrt{2}}\left(J^{(e)\alpha}_- W^{(-)}_\alpha+J^{(e)\alpha}_+ W^{(+)}_\alpha+J^{(e)\alpha}_0 Z_\alpha\right)-eJ^{(e)\alpha}_{EM}A_\alpha \quad (4.100)$$

と書き直すことができる。

$$\left(\begin{aligned}
&J^{(e)\alpha}_-=2\overline{L}_e\gamma^\alpha\hat{T}_-L_e\ ,\quad J^{(e)\alpha}_+=2\overline{L}_e\gamma^\alpha\hat{T}_+L_e\\
&J^{(e)\alpha}_0=2\sqrt{2}\left\{\cos\theta\,\overline{L}_e\gamma^\alpha\hat{T}_3L_e+\frac{g'}{g}\sin\theta\left(\frac{1}{2}\overline{L}_e\gamma^\alpha L_e+\overline{R}_e\gamma^\alpha R_e\right)\right\}\\
&-eJ^{(e)\alpha}_{EM}=-\left\{\overline{L}_e\gamma^\alpha\left(\frac{g'\cos\theta}{2}-g\sin\theta\,\hat{T}_3\right)L_e+g'\cos\theta\,\overline{R}_e\gamma^\alpha R_e\right\}
\end{aligned}\right)$$

ここで、新しく得られたJ_{EM}の中身を(4.94)と比べることで、

e, g, g', θの関係がわかる。

すなわち、

$$e = g\sin\theta = g'\cos\theta \quad , \quad \tan\theta = \frac{g'}{g} \qquad (4.101)\sim(4.104)$$

$$\sin\theta = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}} \quad , \quad e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \quad , \quad \frac{1}{e^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g'^2}$$

といった関係式が直ちに得られる。

これらを用いて、形のわからなかった $J_0^{(e)\alpha}$ をあらわに書くと、

$$J_0^{(e)\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}\left(\bar{L}_e \gamma^\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cos 2\theta \end{pmatrix} L_e + 2\sin^2\theta\, \bar{R}_e \gamma^\alpha R_e\right) \qquad (4.105)$$

もしくは、

$$J_0^{(e)\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}\left(\bar{\nu}_e \gamma^\alpha (1-\gamma_5)\nu_e - \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (g_V' - g_A'\gamma_5)\psi_e\right) \qquad (4.106)$$

とあらわせる。　　　　$(g_A' = 1,\ g_V' = 1 - 4\sin^2\theta)$

ちょうど、V−A理論のような形にあらわすことができた。

以前の考察で、g_A、g_V のどちらかが0に近くならねばいけないという議論があった。(3.30)

それに従うと、$\sin^2\theta \simeq 0.25$ が得られる。

さらに、これまでに得られたカレントの式の係数などと比較することにより、

$$g_A = \frac{1}{2} g_A' \simeq \frac{1}{2}$$

が得られる。(この g_A は(3.3)式の g_A に対応するもの)

これは実験値((3.31)式参照)と近い値となり、理論の正しさを示す1つの例となっている。

～EXAMPLE～

4.8 GSW理論のゲージ不変な定式化 —弱アイソスピンとハイパーチャージ—

ここまでの議論をまとめつつ少し違った角度からも見ていく (4.2節とほぼ同様の議論!)

レプトンは左巻きのdoubletと右巻きのsingletに分けて考える。

$$L_\ell = \begin{pmatrix} \psi_{\nu_\ell} \\ \psi_\ell \end{pmatrix}_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\begin{pmatrix} \psi_{\nu_\ell} \\ \psi_\ell \end{pmatrix} \qquad \left(T=\frac{1}{2},\ T_3=\pm\frac{1}{2} \text{ の doublet}\right)$$

$$R_\ell = (\psi_\ell)_R = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi_\ell \qquad (T=T_3=0)$$

これらから始めて、GSW理論にゲージ不変性を要請したい。

L_ℓ, R_ℓ にゲージ変換を施すと、

$$\begin{pmatrix} \psi_{\nu_\ell} \\ \psi_\ell \end{pmatrix}_L \to \begin{pmatrix} \psi_{\nu_\ell} \\ \psi_\ell \end{pmatrix}'_L = \exp(i\alpha(x)\cdot\hat{\mathbb{T}})\begin{pmatrix} \psi_{\nu_\ell} \\ \psi_\ell \end{pmatrix}_L$$

$$= \exp\left(i\alpha(x)\cdot\frac{\hat{\tau}}{2}\right)\begin{pmatrix} \psi_{\nu_\ell} \\ \psi_\ell \end{pmatrix}_L \equiv \hat{U}_2 L_\ell \quad \left(\hat{\mathbb{T}} = \begin{pmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \\ \hat{\tau}_3 \end{pmatrix} \text{ は } SU(2) \text{群の生成子}\right)$$

$$(\psi_\ell)_R \to (\psi_\ell)'_R = \exp(i\alpha(x)\hat{Y})(\psi_\ell)_R \equiv \hat{U}_1 R_\ell \qquad \left(\hat{Y}=Y \text{ は } U(1) \text{群の生成子} = \text{const}\right)$$

となる。

Lagrangian密度のkinetic-energy項を単純に

$$\bar{L}_\ell \gamma^\mu i\partial_\mu L_\ell + \bar{R}_\ell \gamma^\mu i\partial_\mu R_\ell$$

とする。

∂_μ を共変微分

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\hat{\mathbb{T}}\cdot A_\mu - i\frac{g'}{2}\hat{Y}B_\mu$$

で置き換える。ここでゲージ場 A_μ と B_μ を導入することになる。

ゲージ不変性を保つためには、

$$A_\mu\cdot\hat{\mathbb{T}} \longrightarrow A'_\mu\cdot\hat{\mathbb{T}} = \hat{U}_2 A_\mu\cdot\hat{\mathbb{T}}\hat{U}_2^{-1} + \frac{i}{g}\hat{U}_2(\partial_\mu\hat{U}_2^{-1})$$

$$B_\mu \longrightarrow B'_\mu = B_\mu + \frac{2i}{g'}U_1(\partial_\mu U_1^{-1})$$

と変換すればよい。

ゲージ場 A_μ, B_μ に関する自由度の分を補うものとして

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \mathbb{F}_{\mu\nu}\cdot\hat{\mathbb{T}} = \hat{D}_\mu(A_\nu\cdot\hat{\mathbb{T}}) - \hat{D}_\nu(A_\mu\cdot\hat{\mathbb{T}})$$

$$= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g A_\mu \times A_\nu)\cdot\hat{\mathbb{T}}$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

を用いて、ゲージ不変な項を Lagrangian につけかえる。

これらはゲージ変換により、

$$\hat{F}_{\mu\nu} \to \hat{F}'_{\mu\nu} = \hat{U}_2 \hat{F}_{\mu\nu} \hat{U}_2^{-1} = \hat{U}_2(\mathbb{F}_{\mu\nu}\cdot\hat{\mathbb{T}})\hat{U}_2^{-1}$$

$$B_{\mu\nu} \to B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}$$

と変換される。

ゲージ場 A_μ, B_μ のゲージ不変な kinetic energy は

$$\mathcal{L}'_A = -\frac{1}{4}\mathbb{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbb{F}^{\mu\nu} \qquad \mathcal{L}'_B = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

となる。

これらをまとめると、ゲージ不変な Lagrangian は結局、

$$\mathcal{L} = \bar{L}_\ell \gamma^\mu i\hat{D}_\mu L_\ell + \bar{R}_\ell \gamma^\mu i\hat{D}_\mu R_\ell - \frac{1}{4}\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

$$= i\bar{L}_\ell\gamma^\mu\left(\partial_\mu - ig\hat{\mathbb{T}}\cdot A_\mu - i\frac{g'}{2}\hat{Y}B_\mu\right)L_\ell + i\bar{R}_\ell\gamma^\mu\left(\partial_\mu - ig\hat{\mathbb{T}}\cdot A_\mu - i\frac{g'}{2}\hat{Y}B_\mu\right)R_\ell - \frac{1}{4}\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

とかける。

この Lagrangian の表式を、前に導出した(4.96)と比較することで、L_ℓ, R_ℓ に対する $\hat{Y}$, $\hat{\mathbb{T}}$ の固有値 Y, $\mathbb{T}$ などがきまる。

$\mathbb{T}$ は弱いアイソスピン、Y はハイパーチャージとよばれ、粒子のもつ電荷 eQ との間に

$$eQ = e\left(T_3 + \frac{1}{2}Y\right)$$

の関係がある。これを、ゲルマン－西島の法則という。

各粒子に対する $|\mathbb{T}|$, T_3, Y, Q の値が、テキスト表4.2に示されている。

また、ここまでの議論はすべて、弱い力の媒介粒子が ~~massless~~ としてきた。

以降の節で、$W^\pm$, Z^0 が質量を獲得する仕組みを考察していく。

4.5 自発的対称性の破れ：Higgs Sector

$W^{\pm}, Z^0$ に質量を獲得させてやりたい。

そのために、4.1節で論じたHiggs機構を適用してやることを考える。

まず、Higgs場のisodoubletを導入。

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \phi^{(0)} \end{pmatrix}, \quad |\Phi|^2 = |\phi^{(+)}|^2 + |\phi^{(0)}|^2$$

(Φ は アイソスピン $T = \frac{1}{2}$ ハイパーチャージ $Y = 1$ をもつ)

ポテンシャル

$$U(\Phi) = -\mu^2 |\Phi|^2 + h |\Phi|^4$$

を導入。

また、Higgs場がゲージ場と最小限に結合した、kinetic energyの項を生じる。

$$\left| \left(i\partial_\mu + g\hat{T}\cdot A_\mu + \frac{g'}{2} B_\mu \hat{Y} \right) \Phi \right|^2 = \left| \left(\partial_\mu - ig\hat{T}\cdot A_\mu - i\frac{g'}{2} B_\mu \hat{Y} \right) \Phi \right|^2$$

ここで、Φ と結合するもののうち、電気的に中性の部分を取り出すと、

$$g T^3 A^3_\mu + \frac{g'}{2} B_\mu = \begin{pmatrix} eA_\mu + g\frac{\cos 2\theta}{2\cos\theta} Z_\mu & 0 \\ 0 & -\frac{g}{2\cos\theta} Z_\mu \end{pmatrix} \qquad (4.113)$$

すなわち、この形をみると、Φ のdoubletのうち、上の項は A_μ と e で結合し、下の項は A_μ とは結合しないことが見てとれる。

このために、Higgs場を $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \phi^{(0)} \end{pmatrix}$ という形にしたのである。

Φ にゲージ変換を施し扱いやすい形にすることを考える。

まず、アイソスピン空間の回転により、

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda + \chi(x)) \exp\left(\frac{i}{\lambda} \Theta(x)\cdot T \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4.114)$$

の形におくことができる。 (cf. (4.30))

Θ, χ は実数値をとり、$\lambda = \sqrt{\frac{\mu^2}{h}}$ はHiggs場の真空期待値。

そして χ は λ からの局所的なズレをあらわす。

この Φ をさらにゲージ変換して

$$\Phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda + \chi(x)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4.117)$$

という簡易な形にあらわすことができる。これを、ユニタリーゲージという。

ここで、Φの下の成分は光子場とは結合しないので、光子は
自発的対称性の破れによって質量を得ることはないことを再び頭に入れておく。

ここから Lagrangian 密度の形を再定式化していこう。

Lagrangian に含まれるのは以下の項である。
自由な場の項、相互作用の項、Higgs 場の項、荷電レプトンに質量を与える項。
荷電レプトンに質量を与える項は、
$-\sqrt{2} f_l (\overline{R}_l \Phi^{\dagger} L_l + \overline{L}_l \Phi R_l) = -f_l(\lambda+\chi)\overline{\psi}_l \psi_l$ とかける。(詳細は exercise 4.9 で)
これらを踏まえ、弱い相互作用における Lagrangian を書きおろすと、以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
L = &-\frac{1}{4}\mathbb{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbb{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - e\left(\sum_l \overline{\psi}_l \gamma^\mu \psi_l\right)A_\mu \\
&+\sum_l i\left(\overline{\psi}_{\nu_l}\gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\partial_\mu \psi_{\nu_l} + i\overline{\psi}_l \gamma^\mu \partial_\mu \psi_l - f_l \overline{\psi}_l \psi_l (\lambda+\chi)\right) \\
&+\frac{g}{2\sqrt{2}}\sum_l \left[\overline{\psi}_l \gamma^\mu (1-\gamma^5)\psi_{\nu_l} W_\mu^{(-)} + \overline{\psi}_{\nu_l}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_l W_\mu^{(+)}\right] \\
&+\frac{g}{4\cos\theta}\sum_l \left[\overline{\psi}_{\nu_l}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_{\nu_l} - \overline{\psi}_l \gamma^\mu (g'_V - \gamma^5)\psi_l\right] Z_\mu \\
&+\frac{h\lambda^4}{4} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - h\lambda^2\chi^2 - h\chi^2\left(\lambda\chi + \frac{1}{4}\chi^2\right) \\
&+\frac{g^2}{8}\left(2W_\mu^{(+)}W^{(-)\mu} + \frac{Z_\mu Z^\mu}{\cos^2\theta}\right)(\lambda+\chi)^2
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{2}\phi^2 = 2\phi$

W^+W^- sum で書く → $2W$

$\sqrt{\frac{g^2}{8}\cdot 2\lambda^2}$ が mass

real だと complex だと 2つ term 2 ずれる

(各項の具体的な導出は後ほどで)　　complex なので、$\frac{1}{2}$ は不要。

この Lagrangian から得られる $W^{\pm}$、Z^0 の質量は、実験的にわかっている θ の値などを用いて
$M_W \approx 75\,GeV$、$M_Z = 86\,GeV$
とわかる。
これらは非常に重いので、その発見は加速器の発展を待つこととなった。

自由な場による寄与の部分。
$\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu}$ と $B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$
を、$W^{\pm\mu}$、Z^μ、A^μ といった現実に表れる場によってあらわに書き直すと、
以下のようになる。

$$\mathbb{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbb{F}^{\mu\nu}=\sum_i\left(\partial_\mu A^i_\nu-\partial_\nu A^i_\mu+g\varepsilon_{ikl}A^k_\mu A^l_\nu\right)\left(\partial^\mu A^{i\nu}-\partial^\nu A^{i\mu}+g\varepsilon_{ikl}A^{k\mu}A^{l\nu}\right)$$

$$=2\left[\partial_\mu W^{(-)}_\nu-\partial_\nu W^{(-)}_\mu-ig\cos\theta\left(W^{(-)}_\mu Z_\nu-W^{(-)}_\nu Z_\mu\right)-ie\left(W^{(-)}_\mu A_\nu-W^{(-)}_\nu A_\mu\right)\right]$$
$$\times\left[\partial^\mu W^{(+)\nu}-\partial^\nu W^{(+)\mu}+ig\cos\theta\left(W^{(+)\mu}Z^\nu-W^{(+)\nu}Z^\mu\right)+ie\left(W^{(+)\mu}A^\nu-W^{(+)\nu}A^\mu\right)\right]$$
$$+\left[\cos\theta\left(\partial_\mu Z_\nu-\partial_\nu Z_\mu\right)+\sin\theta\left(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu\right)+ig\left(W^{(-)}_\mu W^{(+)}_\nu-W^{(-)}_\mu W^{(+)}_\nu\right)\right]$$
$$\times\left[\cos\theta\left(\partial^\mu Z^\nu-\partial^\nu Z^\mu\right)+\sin\theta\left(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu\right)+ig\left(W^{(-)\mu}W^{(+)\nu}-W^{(+)\mu}W^{(-)\nu}\right)\right]$$

$$B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}=\left(\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu\right)\left(\partial^\mu B^\nu-\partial^\nu B^\mu\right)$$
$$=\cos^2\theta\left(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu\right)$$
$$+\sin^2\theta\left(\partial_\mu Z_\nu-\partial_\nu Z_\mu\right)\left(\partial^\mu Z^\nu-\partial^\nu Z^\mu\right)$$
$$-2\sin\theta\cos\theta\left(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu Z^\nu-\partial^\nu Z^\mu\right)$$

これらにより、弱い相互作用と電磁相互作用をするレプトンについての GSW Lagrangian をすべて決定できたことになり、それをいくつかの項に分けて書くと以下の通り。

$$\mathcal{L}_{SW}=\mathcal{L}^{(2)}_{SW}+\sum_l\mathcal{L}^{(3L)}_{SW,l}+\mathcal{L}^{(3B)}_{SW}+\mathcal{L}^{(4B)}_{SW}+\mathcal{L}^{(H)}_{SW}$$

ここでそれぞれの項は次のような意味をもつ。

$\mathcal{L}^{(2)}_{SW}$：自由なボソンやレプトンの場による寄与

$\mathcal{L}^{(3L)}_{SW,l}$：レプトンと、力の媒介粒子であるボソンとの結合による寄与

$\mathcal{L}^{(3B)}_{SW}$, $\mathcal{L}^{(4B)}_{SW}$：自己結合するボソン場の3次、4次の効果による寄与

$\mathcal{L}^{(H)}_{SW}$：Higgs 場による寄与

これらの具体的な形はテキストの (4.138)〜(4.142) 式のようになっている。

また、質量や結合定数に関する関係式が、以下のように成立する。

$$M_W=\frac{g\lambda}{2}=\frac{e}{\sqrt{G\sqrt{2}}\cdot 2\sin\theta},\quad M_Z=\frac{M_W}{\cos\theta},\quad m_l=f_l\lambda$$

$$e=g\sin\theta,\quad \frac{G}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\lambda^2}=\frac{g^2}{8M_W^2}$$

～EXERCISE～

4.9 Lepton の質量

問. $-\sqrt{2} f_l \left(\bar{R}_l \Phi^\dagger L_l + \bar{L}_l \Phi R_l\right) = -f_l(\lambda+\chi)\bar{\psi}_l \psi_l$ を示せ.

解. $$-\sqrt{2} f_l \left(\bar{R} \Phi^\dagger L + \bar{L} \Phi R\right) = -\sqrt{2} f_l \left(\bar{\psi}_R \left(0, \frac{\lambda+\chi}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} \psi_\nu \\ \psi \end{pmatrix}_L + \left(\bar{\psi}_\nu, \bar{\psi}\right)_L \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\lambda+\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \psi_R \right)$$

$$= -f_l(\lambda+\chi)\left(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R\right)$$

$$= -f_l(\lambda+\chi)\left(\bar{\psi}\frac{1-\gamma_5}{2}\cdot\frac{1-\gamma_5}{2}\psi + \bar{\psi}\frac{1+\gamma_5}{2}\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\right)$$

$$= -f_l(\lambda+\chi)\bar{\psi}\psi$$

⊿

～EXERCISE～

4.10 GSW Lagrangian

問. GSW Lagrangian をかけ.

解. Lagrangian は レプトン, ウィークボソン, 光子, ヒッグスボソン それぞれの free な部分と,
それらの相互作用の項から成る.
各項について順次見ていく.

(1) freeなボソン場

$$\mathcal{L}^{Boson}_{free} = -\frac{1}{4}\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\,\partial^\mu\chi$$

(2) freeなレプトン (Example 4.8 の(4)参照)

$$\mathcal{L}^{fermion}_{free} = \sum_l i\bar{L}_l\gamma^\mu\partial_\mu L_l + \sum_l i\bar{R}_l\gamma^\mu\partial_\mu R_l$$

$$= \sum_l i\bar{\psi}_{\nu_l}\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\partial_\mu\psi_{\nu_l} \sum_l i\bar{\psi}_l\gamma^\mu\partial_\mu\psi_l$$

(3) レプトンとゲージボソンの相互作用 ((4.100)式の通り)

$$\mathcal{L}^{LG}_{int} = \sum_l \frac{g}{2\sqrt{2}}\left(\bar{\psi}_l\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_{\nu_l}W^-_\mu + \bar{\psi}_{\nu_l}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_l W^+_\mu\right)$$

$$+ \sum_l \frac{g}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}\left(\bar{\psi}_{\nu_l}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_{\nu_l} - \bar{\psi}_l\gamma^\mu(g_V' - \gamma_5)\psi_l\right)Z_\mu$$

$$- \sum_l e\bar{\psi}_l\gamma^\mu\psi_l A_\mu$$

(4) ヒッグスボソンの自己相互作用（ユニタリ－gauge）

$$\mathcal{L}^{Higgs} = -U(\Phi) = \mu^2|\Phi|^2 - h|\Phi|^4$$
$$= \frac{1}{4}h\lambda^4 - h\lambda^2\chi^2 - h\lambda\chi^3 - \frac{1}{4}h\chi^4$$

(5) ヒッグス場とレプトンの相互作用（(4.123)式の通り）

$$\mathcal{L}^{HL}_{int} = -\sum_l f_l(\lambda+\chi)\bar{\psi}_l\psi_l \qquad (m_l = f_l\lambda\ ,\ m_l:\text{レプトンの質量})$$

(6) ヒッグス場とゲージボソンの相互作用

$$\mathcal{L}^{HG}_{int} = |(i\partial_\mu + g\hat{T}\cdot A_\mu + \frac{g'}{2}B_\mu\hat{Y})\Phi|^2 - |i\partial_\mu\Phi|^2$$

ここで

$$g\hat{T}\cdot A_\mu + \frac{g'}{2}B_\mu\hat{Y} = g\hat{T}^3A^3 + \frac{g'}{2}B_\mu\hat{Y} + \frac{g}{\sqrt{2}}(T_+W^+_\mu + T_-W^-_\mu)$$
$$= \begin{pmatrix} eA_\mu + g\frac{\cos 2\theta}{2\cos\theta}Z_\mu & \frac{g}{\sqrt{2}}W^+_\mu \\ \frac{g}{\sqrt{2}}W^-_\mu & -\frac{g}{2\cos\theta}Z_\mu \end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathcal{L}^{HG}_{int} = \frac{g^2}{8}(\lambda+\chi)^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}Z_\mu Z^\mu + 2W^+_\mu W^{-\mu}\right)$$

～EXERCISE～

4.11 ベクトルボソンの質量

問. ヒッグス場の真空期待値を固定せずに、ベクトルボソンの質量を求めよ.

解. ヒッグス場の運動項は

$$|(i\partial_\mu + g\hat{T}\cdot A + \frac{1}{2}g'YB_\mu)\Phi|^2$$
$$= \Phi^\dagger|g\hat{T}\cdot A + \frac{1}{2}g'YB_\mu|^2\Phi \qquad (\Phi\text{が}constant\text{として})$$
$$= A^i_\mu A^{\mu}_k g^2(\Phi^\dagger\hat{T}_i\hat{T}_k\Phi) + gg'A^i_\mu B^\mu Y(\Phi^\dagger\hat{T}_i\Phi) + \frac{1}{4}g'^2Y^2B_\mu B^\mu|\Phi|^2$$

ポテンシャルの項

$V(\phi) = -\mu^2|\Phi|^2 + h|\Phi|^4$ は

$|\langle 0|\Phi|0\rangle|^2 = \frac{1}{2}\lambda^2 \quad , \lambda^2 = \frac{\mu^2}{h}$ で最小化される.

(2)式を書き換えると、

$$\left(\frac{1}{4}g^2\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{A}^\mu+\frac{1}{4}g'^2Y^2B_\mu B^\mu\right)|\Phi|^2+gg'\boldsymbol{A}_\mu B^\mu Y\cdot\left(\Phi^\dagger\vec{\tau}\Phi\right)$$

とかける。これらが質量項となる。

ここで、

$$\boldsymbol{\tau}_{vac}=\frac{\langle 0|\Phi^\dagger\vec{\tau}\Phi|0\rangle}{|\langle 0|\Phi|0\rangle|^2}\quad,\ |\boldsymbol{\tau}_{vac}|^2=\frac{1}{4}$$

となる $\boldsymbol{\tau}_{vac}$ というものを導入する。(→ exercise 4.12)

すると、$\langle 0|\Phi^\dagger\vec{\tau}\Phi|0\rangle=\frac{1}{2}\lambda^2\boldsymbol{\tau}_{vac}$ とかける。

ここで、アイソスピン空間における $\boldsymbol{A}_\mu$ を、$\boldsymbol{\tau}_{vac}$ に平行な成分 $A^{\parallel}_\mu$ と、垂直な成分 $\boldsymbol{A}^{\perp}_\mu$ に分ける。

$$\boldsymbol{A}_\mu=2A^{\parallel}_\mu\boldsymbol{\tau}_{vac}+\boldsymbol{A}^{\perp}_\mu\qquad\left(\begin{array}{l}A^{\parallel}_\mu=2\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{\tau}_{vac}\\ \boldsymbol{A}^{\perp}_\mu\cdot\boldsymbol{\tau}_{vac}=0\end{array}\quad,\ \boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{A}^\mu=A^{\parallel}_\mu A^{\mu}_{\parallel}+A^{\perp}_\mu A^{\mu}_{\perp}\right)$$

これを用いると、

(7)式

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{8}(\lambda g)^2\left[\boldsymbol{A}^{\perp}_\mu\cdot\boldsymbol{A}^{\mu}_{\perp}+Z_\mu Z^\mu\left(1+\frac{g'^2}{g^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{8}(\lambda g)^2\left[2W^{(+)}_\mu W^{(-)\mu}+Z_\mu Z^\mu\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\right]$$

$$\left(\begin{array}{l}\boldsymbol{A}^{\perp}_\mu=\begin{pmatrix}A^1_\mu\\A^2_\mu\\0\end{pmatrix}\quad,\ 1+\frac{g'^2}{g^2}=\frac{1}{\cos^2\theta}\\ W^{(\pm)}_\mu=\frac{A^1_\mu\mp iA^2_\mu}{\sqrt{2}}\\ Z_\mu=\frac{gA^{\parallel}_\mu+g'YB_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}\quad\text{などを用いた。}\end{array}\right)$$

となる。

これより、WとZの質量は、

$$M_W=\frac{1}{2}\lambda g\ ,\ M_Z=\frac{M_W}{\cos\theta}$$

であり、一方、Z_μ に垂直な場

$$A_\mu=\frac{Yg'A^{\parallel}_\mu-gB_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}$$

は massless となる。(=光子場)

~EXERCISE~

4.12 $\boldsymbol{\tau}_{vac}$ のノルム

問. $|\boldsymbol{\tau}_{vac}|=\left|\frac{\Phi^\dagger\vec{\tau}\Phi}{\Phi^\dagger\Phi}\right|=\frac{1}{2}$ を示せ。

解. ユニタリーgauge (4.117)を用いる.

$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda+\chi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ なので.

$$\Phi^\dagger \hat{T}_3 \Phi = (0, \tilde{v})\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \tilde{v}\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\tilde{v}^2 \qquad \left(\tilde{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda+\chi)\right)$$

$\Phi^\dagger \hat{T}_1 \Phi = \Phi^\dagger \hat{T}_2 \Phi = 0$, $\Phi^\dagger\Phi = \tilde{v}^2$ だから.

$\mathbb{T}_{vac} = -\frac{1}{2}e_3$ （e_3 はアイソスピン空間の第3成分の単位ベクトル）

ここで、2×2行列 $\Phi\Phi^\dagger$ を導入.

$(\Phi\Phi^\dagger)_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha \Phi^*_\beta$ で有る. $(\alpha, \beta = 1, 2)$

さらに.

$\Phi^\dagger \hat{F} \Phi = T_r\{\hat{F}\Phi\Phi^\dagger\}$, $\Phi^\dagger \hat{F} \Phi = T_r\{\hat{F}\Phi\Phi^\dagger\}$, $|\Phi|^2 = T_r\{\Phi\Phi^\dagger\}$

$(\Phi\Phi^\dagger)^2 = |\Phi|^2 \Phi\Phi^\dagger$ などをみたすことがすぐにわかる.

$\Phi\Phi^\dagger$ は明らかにエルミート共役なので、単位行列とPauli行列 $\hat{T}_i$ を用いて.

$\Phi\Phi^\dagger = a + b_i \hat{T}_i$, $T_r\{\Phi\Phi^\dagger\} = 2a$ とあらわされる.

また、$(\Phi\Phi^\dagger)^2 = (a + b_i\hat{T}_i)^2 = a^2 + 2ab_i\hat{T}_i + (b_i\hat{T}_i)^2$

$$= a^2 + \frac{1}{4}\sum_i b_i^2 + 2ab_i\hat{T}_i = |\Phi|^2(a + b_i\hat{T}_i) \longleftarrow (6),(7)\text{式より}$$

よって、$\frac{1}{4}\sum_i b_i^2 = \frac{1}{4}|\Phi|^4$ （上式で、$a = \frac{|\Phi|^2}{2}$ を代入）

これらより.

$$(\mathbb{T}_{vac})^2 = \left(\frac{\Phi^\dagger \hat{\mathbb{T}}\,\Phi}{\Phi^\dagger\Phi}\right)^2 = \frac{(\Phi^\dagger\hat{\mathbb{T}}\,\Phi)^2}{|\Phi|^4}$$

$$= \frac{(T_r\{\hat{T}_i\Phi\Phi^\dagger\})^2}{|\Phi|^4}$$

$$= \frac{(T_r\{\hat{T}_i(a + b_j\hat{T}_j)\})^2}{|\Phi|^4}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\sum_i b_i^2}{|\Phi|^4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$\therefore |\mathbb{T}_{vac}| = \frac{1}{2}$