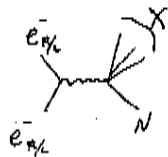


Example 6.9. Parity violation in inelastic lepton-nucleon scattering.

レプトンと核子の非弾性散乱の偏り度の破れの度合いを測る。

偏極した電子を無偏極の核標的と散乱させる。

$$e_{pol}^- + N \rightarrow e_{pol}^- + X$$



非対称度 Δ : $\Delta = \frac{d\sigma_R - d\sigma_L}{d\sigma_R + d\sigma_L} \dots (1)$

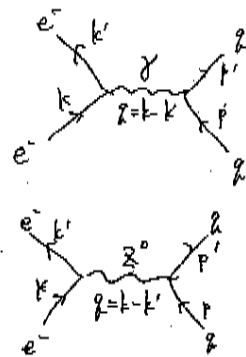
$\Delta \neq 0 \Leftrightarrow$ 偏り度の破れ.

1⁰-トン模型: 核子は相互作用しない自由なクォークで構成される。

電子と核子の散乱 \Rightarrow 電子とクォークの散乱の和.

電子とクォークの相互作用は photon を媒介した Z^0 交換がある。

ハミルトンが決まった電子とクォークの状態と変化する率にする。



交換の振幅: $A_Y^{hH} = i Q_e Q_q e^{-i} \bar{u}_e^h(k) \gamma_\mu u_e^h(k) \frac{1}{q^2} \bar{u}_q^H(p) \gamma^\mu u_q^H(p) \dots (2)$

Q_e : 電子の電荷 ($Q_e = -1$), Q_q : クォークの電荷

h : 電子のハミルトン, H : クォークのハミルトン.

高エネルギー極限 $\Rightarrow H, h$ はカイラリティと一致する。例えば、右巻電子のスピンは

$$u_e^R(k) = \hat{p}_+ u_e(k) = \frac{1 + \gamma_5}{2} u_e(k) \dots (3)$$

で与えられる。

初期状態と終状態の粒子のハミルトンは保存する。

Z^0 交換の振幅を得るために、式(6.55)の中性弱カレントを用いる。

$$\frac{g}{2 \cos \theta} \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \left(T_3 - 2 Q \sin^2 \theta - T_3 \gamma_5 \right) \psi \right] \dots (4)$$

projection (chirality)

$$C_V - C_A \gamma_5 = C_R \hat{p}_+ + C_L \hat{p}_- \\ C_R = -2 Q \sin^2 \theta$$

$$Z^0 \text{ 交換の振幅: } A_Z^{hH} = \frac{-i g^2}{4 \cos^2 \theta} \left[\bar{u}_e^h(k) \gamma^\mu (C_R \hat{p}_+ + C_L \hat{p}_-) u_e^h(k) \right] \frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_Z^2}}{q^2 - M_Z^2} \left[\text{クォーク部分} \right]$$

核子散乱-全断面積 $m_q \cdot m_e \ll q^2 \ll M_Z^2$

$$\bar{U}_e^h(k) \gamma^\mu (C_R^e \hat{P}_+^e + C_L^e \hat{P}_-^e) U_e^h(k) = \overline{\hat{P}_h^e U_e(k)} \gamma^\mu (C_R^e \hat{P}_+^e + C_L^e \hat{P}_-^e) \hat{P}_h^e U_e(k) \quad (2)$$

$$= U_e(k)^\dagger \hat{P}_h^e \gamma_0 \gamma^\mu (C_R^e \hat{P}_+^e + C_L^e \hat{P}_-^e) \hat{P}_h^e U_e(k) = (*)$$

$$\hat{P}_h^e \gamma_0 \gamma^\mu = \hat{P}_h^e \gamma_0 \gamma^\mu = \gamma_0 \hat{P}_h^e \gamma^\mu = \gamma_0 \gamma^\mu \hat{P}_h^e \quad \& \gamma.$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 $(\gamma_0)^\dagger = \gamma_0$ $\gamma_0 \gamma_0 = -\gamma_0 \gamma_0$ $\gamma_0 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma_0$

$$(*) = \bar{U}_e(k) \gamma^\mu \hat{P}_h^e (C_R^e \hat{P}_+^e + C_L^e \hat{P}_-^e) \hat{P}_h^e U_e(k)$$

$$= C_h^e \bar{U}_e(k) \gamma^\mu U_e(k) \quad \left(\because (\hat{P}_h^e)^2 = 1, \hat{P}_h^e \hat{P}_h^e = 0, \begin{matrix} h=+1 \Leftrightarrow C_R^e \\ h=-1 \Leftrightarrow C_L^e \end{matrix} \right)$$

h=+1 部分も同様。

$$\text{よって } A_Z^{hh} = -i \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta} C_h^e C_h^e \bar{U}_e^h(k) \gamma^\mu U_e^h(k) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 - M_Z^2} \bar{U}_\nu^h(p) \gamma^\nu U_\nu^h(p) \quad \dots (8)$$

$q \ll M_Z$ のエネルギー領域では、近似的に

$$A_Z^{hh} \sim i \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta M_Z^2} C_h^e C_h^e \bar{U}_e^h(k) \gamma^\mu U_e^h(k) \bar{U}_\nu^h(p) \gamma_\mu U_\nu^h(p) \quad \dots (9)$$

()

 $\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8 M_W^2}$
 $= \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta M_Z^2} \quad (M_W = M_Z \cos \theta)$

よって、断面積は electromagnetic neutral の factor だけ異なる。

$$d\sigma_{hh} \sim \left| \frac{g_e g_e e^2}{q^2} - \sqrt{2} G C_h^e C_h^e \right|^2 \left| \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p-k') \left| \bar{U}_e^h(k) \gamma^\mu U_e^h(k) \bar{U}_\nu^h(p) \gamma_\mu U_\nu^h(p) \right|^2 \right. \quad \dots (10)$$

(10) の行列要素の二乗部分を評価するために、カイラ射影演算子を用いて、正しいスピンの状態を
取り出した状態全体のスピン状態に渡りかきをする。

$$M_{hh} \equiv \left| \bar{U}_e^h(k) \gamma^\mu U_e^h(k) \bar{U}_\nu^h(p) \gamma_\mu U_\nu^h(p) \right|^2$$

$$= \sum_{s, s', s''} \left| \bar{U}(k, s) \gamma^\mu \hat{P}_h^e U(k, s) \bar{U}(p, s') \gamma_\mu \hat{P}_h^e U(p, s') \right|^2$$

$$= \text{Tr} [(\not{k} + m_e) \gamma^\mu \hat{P}_h^e (\not{k} + m_e) \gamma^\nu \hat{P}_h^e] \cdot \text{Tr} [(\not{p} + m_\nu) \gamma_\mu \hat{P}_h^e (\not{p} + m_\nu) \gamma_\nu \hat{P}_h^e]$$

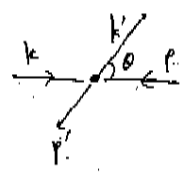
$$= \text{Tr} [\not{k} \gamma^\mu \hat{P}_h^e \not{k} \gamma^\nu \hat{P}_h^e] \text{Tr} [\not{p} \gamma_\mu \hat{P}_h^e \not{p} \gamma_\nu \hat{P}_h^e] \quad \dots (11)$$

$$= 8 \left\{ (k \cdot p)(k' \cdot p')(1 + hH) + (k \cdot p')(k \cdot p)(1 - hH) \right\} \quad \dots (12)$$

$h=H=\pm 1$ のとき $h=-H=\pm 1$ のときも異なる結果が得られる。

重心系で計算すると、 $k=(E, k), p=(E, -k), k'=(E, k'), p'=(E, -k')$ とする。(massless)

$k \cdot p = k' \cdot p' = 2E^2, k \cdot p' = k' \cdot p = E^2(1 + \cos\theta)$ (θ : 散乱角)



よって異なるプロセスの断面積の定性的相違は次のようになる。

$$\frac{d\sigma_{RR}}{d(\cos\theta)} \sim \left| \frac{g_0 g_2 e^2}{q^2} - \sqrt{2} G C_L^2 C_R^2 \right|^2 \quad \dots (13)$$

$$\frac{d\sigma_{LL}}{d(\cos\theta)} \sim \left| \frac{g_0 g_2 e^2}{q^2} - \sqrt{2} G C_L^2 C_L^2 \right|^2 \quad \dots (14)$$

$$\frac{d\sigma_{RL}}{d(\cos\theta)} \sim \left| \frac{g_0 g_2 e^2}{q^2} - \sqrt{2} G C_L^2 C_R^2 \right|^2 \frac{1}{4} (1 + \cos\theta)^2 \quad \dots (15)$$

$$\frac{d\sigma_{LR}}{d(\cos\theta)} \sim \left| \frac{g_0 g_2 e^2}{q^2} - \sqrt{2} G C_R^2 C_L^2 \right|^2 \frac{1}{4} (1 + \cos\theta)^2 \quad \dots (16)$$

$\eta \equiv \frac{p_n \cdot q}{p_n \cdot k}$ という変数を導入する。 p_n は核子の4元運動量。

(p - t) モデルでは、(p - t) の4元運動量 p を $p = \alpha p_n$ とする。($\alpha = Bjorken$ の x)

標準の対称性では $\eta = \frac{p_n \cdot (k - k')}{p_n \cdot k} = \frac{E - E'}{E} \quad \dots (17)$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_n = (m_n, 0) \\ k = (E, k) \\ k' = (E', k') \end{array} \right.$$

重心系では $1 - \eta = \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} = \frac{1}{2} (1 + \cos\theta) \quad \dots (18)$

レプトン-クォーク散乱の結果をレプトン-核子散乱に用いる。

仮定 \int sea-quark 無視
 標的は isoscalar $\rightarrow u$ と d が同数。

クォークの $FL-LL$ $\rightarrow u, d \rightarrow u, d$ 成分 $\rightarrow \Sigma, \Delta$ と。

$$\begin{aligned} \sigma_{RR} &= \left| \frac{Q_u Q_u e^2}{g^2} - \sqrt{2} G C_R^u C_R^u \right|^2 + \left| \frac{Q_u Q_d e^2}{g^2} - \sqrt{2} G C_R^d C_R^d \right|^2 \\ &= \frac{Q_u^2 e^4}{g^4} (Q_u^2 + Q_d^2) - \frac{2\sqrt{2} G e^2}{g^2} Q_u C_R^u (Q_u C_R^u + Q_d C_R^d) \quad \dots (19) \end{aligned}$$

② G^2 の項は \pm 号が u と d である。
 $M_1 \ll g \ll M_2 \Rightarrow g = \text{約 } 100 \text{ MeV} \sim 10^4 \text{ GeV} < g \text{ 未知定数}$
 $\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $0.5 \text{ MeV} \qquad 100 \text{ GeV} \qquad \frac{1}{g^2} \sim 100 \text{ GeV}^{-2}, G \sim 10^{-9} \text{ GeV}^{-2}$

$$= \frac{5e^4}{9g^4} + \frac{2\sqrt{2} G e^2}{3g^2} C_R^e (2C_R^u - C_R^d) \quad \left(\begin{array}{l} Q_e = -1 \\ Q_u = \frac{2}{3} \\ Q_d = -\frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$\sigma_{RL}, \sigma_{LR}, \sigma_{LL}$ も同様に求めず。

$d\sigma_R = \sigma_{RR} + \sigma_{RL}$, $d\sigma_L = \sigma_{LR} + \sigma_{LL}$ を用いて 非対称度 $\Delta = \frac{d\sigma_R - d\sigma_L}{d\sigma_R + d\sigma_L}$ を計算する。

$$\begin{aligned} \Delta &\sim -g^2 \frac{6\sqrt{2} G}{5e^2} \left(C_1 + C_2 \frac{1-(\tau\eta)^2}{1+(\tau\eta)^2} \right) \quad \dots (20) \\ &= \left(\frac{1}{2 \sin \theta \cos \theta} \right)^2 \frac{g^2}{M_2^2} \cdot \frac{g}{10} \left[\left(1 - \frac{20 \sin^2 \theta}{9} \right) + (1 - 4 \sin^2 \theta) \frac{1-(\tau\eta)^2}{1+(\tau\eta)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad C_1 \equiv C_A^e (2C_V^u - C_A^d), \quad C_2 \equiv C_V^e (2C_A^u - C_A^d) \\ C_V^e = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta, \quad C_A^e = -\frac{1}{2} \\ C_V^u = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta, \quad C_A^u = \frac{1}{2} \\ C_V^d = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta, \quad C_A^d = -\frac{1}{2} \\ e = g \sin \theta \\ M_W = M_2 \cos \theta \\ \frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_2^2} \end{array} \right)$$

実験結果 = Fig. 6.21

ワインバーン角 $\sin^2 \theta = 0.2259 \pm 0.0046$ を用いた理論値とよく一致を示す。

この $\sin^2 \theta$ は他の実験結果とも矛盾しない。

6.10 Parity Violation in Atoms

5

原子核と軌道電子がポロノンの交換を相互作用(2 7-10)ポテンシャルを修正する。

まず相互作用項が与えられる。(6.55式)

$$\frac{g}{2 \cos \theta} \left[\sum_{\mathbf{k}} \bar{\psi}_k \gamma^{\mu} (T_3 - 2 Q \sin^2 \theta - T_3 \gamma_5) \psi_k \right] Z_{\mu}$$

$$j_{\mu}^e(x) = - \bar{\psi}_e \gamma^{\mu} \left(\frac{1 - 4 \sin^2 \theta - \gamma_5}{C_V^e} \right) \psi_e$$

$$j_{\mu}^u(x) = \bar{\psi}_u \gamma^{\mu} \left(\frac{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta - \gamma_5}{C_V^u} \right) \psi_u$$

$$j_{\mu}^d(x) = - \bar{\psi}_d \gamma^{\mu} \left(\frac{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta - \gamma_5}{C_V^d} \right) \psi_d$$

低エネルギー ($k^2 \ll M_Z^2$) ではポロノンの 7-10 式は定数となり、左記型相互作用となる。

$$H_{pe}^{eff} = \frac{G}{2\sqrt{2}} j_{\mu}^e(x) (j_{\mu}^{u\mu} + j_{\mu}^{d\mu}) \quad \dots (4)$$

原子核の 1 階近似 7-7 の式を考慮して、

$$j_{\mu}^p(x) = 2 j_{\mu}^u + j_{\mu}^d$$

$$= \bar{\psi}_p \gamma_{\mu} (C_V^p - \gamma_5) \psi_p \quad (C_V^p = 1 - 4 \sin^2 \theta)$$

$$j_{\mu}^n(x) = j_{\mu}^u + 2 j_{\mu}^d$$

$$= - \bar{\psi}_n \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) \psi_n$$

原子核と電子の相互作用項は、(4) と同様の形をとり、

$$H_{ne}^{eff} = \frac{G}{2\sqrt{2}} j_{\mu}^e(x) \left(\sum_{i=1}^Z j_{\mu}^{p\mu}(x) + \sum_{i=1}^N j_{\mu}^{n\mu}(x) \right) \quad \dots (6)$$

Z: 陽子の個数
N: 中性子の個数

核子の波動関数を非相対論的に考え、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}_p \gamma_0 \gamma_5 \psi_p &\rightarrow \phi_p^{\dagger} \sigma_3 \phi_p \\ \bar{\psi}_p \gamma^0 \gamma_5 \psi_p &\rightarrow 0 \\ \bar{\psi}_p \gamma_i \psi_p &\rightarrow 0 \\ \bar{\psi}_p \gamma^0 \psi_p &\rightarrow \phi_p^{\dagger} \phi_p = \rho_p(x) \end{aligned} \right\} (7)$$

中性子部分も同様。

$$\text{よって } \sum_{i=1}^Z j_{\mu}^{p\mu}(x) = \begin{cases} Z C_V^p \rho_p(x) & (\mu=0) \quad \dots \textcircled{1} \\ - \sum_{i=1}^3 \phi_p^{\dagger} \sigma_i \phi_p & (\mu=k) \quad \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

陽子や中性子のスピンが揃ってないから、②は①よりも奇数だけ違うので無視する。

$$\begin{aligned} \text{よって } \frac{G}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{\mu} j_{\mu}^{-n_i}(x) + \sum_{\mu} j_{\mu}^{n_i}(x) \right) &\approx \delta_{\mu 0} \left(C_V^e \rho_p(x) - N \rho_n(x) \right) \cdot \frac{G}{2\sqrt{2}} \\ &\equiv \delta_{\mu 0} \rho(x) \quad \dots (8) \end{aligned}$$

(b) 上の $H_{Nc}^{\text{eff}} = \gamma_e^{\dagger} (C_V^e \rho(x) - \gamma_5 \rho(x)) \gamma_e$

よって、 γ -D 操作による V_C は次のように修正される。

$$V_C \mapsto V_C + C_V^e \rho(x) - \gamma_5 \rho(x) \quad \dots (10)$$

$C_V^e \rho(x)$ は $(\gamma_5 \gamma_0)$ を破るから、 α_2 位が (γ_5) を含む状態を測定する。

$\gamma_5 \rho(x)$ は $(\gamma_5 \gamma_0)$ を破るから、測定する結果を引き起す。

結局、原子物理の弱い相互作用の効果は γ -D 操作による V_C を

$$V_C \mapsto V_C - \gamma_5 \rho(x) \quad \dots (11)$$

と置き換えることができる。

ボソンによる (1D) の下での未帰電子が満たす Dirac eq. は

$$E \psi = H \psi = (\alpha \cdot p + \beta m + V_C(r) - \gamma_5 \rho(r)) \psi(r, \omega) \quad \dots (12) \quad \omega = (0, \omega)$$

全角運動量 $J = L + S = r \times p + \frac{1}{2} \Sigma \quad \dots (13)$

$J^2 \approx K^2 = (J + \frac{1}{2})^2$ を基底として、(12) の解として

$$\Psi(r, \omega) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} i g_{\mu}(r) \chi_{\mu}^{\mu}(\omega) - g_{-\mu}(r) \chi_{\mu}^{-\mu}(\omega) \\ f_{\mu}(r) \chi_{\mu}^{\mu}(\omega) - i f_{-\mu}(r) \chi_{\mu}^{-\mu}(\omega) \end{pmatrix} \quad \dots (15)$$

の形が得られる。(Greiner, Relativistic Quantum Mechanics)

$\chi_{\mu}^{\mu}(\omega)$ = spinor spherical harmonic ($\mu = J_3$)

g, f は (16), (19) を満たす。

つまり、 $TL(9994)$ の $7P_{3/2} \rightarrow 6P_{3/2}$ の遷移を考えると、 $6P_{3/2}$ と $6S_{3/2}$ がほとんど連続になるから、

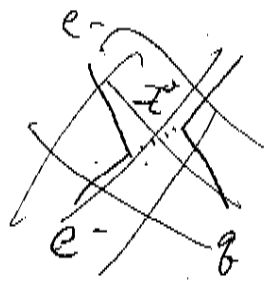
$P = -1$ と $P = +1$ の状態が混ざった状態が生まれる。よって、 $7P_{3/2} \rightarrow 6P_{3/2}$ は純粋な $M = 1$ 遷移ではなく、 $M = 1$ と $E1$ の混合の遷移を考えると、 π 光子の放出 photon の円偏光の偏りが生じる。

P_{\pm} を右か左巻きの photon が放出された確率とし、双粒子散乱の行列要素を

$M(E1, \mu), M(M1, \mu), \mu = \mu_i - \mu_f \pm 1$: photon の helicity. $M(E1, \mu), M(M1, \mu)$ の parity による特性の違いにより、 μ の符号の反転に対する振る舞いが異なる。つまり、

$$M(E1, \mu) = +M(E1, -\mu)$$

$$M(M1, \mu) = -M(M1, -\mu)$$



$M(E1) \equiv M(E1, |m1\rangle)$, $M(M1) \equiv M(M1, |m1\rangle)$ とすると、円偏極度は

$$\begin{aligned}
P_C &= \frac{P_+ - P_-}{P_+ + P_-} \\
&= \frac{|M(E1) + iM(M1)|^2 - |M(E1) - iM(M1)|^2}{|M(E1) + iM(M1)|^2 + |M(E1) - iM(M1)|^2} \\
&= -2 \operatorname{Im} \frac{M(E1)^* M(M1)}{|M(E1)|^2 + |M(M1)|^2}
\end{aligned}$$

明らか、 $P_C \neq 0$ は $E1$ と $M1$ の両方の放射が起るときのみ起る。

通常、 π は $[\pi]$ の選択則も禁止されるが、中性弱カレントの π が起る。

まとめ

1. 中性弱カレントの等しい π の振る舞いを用いる。
2. 今の実験は核子の内部構造のテストになる。

7. Nuclear Beta Decay

7.1 The MIT bag model

今まではクォークレベルでの弱い相互作用の理論を展開してきた。
 2体や3体はハドロン自身の弱い相互作用を今までの知識を用いて議論した。
 クォークがハドロンを構成しているのは重要な問題である。
 この問題は完全には解かれてはいないが、ハドロンの性質をよく再現するモデルはいくつかある。
 ここではその一つ、MIT bag model を考える。
 このモデルを用いて、核子に対しては $\frac{g_A}{g_V}$ を計算する。MIT bag model では、クォークは半径 R の球の中で自由に動いていると考える。(Fig. 7.1) この球の表面がいくつかの境界条件を課す。
 核子はバリオンの基底状態の1つであり、クォークは節がない波動関数を持つべきである。

Bag model?

Dirac eq. の最も一般的解は

$$\Psi = N \begin{pmatrix} \Psi' \\ \frac{m}{E+m} \Psi' \end{pmatrix} \quad \text{with } \Psi' = \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix} \quad \dots (2.1)$$

仮定

- 自由クォーク
- ハドロンは球状核
- $\gamma_5 - \gamma_n$ など

今の状況では

$$\Psi_{\pm}(r) = N \begin{pmatrix} j_0(kr) \chi_{\pm} \\ \frac{ik}{E+m} j_1(kr) \chi_{\pm} \end{pmatrix} \quad \dots (2.2)$$

$$\sigma_r = \frac{r - \mathbf{1}r}{r}, \quad \sigma_r^2 = \frac{(r - \mathbf{1}r)^2}{r^2} = 1, \quad E^2 = k^2 + m^2, \quad \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を代入。(EXERCISE 7.1)

球内での関数は

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \quad \dots (2.3)$$

である。波動関数を球の内側に制限する(クォークの閉じ込め)ために、適切な境界条件が必要。
 表面に垂直な粒子流が消える。クォークはハドロンの外側に出る事は無い。

$$\Rightarrow \mathbf{n} \cdot \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi \Big|_S = 0, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{1}r}{r} \quad \dots (2.4)$$

Surface

境界条件(2.4)は bag-equation とよばれる類型方程式により保証される。

$$\text{bag-equation: } \mathbf{n} \cdot \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi \Big|_S = i \bar{\Psi} \Psi \Big|_S \quad \dots (2.5)$$

(2.5)に(2.2)を代入 (表現は Dirac 表現)

$$\Rightarrow j_0(kR) = \frac{k}{E+m} j_1(kR) \quad \dots (2.10)$$

ハドロン粒子の bag model では、u と d クォークは非常に小さい静止質量をもち、小さい体積的に閉じ込められる事により
 大まな運動エネルギーをもち、 $m \ll \frac{1}{R}$ の極限で (2.10) は

$$j_0(kR) = j_1(kR) \quad \dots (2.11)$$

(2.11) = (2.3) を代入して

$$\tan(kR) = \frac{kR}{1-kR} \quad \dots (2.12)$$

Bag constant 212?

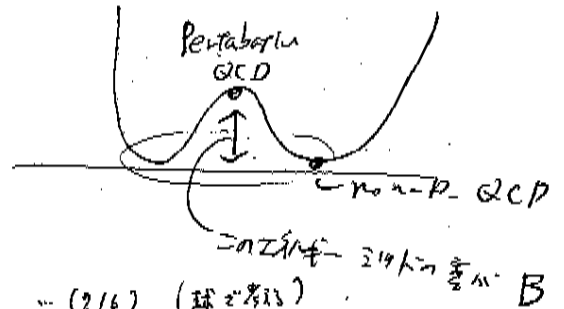
(2.12) の解のうち最も小さいものは

$$k = \frac{\chi_0}{R} \quad (\chi_0 \approx 2.04) \quad \dots (2.13)$$

(1) D の半径は 内圧と外圧が等しいという条件により決定された。

↓
表面の微小変化にエネルギーが必要ない。

$$\left. \frac{d}{dt} E_{tot}(t) \right|_{t=R} = \left. \frac{d}{dt} (E_{vac} + \int E(Q)) \right|_{t=R} = 0 \quad \dots (2.16) \quad (\text{球が静止})$$



熱力学関係式 = $E_{vac}(t) = -P_{vac} V \quad \dots (2.14)$

$$= BV \quad \dots (2.15) \quad (\because P_{vac} = -B, B = \text{bag constant})$$

$$E(Q) = \sqrt{k^2 + m^2} = k = \frac{\chi_0}{t} \quad ; \quad \text{滑らかな } \gamma \text{ のエネルギー一周角} \quad \dots (2.17)$$

よって (2.16) は $\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{4\pi}{3} B t^3 + N_a \frac{\chi_0}{t} \right) \right|_{t=R} = 0 \quad \dots (2.18)$

N_a は (1) D 中の γ の数、反 γ の数、 $N_a = 3$, $N_a = 2$ 。

今、 γ の z 成分以外の相互作用は考えなかった。しかし、 γ の z 成分の質量 m が z 成分と異なる。

$$E_{int} = -\frac{z_0}{t} \quad \dots (2.19)$$

の存在を考慮が必要がある。 z_0 は $1.5 \sim 2 \text{ GeV}$ の値。(EXERCISE 2.3)

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{4\pi}{3} B t^3 + \frac{N_a \chi_0 - z_0}{t} \right) \right|_{t=R} = 0$$

$$\rightarrow R = \left(\frac{N_a \chi_0 - z_0}{4\pi B} \right)^{1/4} \quad \dots (2.20)$$

とすると、核子に対しては $N_a = 3$ である。

$$B^{1/4} = 145 \text{ MeV} = (1.36 \text{ fm})^{-1} \quad \dots (2.21)$$

の bag constant を用いて、核子の半径

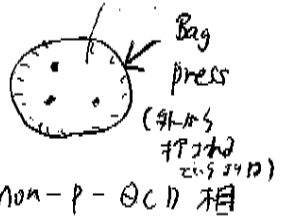
$$R_N \sim 0.78 B^{1/4} \approx 1.05 \text{ fm} \quad \dots (2.22)$$

を得た。この値を用いて $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ を計算すると

$$\langle r^2 \rangle^{1/2} \sim 0.73 R_N \sim 0.75 \text{ fm} \quad \dots (2.23)$$

この値は電子-陽子散乱実験の結果とよく一致を見せた。

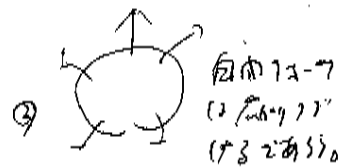
p-QCD 相



↓
真空の γ の z 成分が 0 である。



② の z 成分が 0 である。



① ② の両方から、
1) D の z 成分が 0 である。
と仮定する。

12-9 問

相互作用

を z 成分に z 成分を考慮する



Bag は QCD の z 成分を

simple に z 成分を z 成分

model を取り、近似的に

振動する z 成分を z 成分

⊙ EXERCISE 7.1 The ground state in the MIT Bag.

問. (7.2) は (7.1) の解であることを示す。

解. $\psi'(x) = \psi'(t) = j_0(kr) \chi_{\pm}$... (1)

かつ (7.2) の下成分が解となることを示す。

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot p) \psi'(r) &= -i(\sigma \cdot \nabla) j_0(kr) \chi_{\pm} \\ &= -i\sigma_r k \frac{dr}{r} j_0(kr) \chi_{\pm} \\ &= i\sigma_r k j_1(kr) \chi_{\pm} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

$j_0'(x) = -j_1(x)$

∴ $\frac{\sigma \cdot p}{E+m} \psi'(r) = \frac{ik}{E+m} j_1(kr) \sigma_r \chi_{\pm}$

⊙ EXERCISE 7.2 The Mean Square Radius of a Nucleon

問. 核子の $\langle r^2 \rangle^{\chi}$ を計算せよ。

解. 規格化定数 N を計算せよ。

$1 = \int d^3x \psi^\dagger \psi \quad \dots (4)$

$1 = \frac{4\pi N^2}{k^3} \left(\chi_0 - \frac{\sin^2 \chi_0}{\chi_0} \right) \quad \dots (4) \quad \leftarrow \text{= 4.14 の } N \text{ の決定式}$

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= \int d^3x r^2 \psi^\dagger \psi \\ &= \frac{4\pi N^2}{k^3} \left(\frac{\chi_0^3}{3} - \chi_0 \sin \chi_0 \cos \chi_0 \right) \quad \dots (6) \end{aligned}$$

(4) より $\langle r^2 \rangle = R^2 \frac{\frac{1}{3} \chi_0^3 - \cos \chi_0 \sin \chi_0}{\chi_0^2 - \sin^2 \chi_0} \quad \dots (7)$

$\chi_0 \sim 2.04$ を代入すると。

$\langle r^2 \rangle^{\chi} = 0.73 R^2 \quad \dots (8)$

⊙ EXERCISE 7.3 Parameter Fit to the Hadronic Mass Spectrum

問. non-strange 1FD の質量を説明 (せよ) する MIT bag model の定数 B, z_0 を決定せよ。

$M_N = 939 \text{ MeV (spin } 1/2)$

$M_{\Delta} = 1232 \text{ MeV (spin } 3/2)$

$M_{\eta} = 549 \text{ MeV (spin } 0)$

$M_{\omega} = 783 \text{ MeV (spin } 1) \quad \text{を用いる。}$

Bag モデルは、核子には

クォークを記述するもの

を用いる。

例えは、 π -meson は 介子

である。

解 (7.18), (7.19) に z_0 (FD) の質量は

$M = \frac{4\pi}{3} B R^3 + \frac{z_0 N_q - z_0}{R} \quad \dots (1)$

R と (2) (7.20) $\Leftrightarrow R = \left(\frac{z_0 N_q - z_0}{4\pi B} \right)^{1/4}$ を代入すると。

$$M = \frac{4}{3} (z_0 N_0 - z_0)^{3/4} (4\pi B)^{1/4} \quad \dots (2)$$

±2, 核子とΔの例により、質量は明らかに7+7のスピントも依存している。
 反平行スピンは質量を下げる、平行スピンは質量を上げる効果があると言える。
 γとωXY間の間の質量差は同じ事が言える。

MIT bag modelの簡単な状況で得られた縮退した状態は spin-spin 相互作用で縮退が解けるのである。バリオンの平均質量は

$$M_B = \frac{1}{2} (M_N + M_\Delta) = 1085.5 \text{ MeV} \quad \dots (3)$$

同様にXYの平均質量は

$$M_M = \frac{1}{2} (M_\eta + M_\omega) = 666 \text{ MeV} \quad \dots (4)$$

よって(2)を用いて

$$\frac{M_M}{M_B} = \left(\frac{2z_0 - z_0}{3z_0 - z_0} \right)^{3/4} = 0.614 \quad \dots (5)$$

$$\Rightarrow z_0 \sim 1.86 \quad (\because z_0 \sim 2.04) \quad \dots (6)$$

また、 $M_B = 1085.5 \text{ MeV} = \frac{4}{3} (3z_0 - z_0)^{3/4} (4\pi B)^{1/4}$ より、

$$B^{1/4} = [4\pi(3z_0 - z_0)]^{-3/4} \cdot \frac{3}{4} M_B \sim 145 \text{ MeV} \quad \dots (7)$$

7.2 Beta Decay of the Neutron

中性子の崩壊を $7+ \rightarrow 6+ + 1+ + 0+$ と記す。

最も重要な目的は比 $\frac{C_A}{C_V}$ の説明をすることである。微視的には、neutronの崩壊では、1つのd7+7が電子と反ニュートリノを放出してu7+7になる。荷電7+7成分(6.42)の、d7+7がu7+7に変化するのに関係がある部分は

$$J_\mu^{(+)}(d \rightarrow u) = \cos\theta_c [\bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) d] \quad \dots (7.24)$$

我々は2つの3粒子波動関数の間の遷移を考えなければならぬ。
 $s^2 \times \frac{1}{2}$, $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \times \frac{1}{2}$ であるように確認された。

中性子のスピン↑のスピンスピン波動関数は

$$\begin{aligned} |N \uparrow\rangle = & -\frac{1}{\sqrt{12}} [|u(1)d(2)d(3)\rangle + |d(1)u(2)d(3)\rangle - 2 |d(1)d(2)u(3)\rangle] \\ & \times [|T(1)\downarrow(2)\uparrow(3)\rangle + |\downarrow(1)\uparrow(2)\uparrow(3)\rangle - 2 |\uparrow(1)\uparrow(2)\downarrow(3)\rangle] \\ & + \frac{1}{\sqrt{12}} [|u(1)d(2)d(3)\rangle - |d(1)u(2)d(3)\rangle] \times [|\uparrow(1)\downarrow(2)\uparrow(3)\rangle - |\downarrow(1)\uparrow(2)\uparrow(3)\rangle] \quad \dots (7.25) \end{aligned}$$

ここで、()内の数字1, 2, 3は3つの7+7の番号を表す。この数字は順序で判別可能な2

(7.25)を簡単に

$$|n\uparrow\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|udd+dud-2ddu\rangle|\uparrow\uparrow\uparrow+\uparrow\uparrow\uparrow-2\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|udd-dud\rangle|\uparrow\uparrow\uparrow-\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \dots (2.26)$$

同様にして、

$$|p\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|udu+dud-2udd\rangle|\uparrow\uparrow\uparrow+\uparrow\uparrow\uparrow-2\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|udu-dud\rangle|\uparrow\uparrow\uparrow-\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \dots (2.27)$$

これらの中の基底は Dirac spinor (2.2) の基底に対応する。

$$|\uparrow\rangle = \chi_+(t), \quad |\downarrow\rangle = \chi_-(t) \dots (2.28)$$

もし factor $\cos\theta_c$ を無視すると (2.24) は 1 の d から u に対応する遷移演算子は

$$\gamma^0(1-\gamma_5)\hat{T}_+ \dots (2.29)$$

と与えられる。 $\hat{T}_+ = \mathcal{P}(\gamma_2 e^{i\theta})$ 昇降演算子 ($d \rightarrow u$)

核子に 3 つの q の成分を含むので全体の遷移演算子は

$$\sum_{i=1}^3 \gamma^0(1-\gamma_5^{(i)})\hat{T}_+^{(i)} \dots (2.30)$$

まず (2.30) の γ_5 成分を check する。 χ_{\pm} の (2.2) の基底は $\xi = \pm 1$ と表すことができる。

$$\bar{\chi}_\xi = \begin{pmatrix} f(t)\chi_\xi \\ ig(t)\sigma_1\chi_\xi \end{pmatrix}, \quad f(t) = N j_0(kr), \quad g(t) = \frac{Nk}{E+mv} j_1(kr) \dots (2.31)(2.32)$$

$$(i) \bar{\chi}_\xi \gamma^0 \chi_\xi = f(t)^2 + g(t)^2 \dots (2.33)$$

$$(ii) \bar{\chi}_\xi \gamma_3 \chi_\xi = \bar{\chi}_\xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \chi_\xi$$

もし $\xi = \pm 1$ の基底が変化しないように σ_3 の基底を定む。

$$\text{よって } \bar{\chi}_\xi \gamma_3 \chi_\xi = 0 \dots (2.34)$$

$$(iii) \bar{\chi}_\xi \gamma^i \chi_\xi = 0 \dots (2.35)$$

$$(iv) \bar{\chi}_\xi \gamma_1 \gamma_2 \chi_\xi = \bar{\chi}_\xi \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \chi_\xi$$

$$= \bar{\chi}_\xi \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \chi_\xi \quad (i=3 \text{ の基底を定む})$$

$$= \xi f(t)^2 + g(t)^2 \chi_\xi^\dagger \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \chi_\xi \dots (2.37)$$

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \frac{1}{i^2} (z^2 - x^2 - y^2) \sigma_3 + \frac{2xy}{i^2} (\sigma_1 + \sigma_2) \dots (2.38)$$

$$\text{よって } \int d\Omega (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1) = -2\pi \chi \frac{2}{3} \sigma_3 \dots (2.40)$$

$$\int d\Omega = 4\pi$$

$$\text{よって (2.37) の角度積分は } \int d\Omega \bar{\chi}_\xi \gamma_1 \gamma_2 \chi_\xi = 4\pi \xi \left(f^2 - \frac{1}{3} g^2 \right) \dots (2.41)$$

ベクトル部分と軸性ベクトルの振幅の寄与の比を考えた。

$$S \equiv \frac{\int d^3x \bar{\chi}_\xi \gamma^3 \chi_\xi}{\int d^3x \bar{\chi}_\xi \gamma^0 \chi_\xi} = \xi \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\int_0^R dr r^2 g^2}{\int_0^R dr r^2 (f^2 + g^2)} \right] \dots (2.42)$$

$(\sigma_1, \sigma_2) \leftrightarrow (\sigma_+, \sigma_-)$

σ_3 ... diagonal

(spin flip しない)

非相対論的 $\pi\pi$ 対は $g \sim 0$ の $S = \epsilon = \pm 1$.

しかし MIT bag model の高エネルギー $\pi\pi$ 対 (2.42) のようにする。

$f(\pi)$ と $g(\pi)$ の具体的な形 (2.32) を代入し $k_0 \approx \pi$ の場合を直し、

高エネルギー $\pi\pi$ 対 $\Rightarrow \frac{f}{\epsilon m} \sim 1$ と仮定する。

$$|S| = \frac{\chi_0}{3(\chi_0 - 1)} \dots (2.46)$$

$$\chi_0 = 2.04 \text{ を代入して } |S| \sim 0.655 \dots (2.47)$$

(2.31), (2.41), (2.47) より、 $\pi\pi$ 結合部分は

$$\langle p\pi | \sum_{i=1}^3 T_i^{(0)} | n\pi \rangle \dots (2.48)$$

軸性 $\pi\pi$ 結合部分は

$$- \delta \langle p\pi | \sum_{i=1}^3 \sigma_3^{(i)} T_i^{(0)} | n\pi \rangle \dots (2.49)$$

となる。まず、(2.48) より、isospin-昇降算子 $\hat{T}_+^{(i)}$ は i番目の $\pi\pi$ に作用する。

$$\hat{T}_+(i) | d(i) \rangle = | u(i) \rangle, \quad \hat{T}_+(i) | u(i) \rangle = 0 \dots (2.50)$$

$$\text{よって } \sum_{i=1}^3 \hat{T}_+(i) | n\pi \rangle = | p\pi \rangle \Rightarrow (2.48) \text{ は } \langle p\pi | \sum_{i=1}^3 T_i^{(0)} | n\pi \rangle = 1 \dots (2.51)$$

$$\text{また } \sigma_3(i) | u(i) \rangle = | u(i) \rangle, \quad \sigma_3(i) | d(i) \rangle = - | d(i) \rangle \dots (2.52)$$

を用いる。

$$\langle p\pi | \sum_{i=1}^3 \sigma_3^{(i)} T_i^{(0)} | n\pi \rangle = \frac{5}{3} \dots (2.60)$$

よって、 $\pi\pi$ 結合と軸性 $\pi\pi$ 結合の比は、(2.42) より

$$\begin{aligned} \frac{C_A}{C_V} &= -\delta \cdot \frac{\langle p\pi | \sum_{i=1}^3 \sigma_3^{(i)} T_i^{(0)} | n\pi \rangle}{\langle p\pi | \sum_{i=1}^3 T_i^{(0)} | n\pi \rangle} \\ &= -\frac{5}{3} \delta \\ &\sim -1.09 \dots (2.62) \quad (\delta = 0.655) \end{aligned}$$

$$\text{実験値は } \left(\frac{C_A}{C_V}\right)_{\text{exp}} = -1.255 \pm 0.006$$

これは非相対論的 $\pi\pi$ 対を考えたときのもよ結果である。

非相対論極限 ($m \gg \epsilon$) では Dirac spinor の下成分が小さく $g(\pi) \ll f(\pi)$

$$S \sim 1, \quad \left(\frac{C_A}{C_V}\right)_{NR} \sim -\frac{5}{3} = -1.67 \text{ となる。}$$

非相対論極限の $\pi\pi$ 対の描像は正しくなく、相対論的極限の $\pi\pi$ 対も (5% の誤差) 正しい。

これは MIT bag model の sharp 表面ではなく、なだらかに減衰する表面のモデルを選べば

少し解決する。

今日、非相対論的 Dirac spinor の下成分が小さく $g(\pi) \ll f(\pi)$ となる。