

# 4.6 隠れた $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変性

2011. 11. 21

担当 河合

ヒッグス・キラル機構について別の観点から考察する。

ローカルなゲージ対称性を自発的に破り、ゲージボソンに質量を与える。

•  $U(2)$  ゲージ理論の自発的対称性の破れ

massless なベクトル場  $A_\mu$  ... 自由度 2  
(質量 0 のゲージボソン)

複素スカラー場  $\phi$  ... 自由度 2  
(ヒッグス場)

↳  $A_\mu$  を massive な場  $A'_\mu$  に変換するために

1 自由度は massless 場  $A_\mu$  に“食われる”。

(※ 質量 0 スピン 1 の粒子の自由度は 2 (光子とか) → ゲージボソンが質量を得る。  
質量を有するスピン 1 の粒子の自由度は 3)

第 2 成分  $\chi$  は massive なスカラー場として残る。

• 標準理論では、まず始めに、massless isotriplet なゲージ場を導入

$$(A_\mu) = (A_\mu^a) \quad (\leftarrow SU(2) \text{ ゲージ変換でのゲージ不変性の要求から}) \quad (4.145)$$

弱相互作用は短距離力なので massive でなければならぬ。

• 加えて、 $U(1)$  対称性が存在 massless ベクトル場  $B_\mu$   
統一理論でフォトン記述

→ これら全ての要求を満たすために、スカラーヒッグス場を導入 (ワインバーグ・サラムのアイデア)

ヒッグスダブレット

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \pm \frac{1}{2}, \quad Y = \frac{1}{2} \quad (4.146)$$

$\phi_1 \sim \phi_4$  : 実関数  $\Pi$  : ウィークアイソスピン (固定)

$Y$  : ハイパーチャージ (後で固定)

3 つの massless ゲージボソンが質量を得る機構は  $U(1)$  対称性のときと同じ

massless なベクトル場の波動方程式 massive なベクトル場

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \langle \hat{J}^\mu \rangle \quad \Rightarrow \quad (\square + M) A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0 \quad (4.147) \quad (4.149)$$

$$\langle \hat{J}^\mu \rangle = -M^2 A^\mu \quad (\text{真空の遮蔽}) \quad (4.148)$$

スカラー場  $\Phi$  として  $\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(i\theta(x)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  を選ぶとゲージ対称性が破れたように見える。  
(実際は破れたのではなく隠れているだけ)

一般性を失うことなく、ヒッグス場  $\Phi$

$$\Phi = \exp(i\alpha(x) \cdot \hat{\Pi}) \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) \end{pmatrix} \quad (4.150)$$

と書くことができる。  $\alpha(x) = \{\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)\}$  (  $\alpha_i(x)$  : 実位相場 )  
 (  $H(x)$  : 実場 )

これら 4 つの場は  $\phi_1 \sim \phi_4$  と等価

この変換に対して理論が不変になるよう要求して  $SU(2)$  ゲージ不変になる。

$\hat{\pi} = \{\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{\pi}_3\}$  はこの対称群の生成子。

• カレント  $j^\mu(A_\nu, \Psi)$  について

$j^\mu$  はアイソベクトルで 3つのアイソスピンの成分がそれぞれ 4元ベクトル single スカラー場  $\phi$  の場合

$$j^\mu = -ig[\phi^*(\partial^\mu\phi) - (\partial^\mu\phi)\phi] = g[\phi^*(-i\partial^\mu\phi) + (-i\partial^\mu\phi)^*\phi] \quad (4.151)$$

$g$ : スカラー場  $\phi$  の電荷

電磁場  $A_\mu$  と結合するとき、カレント  $j^\mu$  は  $\partial_\mu$  を共変微分に変えて、ゲージ不変になる。

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu = i(-i\partial_\mu - gA_\mu) \quad (4.152)$$

doublet  $\Psi$  の場合  $j^\mu$  は 3つのカレントで構成され、

$$j^\mu = \{j^{a\mu}\} = -ig\{\Psi^\dagger \hat{\pi}^a (\partial^\mu \Psi) - (\partial^\mu \Psi)^\dagger \hat{\pi}^a \Psi\} \\ = g\{\phi^\dagger \hat{\pi}^a (-i\partial^\mu \Psi) + (-i\partial^\mu \Psi)^\dagger \hat{\pi}^a \Psi\} \quad (a=1,2,3, \mu=0,1,2,3) \quad (4.153)$$

$SU(2) \times U(1)$  ゲージ対称性を持つ弱相互作用の標準理論では、4つのカレントが存在

(3つ:  $U(1)$  アイソスピンカレント  $j^{a\mu} (a=1,2,3)$  生成子  $\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{\pi}_3$   
 1つ: ハイパーチャージカレント  $j^Y$   $\hat{Y}$ )

$$j^Y = -i\frac{g'}{2}[\Psi^\dagger \hat{Y} (\partial^\mu \Psi) - (\partial^\mu \Psi)^\dagger \hat{Y} \Psi] \\ = -i\frac{g'}{2} Y [\Psi^\dagger (\partial^\mu \Psi) - (\partial^\mu \Psi)^\dagger \Psi] \quad (4.154)$$

$SU(2) \times U(1)$  ゲージ不変性から (4.153)(4.154) の  $\partial_\mu$  を次の共変微分  $D_\mu$  で置き換えた。

$$\partial^\mu \rightarrow D^\mu = \partial^\mu - ig\hat{\pi} \cdot A^\mu - i\frac{g'}{2}\hat{Y} B^\mu \quad (4.155)$$

置き換えを実行する

$$(4.153) \rightarrow j^{a\mu}(\Psi, A_\nu, B_\nu) = -ig[\Psi^\dagger \hat{\pi}^a (\partial^\mu \Psi) - (\partial^\mu \Psi)^\dagger \hat{\pi}^a \Psi] \\ - \frac{g^2}{2}[\Psi^\dagger \Psi A^{a\mu}] - g' Y \Psi^\dagger \hat{\pi}^a \Psi B^\mu \quad (4.156)$$

$$(4.154) \rightarrow j^Y(\Psi, A_\nu, B_\nu) = -i\frac{g'}{2} Y [\Psi^\dagger (\partial^\mu \Psi) - (\partial^\mu \Psi)^\dagger \Psi] \\ - g' Y \Psi^\dagger \hat{\pi} \Psi \cdot A^\mu - \frac{g'^2}{2} Y^2 \Psi^\dagger \Psi B^\mu \quad (4.157)$$

- $\hat{\pi}^a \hat{\pi}^b + \hat{\pi}^b \hat{\pi}^a = \frac{1}{2} \delta^{ab}$
  - $\hat{\pi}^a, \hat{Y}$  はエルミート
  - $\phi^\dagger \hat{\pi}^a \phi = (\partial^\mu \phi)^\dagger$
  - $[\hat{Y}, \hat{\pi}^a] = 0$
- (4.158)

真空の期待値として、 $\Phi_0 = \langle \hat{\Phi} \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  を選ぶ

$$\begin{pmatrix} 0 \\ H(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\exp(i\hat{Y}\alpha(x))}_{U(1) \text{ ゲージ変換}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (4.159)$$

(4.154) を (4.156)(4.157) に代入して、

$$\partial_0^{\alpha\mu} = -\frac{f^2}{2} \frac{\lambda^2}{2} A^{\alpha\mu} + f g' Y \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{2} \delta^{\alpha 3} B_\mu \quad (4.160)$$

$$\partial_0^{\nu\mu} = f g' Y \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{2} \delta^{\alpha 3} A^{\nu\mu} - \frac{f^2}{2} Y^2 \frac{\lambda^2}{2} B^{\nu\mu} \quad (4.161)$$

よって (4.147) の波動方程式は

$$(\square A^{\alpha\mu} + M_A^2 A^{\alpha\mu}) - \partial^\mu \partial_\nu A^{\alpha\nu} = \frac{1}{4} f g' Y \lambda^2 \delta^{\alpha 3} B^\mu \quad (4.162)$$

$$M_A = \frac{1}{2} f \lambda$$

第3成分だけあり (4.163)

$B_\mu$  も同様の式に従い、

$$(\square B^{\alpha\mu} + M_B^2 B^{\alpha\mu}) - \partial^\mu \partial_\nu B^{\alpha\nu} = \frac{1}{4} f g' Y \lambda^2 A^{3\mu} \quad (4.164)$$

$$M_B = \frac{1}{2} f' \lambda Y \quad (4.165)$$

→ ゲージ場  $A^\mu, B^\mu$  が質量を得た。

2つの問題点

①  $Y$  と  $\lambda$  どのような値を選ぶのか?

② (4.162)(4.164) の右辺が対称でない。

( $A^\mu, A^{3\mu}$  はなく,  $A^{3\mu}, B^\mu$  だけ)

$A^{3\mu}$  から第3の質量を得たボソンが生まれた。

$A^{3\mu}, B^\mu$  は本当の物理的な場じゃない。

$$\begin{aligned} (4.160)(4.161) \text{ から} \quad & \left( \begin{aligned} \square A^{3\mu} - \partial^\mu \partial_\nu A^{3\nu} &= -M_A^2 A^{3\mu} + M_A M_B B^\mu \quad \dots \textcircled{1} \\ \square B^{\alpha\mu} - \partial^\mu \partial_\nu B^{\alpha\nu} &= -M_B^2 B^{\alpha\mu} + M_A M_B A^{3\mu} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned} \right) \quad (4.166) \end{aligned}$$

$$f' \partial_0^{\alpha 3\mu} + f \partial_0^{\nu\mu} = 0 \quad (4.167)$$

$Y = 1$  とおくと、 $Y$  と  $\lambda$  の関係  $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$  を考慮して、ヒッグス場

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \phi^{(0)} \end{pmatrix} \quad (4.169) \quad \text{特別な場合} \quad (4.168)$$

$$(4.167) \text{ の } \pi \text{ から } A^\mu \propto f' A^{3\mu} + f B^\mu$$

一般に  $Y \neq 1$  のとき (4.166) の ①  $\times M_B +$  ②  $\times M_A$  を  $\rightarrow$  同様の結果を得る

$$(\square \delta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu)(M_B A^{3\mu} + M_A B^\nu) = 0 \quad (4.171)$$

$$\rightarrow \text{massless gauge field } A^\mu = \sin \theta A^{3\mu} + \cos \theta B^\mu \quad (4.172)$$

$$\tan \theta = \frac{M_A}{M_B} = \frac{f' Y}{f}, \quad \sin \theta = \frac{f' Y}{\sqrt{f'^2 Y^2 + f^2}}, \quad \cos \theta = \frac{f}{\sqrt{f'^2 Y^2 + f^2}} \quad (4.173)$$

$A^\mu$  はマクスウェル方程式をみたす。

$$(\square \delta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A^\nu = 0 \quad (4.174)$$

$A^\mu$  に直交する  $Z^\mu$  は ( $Z^\mu = \cos \theta A^{3\mu} - \sin \theta B^\mu$ ) 次の式に従う。 (4.175)

$$(\square \delta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu + M_Z^2 \delta^{\mu\nu}) Z^\nu = 0 \quad (4.176)$$

$$M_Z^2 = M_A^2 + M_B^2 = \frac{1}{4} \lambda^2 [(f' Y)^2 + f^2] = M_A^2 \left[ 1 + \left( \frac{M_B}{M_A} \right)^2 \right] = \frac{M_B^2}{\cos^2 \theta} \quad (4.177)$$

→  $Z$  ボソンは質量を得た。

$D^\mu \in A^\mu$ ,  $Z^\mu$  で書き直す。  $SU(2) \times U(1)$  共変微分

$$D^\mu = \partial^\mu - ig(\hat{T}^1 A^{1\mu} + \hat{T}^2 A^{2\mu}) - ig \sin\theta A^\mu (\hat{T}^3 + \frac{1}{2}) - \frac{ig}{\cos\theta} Z^\mu (\cos^2\theta \hat{T}^3 - \frac{1}{2} \sin^2\theta) \quad (4.179)$$

1111° - 4° - ジ Y は消えよが, Y=1 は必要で Y=1° 4° のみ

$$-ig \sin\theta (\hat{T}^3 + \frac{1}{2} \hat{Y}) A^\mu \quad (4.180)$$

と書ける。  $A^\mu$  は 7 ポイント場,  $\hat{T}^3 + \frac{1}{2} \hat{Y} = Q$  なので、

$$g \sin\theta = e \quad (4.181)$$

以上より  $M_A = M_W = \frac{1}{2} g \lambda$

$$\frac{g}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{A M_W^2}$$

$$\frac{g}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\lambda^2} \quad (\lambda = 250 \text{ GeV})$$

$$\sin^2\theta \approx 0.23 \pm 0.001$$

$$M_W = \frac{e}{2^{5/4} \sqrt{g} \sin\theta} \approx \frac{37.5}{\sin\theta} \text{ GeV} \approx 80 \text{ GeV}$$

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos\theta} = 90 \text{ GeV}$$

3つのポイント

この本質は SU(2) の破れと U(1) の残存

1) 2) 3) の関係

Y の値は SU(2) の破れと関係がある

① ゲルマン-西島関係 (4.168) は GSW 理論で重要な式だが、

$SU(2) \times U(1)$  ゲージ不変性からは導かれぬ。

② massless な場  $A^{3\mu}$ ,  $B^\mu$  がヒッグス機構で massive 1つ, massless 1つの場となることについて、

$$\Phi_0 \equiv \langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{という特別な場合を考へる。} \quad (4.182)$$

真空として  $\Phi_0$  を選ぶと、対称性が破れ、ボソンが質量を得る。 ( $U(1)$  のとき)

対称群  $SU(2) \times U(1)$  は  $U(1)$  より大きい  $\rightarrow$  対称群の一部が壊れたまま

$\rightarrow$  ヒッグス場は massless (対称な部分)

$$\text{今 } \hat{Y}\Phi_0 = \Phi_0, \hat{T}^3\Phi_0 = -\frac{1}{2}\Phi_0 \text{ で } \Phi_0 \rightarrow \Phi_0' = \exp\left[i\alpha(\tau)(\hat{T}^3 + \frac{1}{2}\hat{Y})\right]\Phi_0 = \Phi_0 \quad (4.183)$$

$\Phi_0$  はこの変換で変わらない。  $\rightarrow$  ゲージ場は質量 0 (7 ポイント)

③ 2 = タリゲージ

massive なベクトルボソンのプロパゲータ

$$\frac{-g^{\mu\nu} + \frac{(1-\xi)k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi M^2}}{k^2 - M^2} \quad (4.186)$$

始めは存在したゲージ対称性が隠れている。

M はゲージを変えよと変わる。  $M = \frac{1}{2} g \lambda$

$$k^2 = M^2, k^2 = \xi^2 M^2 \text{ でポール}$$

物理的

物理的でない  $\rightarrow$  2 = タリゲージ ( $\xi \rightarrow \infty$ ) では表れない。

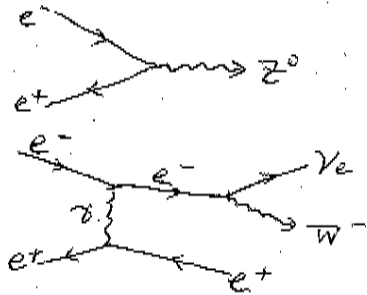
# 5. レプトンの SW 理論の性質

標準理論の成功 — 中性カレントの演算子の形から媒介ボソンの質量を  
 精確に予言したこと。

•  $e^+e^-$  貯蔵リング内では  $W^\pm$  ボソンより  $Z^0$  ボソンができた。

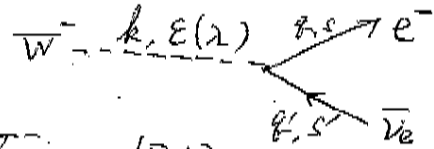
•  $Z^0$  ボソン:  $e^+e^-$  対消滅

•  $W^\pm$  ボソン: 高次の過程



## 5.1 $W^-$ ボソンの崩壊

(4.139) 式  $L_{SW}^{(3L)}$  の第 1 項より最低次の散乱行列要素



$$S(W^- \rightarrow e \bar{\nu}_e) = -i \int d^4x \frac{(-g)}{2\sqrt{2}} \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e} W_\mu^- \quad (5.1)$$

粒子の波動関数は

$$\begin{cases} W_\mu^-(x) = (2V k_0)^{-\frac{1}{2}} \epsilon_{\mu}(k, \lambda) e^{-ik \cdot x} \\ \psi_e(x) = (2V q_0)^{-\frac{1}{2}} u_e(q, s) e^{-iq \cdot x} \\ \psi_{\nu_e}(x) = (2V q'_0)^{-\frac{1}{2}} v_{\nu_e}(q', s') e^{-iq' \cdot x} \end{cases} \quad (5.2)$$

偏極ベクトル  $\epsilon_{\mu}(k, \lambda)$  は Appendix C より

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\mu} \epsilon_{\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{M_W^2} \quad (5.3)$$

$Z^0$  ボソンの崩壊と同様に計算していく。終状態は和をとる。始状態は平均して  $T$  で割る。

$$W = \frac{1}{T} \int d^4x \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \frac{1}{3} \sum_{\lambda, s, s'} |S(W^- \rightarrow e \bar{\nu}_e)|^2 \quad (5.5)$$

$$(5.2) \text{ より } \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = 4(g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5) = -4i \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \quad (+2i \text{ 等}) \quad \text{崩壊率は}$$

$$W = \frac{g^2}{48\pi^2} \frac{1}{k_0 M_W^2} \int \frac{d^3q}{q_0} \int \frac{d^3q'}{q'_0} \delta^4(q + q' - k) \left[ (q \cdot k)(q' \cdot k) + \frac{1}{4} M_W^2 (M_W^2 - m_e^2) \right] \quad (5.12)$$

$W^-$  ボソンの静止系  $k_\mu = (M_W, 0)$  での崩壊率は、

$$W = \frac{1}{48\pi^2} g^2 M_W \left(1 - \frac{m_e^2}{M_W^2}\right)^2 \left(1 + \frac{m_e^2}{2M_W^2}\right) \Theta(M_W - m_e) \quad (5.15)$$

$$\left( \frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \right)$$

という条件から

• 媒介ボソンより レプトンははるかに軽い

$$W(W^- \rightarrow e \bar{\nu}_e) \approx \frac{G}{6\pi\sqrt{2}} M_W^3 \approx 225 \text{ MeV} \approx 2.5 \times 10^{23} \text{ s}^{-1} \quad (5.16)$$

レプトン 3 つの崩壊があるので  $W^-$  ボソンの寿命は

$$\tau_W \leq \frac{1}{3W} \approx \frac{2\pi\hbar}{6M_W^3} \approx 10^{-24} \text{ s} \quad (5.17)$$

• 質量が 62V 以上にしては長い。直接観測するには短すぎる (おわ箱では見えない)

W ボソン  $\rightarrow$  荷電レプトンとニュートリノが反対方向に放出されるのを観測  
運動量  $\sim 40 \text{ GeV}/c$   $\hookrightarrow$  検出できない

W ボソンはクォークとも結合する  $\rightarrow$  ハドロンに崩壊 (全終状態  $\frac{2}{3}$ )

レプトンのうち、1つづつ崩壊は 10% ほど。

Ex 5.1  $Z^0$  ボソンの崩壊  $Z^0 \rightarrow l^+ l^-$ ,  $Z^0 \rightarrow \nu \bar{\nu}$

まず  $Z^0 \rightarrow l^+ l^-$   
(a)  $Z^0$  に比べて  $l^+, l^-$  の質量無視 (4.139) より散乱行列要素

$$S(Z^0 \rightarrow l^+ l^-) = \int d^4x \frac{(-i)}{4 \cos^2 \theta} \bar{\psi}_l \gamma^\mu (g_V' - \gamma^5) \psi_l Z_\mu \quad (1)$$

$$g_V' = 1 - 4 \sin^2 \theta \ll 1 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{崩壊率 } W(Z^0 \rightarrow l^+ l^-) &\approx \frac{g^2 (g_V'^2 + 1)}{192 \pi \cos^2 \theta} M_Z \\ &= \frac{G (g_V'^2 + 1)}{\sqrt{2} \cdot 24 \pi \cos^2 \theta} M_W^3 \approx 24 \text{ MeV} \quad (8) \end{aligned}$$

(b)  $Z^0 \rightarrow \nu \bar{\nu}$

最後の W で  $g_V' = 1$  とすればよく、

$$W(Z^0 \rightarrow \nu \bar{\nu}) \approx \frac{g^2 (1+1)}{192 \pi \cos^2 \theta} M_Z = \frac{G}{\sqrt{2} \cdot 12 \pi \cos^2 \theta} M_W^3 = 167 \text{ MeV} \quad (9)$$

e,  $\mu$ ,  $\tau$  合わせて全レプトンへの崩壊は

$$W(Z^0 \rightarrow \text{leptons}) = \frac{750}{50} \text{ MeV} \quad (10)$$

崩壊幅の実験値からニュートリノの世代が 3 世代だと分かる

## 5.2 $e^+ e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$

媒介ボソンは寿命が短く直接観測できないので、 $e^+ e^-$  対消滅で  $Z^0$  ボソンが生成されずには  $\mu^+ \mu^-$  に崩壊する過程を考へる。

$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  は 3 通り

○  $e^+ e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$  ○  $e^+ e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-$  ○  $e^+ e^- \rightarrow H^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$   $\hookrightarrow$  2 粒子

ベクトルボソンのファインマンルールによる全散乱振幅は 3 つの部分から成り

$$S(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k)}{4V^2 (p_0 k_0 k'_0 p'_0)^{1/2}} (A_\gamma + A_Z + A_H) \quad (5.18)$$

$$\left( \begin{aligned} A_\gamma &\sim e^2 \sim g^2 \sin^2 \theta \\ A_Z &\sim \frac{g^2}{\cos^2 \theta} \end{aligned} \right) \rightarrow \text{オ-ク-インシ}$$

$$A_H \sim f_\mu f_e = \frac{m_\mu m_e}{\lambda^2} = g^2 \frac{m_\mu m_e}{4M_W^2} \approx 10^{-8} g^2 \rightarrow \text{無視} \quad (5.21a) \sim (5.21c)$$

○ ヒッグス粒子と媒介ボソンのカップリングの強さ  $g$

○ レプトンとヒッグス場の相互作用は  $\frac{g m_\nu}{M_W}$

$e^+e^-$  散乱は衝突実験なので 実験室系 = 重心系

以下重心系で考へる。

$$k_0 = p_0, \quad k = -p, \quad k'_0 = p'_0, \quad k' = -p'$$

重心系でのエネルギーの2乗は

$$s = (k+p)^2 = 4p_0^2 = 4k_0^2 \quad (5.22)$$

Appendix C より重心系での粒子のカルント

$$J = \frac{\sqrt{(k+p)^2 - m_e^2 m_e^2}}{k_0 p_0 v} = \frac{2|p|}{p \cdot v} \quad (5.25)$$

$Jv$ : 粒子の相対速度

微分断面積 (重心系) は行列要素の2乗を  $v_T, J, \rho (=v^{-1})$  で割って立体角で積分する

$$d\sigma \sim \frac{|M|^2}{v_T} \frac{1}{J} \frac{1}{\rho} \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{V}{(2\pi)^3} \sim \frac{1}{v^2} \frac{1}{v_T} \frac{1}{V} \frac{1}{V} (2\pi)^4 \delta^4(0) V \cdot V$$

入射粒子のスピンは平均をとる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{(2\pi)^4}{32k_0|p|} \frac{1}{4} \sum_{s,s'} \int_0^\pi \frac{|p|^2 d|p|}{(2\pi)^3 p_0} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 k'_0} \delta^4(p+k'-p-k) |A_T + A_Z|^2 \quad (5.26)$$

$$\textcircled{2} \sum |A_T + A_Z|^2 \text{ について} \quad (5.27)$$

散乱で重要なのは  $106 \text{ eV}$  以上にして  $\mu$  の質量  $m_e, m_\mu$  を含む項無視

ボリンの  $\gamma^0 \gamma^i \gamma^j \gamma^k$  の分子に  $4$  元  $\gamma$  の積  $(k+p)$  が含まれる項を無視

$$\left( \begin{array}{l} k^2 = p^2 = m_e^2 \text{ 等} \\ (k+p)_\alpha \text{Tr} \{ (\not{k} - m_e) \gamma^\alpha (\not{p} + m_e) \gamma^\beta \} = m_e^2 \text{ (斜線)} \approx 0 \end{array} \right)$$

$\rightarrow g_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$  の項だけが残る。

$$\sum |A_T + A_Z|^2 \approx \frac{e^4}{s^2} \text{ (斜線)} + e^2 g^2 \text{ (斜線)} + g^4 \text{ (斜線)} \quad (5.29)$$

$e^2 g^2$  (斜線) の項のトレースの計算

$$\text{Tr} \{ \not{p}' \gamma^\alpha \not{k}' \gamma^\beta (g_\alpha^\gamma - \gamma_5) \} = 4g_\alpha^\gamma [p'^\alpha k'^\beta + p'^\beta k'^\alpha - (p' \cdot k') g^{\alpha\beta}] + 4i \epsilon^{\rho\alpha\beta\gamma} p'_\rho k'_\beta \quad (5.30)$$

$$\text{Tr} \{ \not{k} \gamma^\alpha \not{p} \gamma^\beta (g_\alpha^\gamma - \gamma_5) \} = 4g_\alpha^\gamma [k_\alpha p_\beta + k_\beta p_\alpha - (p \cdot k) g_{\alpha\beta}] + 4i \epsilon_{\rho\alpha\beta\gamma} k^\rho p^\beta \quad (5.31)$$

$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \times (\alpha, \beta \text{ について対称な式}) = 0$

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\rho\alpha\gamma\delta} = 2(g_\mu^\rho g_\nu^\delta - g_\mu^\delta g_\nu^\rho)$$

$$(5.30) \times (5.31) \rightarrow 32(g_\alpha^\gamma - 1)(p' \cdot p)(k' \cdot k) + 32(g_\alpha^\gamma + 1)(p' \cdot k)(k' \cdot p) \quad (5.32)$$

$\frac{e^4}{s^2}$  (斜線),  $g^4$  (斜線) は同様

$\frac{m_e^2}{s}, \frac{m_\mu^2}{s}$  の項は無視,  $g = e \sin\theta$  とした結果

$$\sum_{s,s',t,t'} |A_T + A_Z|^2 \approx 32 \frac{e^4}{s^2} \left[ 1 + \frac{1}{2}(g_\alpha^\gamma + 1) R(s) + \frac{1}{16}(g_\alpha^\gamma + 6g_\alpha^\gamma + 1) R(s)^2 \right] (p' \cdot k)(k' \cdot p) + 32 \frac{e^4}{s^2} \left[ 1 + \frac{1}{2}(g_\alpha^\gamma - 1) R(s) + \frac{1}{16}(g_\alpha^\gamma - 1) R(s)^2 \right] (p' \cdot p)(k' \cdot k) \quad (5.35)$$

共鳴因子

$$R(s) = \frac{s}{(s - M_Z^2) \sin^2 2\theta} \quad (5.36)$$

$\sqrt{s}$  に比べ  $\mu$  の質量は小さいと

$$k^2 = p^2 = m_e^2 \approx 0, \quad k'^2 = p'^2 = m_e^2 \approx 0$$

$$|k| \approx p_0, \quad |k'| \approx p_0, \quad |p'| \approx p_0, \quad |k| \approx k_0'$$

$$\text{重心系で } p = -k, \quad p' = -k'$$

$$\therefore p_0 \approx k_0 \approx p_0' \approx k_0' \approx \frac{1}{2}\sqrt{s}$$

$$p' \cdot p \approx \frac{s}{4} \cos 2\theta, \quad k' \cdot k \approx \frac{s}{4} \cos 2\theta, \quad p' \cdot k \approx -\frac{s}{4} \cos 2\theta, \quad k' \cdot p \approx -\frac{s}{4} \cos 2\theta$$

$$\left. \begin{aligned} (p' \cdot p) &= p_0' \cdot p_0 - p' \cdot p \approx \frac{s}{4} (1 - \cos 2\theta) \\ (k' \cdot k) &\approx \frac{s}{4} (1 - \cos 2\theta) \\ (p' \cdot k) &\approx (k' \cdot p) \approx \frac{s}{4} (1 + \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \rightarrow (5.35) \text{ の } ( ) ( ) \quad (5.42)$$

⊙ (5.26) の積分部分には

$$\int_0^\infty \frac{|p'|^2 d|p'|}{(2\pi)^3 p_0'} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 k_0'} \delta^4(p' + k' - p - k) \delta^3(p' + k') \delta(p_0' + k_0' - \sqrt{s}) \quad (\because p' + k' = 0)$$

$$\approx \int_0^\infty \frac{p_0' dp_0'}{(2\pi)^6 p_0'} \delta(2p_0' - \sqrt{s}) = \frac{1}{2(2\pi)^6} \quad (5.43)$$

微分断面積は  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$  とし

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{\alpha^2}{4s} \left\{ (1 + \cos^2\theta) \left[ 1 + \frac{1}{2} g_V'^2 R(s) + \frac{1}{16} (g_V'^2 + 1)^2 R(s)^2 \right] + \cos 2\theta \left[ R(s) + \frac{1}{2} g_V'^2 R(s)^2 \right] \right\} \quad (5.44)$$

全断面積

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} \approx \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \left[ 1 + \frac{1}{2} g_V'^2 R(s) + \frac{1}{16} (g_V'^2 + 1)^2 R(s)^2 \right] \quad (5.45)$$

1989年まで使った加速器は  $M_Z$  より十分小さく次の近似が成り立つ。(  $\sqrt{s} \ll M_Z$  )

$$R(s) = \frac{s}{(s - M_Z^2) \sin^2 2\theta} \approx -\frac{s}{M_Z^2 \sin^2 2\theta}, \quad R(s)^2 \approx 0 \quad (5.46)$$

このとき微分断面積 (5.44) は次の近似される。

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} \approx \frac{\alpha^2}{4s} \left[ (1 + \cos^2\theta) \left( 1 - \frac{g_V'^2 s}{2M_Z^2 \sin^2 2\theta} \right) - \frac{s}{M_Z^2 \sin^2 2\theta} \cos 2\theta \right] \quad (5.47)$$

$$g_V' = 1 - 4 \sin^2\theta \ll 1 \quad (5.44) \text{ 弱い相互作用による補正は ①より②の影響}$$

$\theta = 11^\circ$  の角  $\sin^2\theta \approx 0.25$ ) 後方 ( $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ) への散乱が増す

→ 中性弱カレントは  $\theta = 90^\circ$  まわりで非対称!

この非対称性は PETRA で発見

⊙ 5.6 実線 → GSW

破線 → QED Bhabha 散乱



・高次のファイマングラフを考えたとき QEDにも小さい非対称な寄与があるが、  
1%以下で中性弱カレントの影響の方が大きい ( $\sqrt{s} = 34 \text{ GeV}$  で)。

・ $\theta$  の角分布の非対称性から中性弱カレントのベクトル、軸性ベクトル結合定数の  
実験値が得られた。

→ GSW の予言値  $g_V' = 1 - 4 \sin^2 \theta$ ,  $g_A' = 1$  によく一致 (図 5.7)

・この方法でワインバー角の最良の値が得られて、

$$\sin^2 \theta = 0.25 \pm 0.07 \quad (5.49)$$

これを使うと  $g_V' \approx 0$  で (5.45) の全断面積は簡単に書けて、

$$\bar{\sigma}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \approx \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \left[ 1 + \frac{1}{16 \sin^4 2\theta} \frac{s^2}{(s - M_Z^2)^2} \right] \quad (5.50)$$

$s = M_Z^2$  付近で  $\sigma \rightarrow \infty$  → Z ボソンが共鳴として表れる。

実際に  $\bar{\sigma}$  が発散する訳ではないのは、Z ボソン自身が固有の崩壊幅を持つから。  
(5.36) を補正して、

$$R(s) = \frac{s}{\sin^2 2\theta \left[ s - \left( M_Z - \frac{i}{2} \Gamma_Z \right)^2 \right]} \quad (5.51)$$

これを使うと

$$\bar{\sigma} \approx \underbrace{\frac{4\pi\alpha^2}{3s}}_{\sigma_{\text{QED}}} \left[ 1 + \frac{1}{16 \sin^4 2\theta} \frac{s^2}{\underbrace{\left( s - M_Z^2 + \frac{\Gamma_Z^2}{4} \right)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2}_R} \right] \quad (5.52)$$

共鳴は  $s = M_Z^2 - \frac{\Gamma_Z^2}{4}$  で  $\bar{\sigma}_{\text{max}} \approx \frac{4\pi\alpha^2}{3\Gamma_Z^2}$  (Z ボソンの崩壊幅に依存) (5.53)

$$R_{\text{min}} = \frac{\bar{\sigma}_{\text{max}}}{\sigma_{\text{QED}}} \approx \frac{M_Z^2}{\Gamma_Z^2} \gg 1 \quad \square 5.8 \quad (5.54)$$

共鳴曲線の測定から、Z ボソンの質量と幅が精確に測られた。

LEP, SLC で GSW 理論が先例のない精度で確認され

標準理論は大成功をおさめた。→ Example 5.3