

# 8章 The Neutral Kaon System

2011年 12月 8日  
前田 担当

この章では、K粒子、特に $K^0$ と $\bar{K}^0$ の性質について論じる。

## 8.1 The Particles $K_S$ and $K_L$

$$K \text{ 粒子: } \begin{cases} K^+ = (\bar{s}u) & , K^0 = (\bar{s}d) \\ K^- = (\bar{u}s) & , \bar{K}^0 = (s\bar{d}) \end{cases} \quad (8.1)$$

$K^0$ と $\bar{K}^0$ は、電荷は等しく0だが、その他の量子数の符号が異なるので、粒子-反粒子の関係。

$$\begin{cases} K^0: T = 1/2, T_3 = -1/2, S = +1 \\ \bar{K}^0: T = 1/2, T_3 = +1/2, S = -1 \end{cases} \quad (8.2)$$

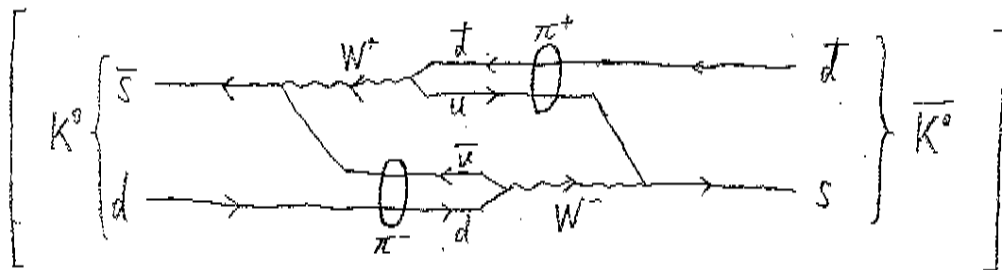
これは、中性子と反中性子の関係と似ている。

$$\begin{cases} n(d\bar{d}u): T = 1/2, T_3 = -1/2, B = +1 \\ \bar{n}(\bar{u}\bar{d}\bar{u}): T = 1/2, T_3 = +1/2, B = -1 \end{cases} \quad (8.3)$$

だが、 $n \leftrightarrow \bar{n}$  に対し、(バリオン数の保存)

$K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$  は許される。(弱い相互作用はいくつかの保存則を破る)

すなわち、 $\pi$ 粒子の中間状態を経てお互いに変化することが可能。



ここから、 $\hat{C}\hat{P}$  という演算子と遷移振幅について考えていく。

$\hat{C}$ は荷電共役、 $\hat{P}$ は空間反転をあらわす演算子。

(CPT定理より、CP変換の対称性はT変換の対称性に一致する。

しぼろくは、CP変換(もしくはT変換)における対称性を仮定する。

(次の節では、CP対称性の破れについて論じる。)

遷移振幅について、 $K$ 中間子や $\pi$ 中間子の内部パリティが $-1$ であることなどを  
用いて計算すると、

$$\langle \pi^+ \pi^- | \hat{S} | K^0 \rangle = - \langle \pi^+ \pi^- | \hat{C} \hat{P} \hat{S} (\hat{C} \hat{P})^{-1} | K^0 \rangle$$

となる。

ここで、 $T$ 変換において対称であることより、

$$\hat{C} \hat{P} \hat{S} (\hat{C} \hat{P})^{-1} = \hat{S}$$

なので、

$$\langle \pi^+ \pi^- | \hat{S} | K^0 \rangle = - \langle \pi^+ \pi^- | \hat{S} | K^0 \rangle \quad (8.4)$$

が得られる。これより、

$$\langle K^0 | \hat{S} | K^0 \rangle \approx \sum_{\pi^+ \pi^-} \langle K^0 | \hat{S} | \pi^+ \pi^- \rangle \langle \pi^+ \pi^- | \hat{S} | K^0 \rangle$$

$$\approx \langle K^0 | \hat{S} | K^0 \rangle \quad (8.5)$$

となることがわかる。

すなわち、 $CP$ 対称性のもとでは、 $K^0 \rightarrow K^0$ と $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$ の変化の割合は同じであることが示された。

## ~ EXERCISE ~

### 8.1 CP Parity in Kaon Decay

問.  $K$ 中間子が崩壊してできた $\pi$ 中間子の2粒子系が正の $CP$ パリティをもち、

$$\langle \pi^+ \pi^- | \hat{S} | K^0 \rangle = - \langle \pi^+ \pi^- | \hat{C} \hat{P} \hat{S} (\hat{C} \hat{P})^{-1} | K^0 \rangle \quad (1)$$

となることを示せ。

解.  $K$ 中間子の重心系で考える。そうすると、 $\pi^+$ と $\pi^-$ はそれぞれ正の向きで同じ大きさの運動量をもち、

もっとも一般的に、

$$|\pi^+ \pi^- \rangle = \cos \alpha |\pi^+(E, \mathbf{p}) \pi^-(E, -\mathbf{p}) \rangle + \sin \alpha |\pi^-(E, -\mathbf{p}) \pi^+(E, \mathbf{p}) \rangle \quad (2)$$

と表わす。

これより、

$$\hat{P} |\pi^+ \pi^- \rangle = P_\pi^2 (\cos \alpha |\pi^+(E, -P) \pi^-(E, P) \rangle + \cos \alpha |\pi^-(E, P) \pi^+(E, -P) \rangle) \quad (3)$$

ここで  $P_\pi = -1$  はパイ中間子の内部パリティ

より、

$$\begin{aligned} \hat{C} \hat{P} |\pi^+ \pi^- \rangle &= (\cos \alpha |\pi^-(E, -P) \pi^+(E, P) \rangle + \cos \alpha |\pi^+(E, P) \pi^-(E, -P) \rangle) \\ &= + |\pi^+ \pi^- \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

すなわち、2パイ中間子系の  $CP$  パリティは常に正であることがわかる。

一方、

$$\hat{C} \hat{P} |K^0 \rangle = - |K^0 \rangle \quad (5)$$

であるので、これらより直ちに題意が示される。

□

次に、 $K^0$  の時間発展について考える。

初期状態を  $|\psi(0) \rangle$  とし、

$$|\psi(t) \rangle = U(t, 0) |\psi(0) \rangle, \quad U(t, 0) = \exp(-i\hat{H}t) \quad (8.6)$$

とかける。ここで、ハミルトニアン  $\hat{H}$  を

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_w \quad (8.7)$$

と分けて書く。  $\hat{H}_0$  の部分は強い相互作用や電磁気力を含み、 $|K^0 \rangle, |\bar{K}^0 \rangle$  を固有状態として持つ。

一方、 $\hat{H}_w$  は弱い相互作用の項で、 $K_0 \leftrightarrow \bar{K}_0$  など記号対称項を含む。

相互作用表示を用いると、

$$\hat{H}_w(t) = \exp(-i\hat{H}_0 t) \hat{H}_w \exp(i\hat{H}_0 t) \quad (8.8)$$

$$U(t, 0) = 1 - i \int_0^t \hat{H}_w(t') dt' - \int_0^t dt' \hat{H}_w(t') \int_0^{t'} dt'' \hat{H}_w(t'') \dots \quad (8.9)$$

と展開させる。

$|\psi(t)\rangle$  を  $|K^0\rangle$  と  $|\bar{K}^0\rangle$  の組であらわし、

摂動論より、

$$\hat{H}_w^{\text{eff}} = \hat{H}_w + \sum_n \frac{\hat{H}_w |n\rangle \langle n| \hat{H}_w}{m_K - E_n + i\epsilon} + \dots$$

変換  $U(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = 0$$

は  $P \int x dx = 0$   
 の  $i\epsilon$  の差が 2 倍

$$= \hat{H}_w + \sum_n \hat{H}_w |n\rangle \langle n| \hat{H}_w \left( P \frac{1}{m_K - E_n + i\epsilon} - i\pi \delta(m_K - E_n) \right) + \dots \quad (8.10)$$

とす。そうすると、 $K-\bar{K}^0$  空間での  $\hat{H}_w^{\text{eff}}$  は、

$$\begin{pmatrix} \langle K^0 | \hat{H}_w^{\text{eff}} | K^0 \rangle & \langle K^0 | \hat{H}_w^{\text{eff}} | \bar{K}^0 \rangle \\ \langle \bar{K}^0 | \hat{H}_w^{\text{eff}} | K^0 \rangle & \langle \bar{K}^0 | \hat{H}_w^{\text{eff}} | \bar{K}^0 \rangle \end{pmatrix} \equiv \hat{M} - \frac{i}{2} \hat{\Gamma} \quad (8.11)$$

$$\hat{H}_0 |K^0\rangle = m_K |K^0\rangle, \quad \hat{H}_0 |\bar{K}^0\rangle = m_{\bar{K}} |\bar{K}^0\rangle, \quad M = M^\dagger, \quad \Gamma = \Gamma^\dagger \quad (m_K = m_{\bar{K}}) \quad (8.12)$$

とかける。

ここで、 $|K^0\rangle$  を  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $|\bar{K}^0\rangle$  を  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  であらわすことにすると、

$$|\psi\rangle = c |K^0\rangle + \bar{c} |\bar{K}^0\rangle = \begin{pmatrix} c \\ \bar{c} \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

また、Schrödinger eq. より、

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}_w^{\text{eff}} |\psi(t)\rangle \equiv \left( \hat{M} - \frac{i}{2} \hat{\Gamma} \right) |\psi(t)\rangle \quad (8.14)$$

とかける。

CPT定理より、粒子と反粒子が同じように振るまうとすると、

$$M_{11} = M_{22} \equiv M_0, \quad \Gamma_{11} = \Gamma_{22} \equiv \Gamma_0 \quad (M_0, \Gamma_0 \in \mathbb{R}) \quad (8.15)$$

である。

さらに、T変換の不変性を仮定すると、

$$M_{12} = M_{21} \equiv \tilde{M}, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} \equiv \tilde{\Gamma} \quad (\tilde{M}, \tilde{\Gamma} \in \mathbb{R}) \quad (8.16)$$

である。

$\hat{H}_w^{\text{eff}}$  の対角成分のうち、実数部分の  $M_0$  は質量  $m_K$  に対応し、虚数部分の  $\Gamma_0$  は  $K$  中間子の崩壊をあらわす。

これらを用いて再び Schrödinger eq. をあらわに書くと.

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c \\ \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0 - \frac{i}{2}\Gamma_0 & \tilde{M} - \frac{i}{2}\tilde{\Gamma} \\ \tilde{M} - \frac{i}{2}\tilde{\Gamma} & M_0 - \frac{i}{2}\Gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \bar{c} \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

となる. ここで, 対角化された形で書くと.

$$C_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(c + \bar{c}), \quad C_S = \frac{1}{\sqrt{2}}(c - \bar{c}) \quad (8.18)$$

$$|\psi\rangle = C_L |K_L^0\rangle + C_S |K_S^0\rangle \quad \begin{pmatrix} |K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \\ |K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \end{pmatrix} \quad (8.19, 20)$$

という形に基底を変換すると.

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} C_L \\ C_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M_0 + \tilde{M}) - \frac{i}{2}(\Gamma_0 + \tilde{\Gamma}) & 0 \\ 0 & (M_0 - \tilde{M}) - \frac{i}{2}(\Gamma_0 - \tilde{\Gamma}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_L \\ C_S \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

と書くことができる.

$K_0$  と  $\bar{K}_0$  はどちらも崩壊するので,  $\Gamma_0 + \tilde{\Gamma}$ ,  $\Gamma_0 - \tilde{\Gamma}$  はどちらも正であり, ちなみち

$\Gamma_0 > |\tilde{\Gamma}|$  である.

$C_L(t)$ ,  $C_S(t)$  の振幅を考えると.

$$|C_L(t)|^2 = \exp(-(\Gamma_0 + \tilde{\Gamma})t), \quad |C_S(t)|^2 = \exp(-(\Gamma_0 - \tilde{\Gamma})t)$$

であり, どちらの崩壊が早いかは  $\tilde{\Gamma}$  の符号に依る.

(8.4)式や (8.11)式を用いて,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = \Gamma_{12} &= -2 \text{Im} \langle K^0 | \hat{H}_w^{\text{eff}} | \bar{K}^0 \rangle \\ &\approx -2\pi \sum_n \delta(m_K - E_n) |\langle n | \hat{H}_w | K^0 \rangle|^2 < 0 \end{aligned} \quad (8.22)$$

がわかる. ちなみち,  $\Gamma_0 + \tilde{\Gamma} \equiv \Gamma_L$ ,  $\Gamma_0 - \tilde{\Gamma} \equiv \Gamma_S$  とすると,

$\Gamma_L < \Gamma_S$  であり,  $|K_S^0\rangle$  の寿命は  $|K_L^0\rangle$  よりも短いということである.

一方,  $\Gamma_0$  について, 同様の計算で

$$\Gamma_0 = \Gamma_{11} = -2 \text{Im} \langle K^0 | \hat{H}_w^{\text{eff}} | K^0 \rangle \approx -\tilde{\Gamma} > 0 \quad (8.23)$$

となる.

よって、

$$\Gamma_s = \Gamma_0 - \tilde{\Gamma} \approx 2\Gamma_0 \gg \Gamma_0 + \tilde{\Gamma} = \Gamma_L \quad \text{であり} \quad (8.24)$$

$\tau_{K_s^0} = (\Gamma_0 - \tilde{\Gamma})^{-1} \ll (\Gamma_0 + \tilde{\Gamma})^{-1} = \tau_{K_L^0}$  なので、  
寿命がかなり異なっていることがわかる。

ところで、 $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda$  のように強い相互作用によって  $K^0$  が作られたとき  
固有状態は  $|K^0\rangle$  なので、この時点をと  $t=0$  とすると、

$$|\psi(0)\rangle = |K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_L^0\rangle + |K_S^0\rangle) \quad (C_s(0) = C_L(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad (8.29, 30)$$

とあらわされる。そして、ここからの時間発展を考えると、

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iM_0 t} \left[ e^{i\tilde{M}t - \frac{1}{2}\Gamma_S t} |K_S^0\rangle + e^{-i\tilde{M}t - \frac{1}{2}\Gamma_L t} |K_L^0\rangle \right] \quad (8.31)$$

となる。

また、 $K_S^0$  と  $K_L^0$  の寿命の実験値はそれぞれ

$$\tau_{K_S^0} = 8.92 \times 10^{-11} \text{ s}, \quad \tau_{K_L^0} = 5.81 \times 10^{-8} \text{ s} \quad \text{である。} \quad (8.32)$$

次に、regeneration とよばれる過程について考える。

たとえば、はじめに純粋な  $K_L^0$  が核物質中を通過するとき、核子と強い相互作用をするが、  
 $K_L^0$  中の  $K^0$  成分と  $\bar{K}^0$  成分は異なる反応をするので、

$$\left( \begin{array}{l} K^0 : \left\{ \begin{array}{l} K^0 + \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \rightarrow K^0 + \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \\ K^0 + p \rightarrow K^+ + n \end{array} \right. \\ \bar{K}^0 : \left\{ \begin{array}{l} \bar{K}^0 + \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \rightarrow \bar{K}^0 + \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \\ \bar{K}^0 + n \rightarrow K^- + p \\ \bar{K}^0 + \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda + \begin{pmatrix} \pi^0 \\ \pi^+ \end{pmatrix} \end{array} \right. \end{array} \right) \quad (8.33 \sim 35)$$

通過後は純粋な  $K_L^0$  ではなくなっている。

純粋な  $K_L^0$  を用いた実験がしたい時などは注意が必要である。

また、 $\Lambda$  粒子は  $\bar{K}^0$  からのみ生成されることを利用し、以下の考察により  $\tilde{M}$  を  
求めることができる。

まず、波動関数  $\psi(t)$  における  $\bar{K}^0$  の振幅は、

$$\begin{aligned} \bar{c}(t) &= \langle \bar{K}^0 | \psi(t) \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle K_S^0 | \psi(t) \rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle K_L^0 | \psi(t) \rangle \\ &= \frac{1}{2} e^{-iM_0 t} \left( e^{i\tilde{M}t - \frac{1}{2}\Gamma_S t} - e^{-i\tilde{M}t - \frac{1}{2}\Gamma_L t} \right) \end{aligned} \quad (8.38)$$

である。  $\Gamma_S \gg \Gamma_L$  より  $\Gamma_L$  を無視して、

$$\begin{aligned} |\bar{c}(t)|^2 &\simeq \frac{1}{4} \left| e^{i\tilde{M}t - \frac{1}{2}\Gamma_S t} - e^{-i\tilde{M}t} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 + e^{-\Gamma_S t} - 2e^{-\frac{1}{2}\Gamma_S t} \cos 2\tilde{M}t \right) \end{aligned} \quad (8.39)$$

すなわち、生成される  $\Lambda$  粒子の量は  $|\bar{c}(t)|^2$  に比例し、  $|\bar{c}(t)|^2$  は  $\cos 2\tilde{M}t$  の部分により周期的に振動するので、  $\Lambda$  粒子の生成量の変動の周期をみれば  $\tilde{M}$  を求めることができる。

なお実験的に

$$\Delta m = m_{K_S^0} - m_{K_L^0} = -2\tilde{M} = 0.535 \times 10^{-10} \text{ s}^{-1} = 3.5 \times 10^{-6} \text{ eV} \quad (8.40)$$

と求まっている。

このような、  $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$  の周期的な変動の効果をも、regeneration とよぶ。

## 8.2 CP Violation

$K_L^0$  と  $K_S^0$  の寿命は、  $\tau_{K_S^0} / \tau_{K_L^0} = 1.530 \times 10^{-3}$  とかなり異なるが、これは  $K_S^0$  は  $\pi^+ \pi^-$  や  $\pi^0 \pi^0$  などの2つの  $\pi$  粒子に崩壊するのに対し、  $K_L^0$  は少なくとも3粒子、たとえば  $\pi^0 \pi^0 \pi^0$ ,  $\pi^+ \pi^- \pi^0$ ,  $\pi^+ \mu^- \nu_\mu$ ,  $\pi^+ e^- \nu_e$  などの崩壊をするためである。これはCP対称性を仮定すると容易に理解できる。

$$\begin{aligned} \hat{C}\hat{P}|K^0\rangle &= -|\bar{K}^0\rangle, \quad \hat{C}\hat{P}|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle \quad \text{などを用いると (Exercise 8.1), } K_S^0, K_L^0 \text{ は} \\ \hat{C}\hat{P}|K_S^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{C}\hat{P}|K^0\rangle - \hat{C}\hat{P}|\bar{K}^0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\bar{K}^0\rangle + |K^0\rangle) = |K_S^0\rangle \\ \hat{C}\hat{P}|K_L^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{C}\hat{P}|K^0\rangle + \hat{C}\hat{P}|\bar{K}^0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\bar{K}^0\rangle - |K^0\rangle) = -|K_L^0\rangle \end{aligned} \quad (8.46)$$

のように、  $\hat{C}\hat{P}$  の固有状態となり、固有値はそれぞれ  $+1, -1$  である。

一方で、 +)

$$\hat{C}\hat{P}|\pi^+\pi^-\rangle = |\pi^+\pi^-\rangle, \hat{C}\hat{P}|\pi^0\pi^0\rangle = |\pi^0\pi^0\rangle \text{ であり.} \quad (8.47)$$

$$\hat{C}\hat{P}|\pi^+\pi^0\rangle = -|\pi^+\pi^0\rangle, \dots \quad (8.48)$$

であるので、CP対称性を仮定すれば

$$K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0 \quad \neq$$

$$K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^0, \dots$$

のみが許されることかわかる。

## ~EXERCISE~

### 8.2 Transformation of Kaon Under Space Inversion and Charge Conjugation

1. s軌道においてスピンの反対の、 $\uparrow_1 \downarrow_2$  - 反対  $\downarrow_1 \uparrow_2$  対の波動関数  $\downarrow \uparrow$

$$\psi(r_1, r_2) = \begin{pmatrix} \chi_1 & \frac{-i\sigma_2 \cdot \nabla_2}{E_2 + m_2} \chi_2 \\ \frac{-i\sigma_1 \cdot \nabla_1}{E_1 + m_1} \chi_1 & \chi_2 \end{pmatrix} f(|r_1 - r_2|)$$

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \chi_2 \\ \chi_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

より始めて、

$$\hat{P}|K^0\rangle = -|K^0\rangle, \hat{P}|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, \hat{C}|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \hat{C}|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle$$

を導け。(8.43, 44)

解 (a)  $\hat{P}$ に関するほう

$$\psi(r_1, r_2) \rightarrow \hat{P}\psi(r_1, r_2) = \beta_1 \beta_2 \psi(-r_1, -r_2) \quad (2)$$

$\beta_1, \beta_2 (= \gamma_0)$  はそれぞれ  $\chi_1$  の部分,  $\chi_2$  の部分にのみ作用する。

この変換により

$$f(|r_1 - r_2|) \rightarrow f(|r_1 - r_2|)$$

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \frac{-i\sigma_1 \cdot \nabla_1}{E_1 + m_1} \chi_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \frac{+i\sigma_1 \cdot \nabla_1}{E_1 + m_1} \chi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \frac{-i\sigma_1 \cdot \nabla_1}{E_1 + m_1} \chi_1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-i\sigma_2 \cdot \nabla_2}{E_2 + m_2} \chi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{+i\sigma_2 \cdot \nabla_2}{E_2 + m_2} \chi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-i\sigma_2 \cdot \nabla_2}{E_2 + m_2} \chi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$



よって、これらを合わせて、

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (4)$$

(b)  $\hat{C}$  に関するほう

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow \hat{C}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = i\gamma_2^{(1)} i\gamma_2^{(2)} \psi^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (5)$$

この演算子によるスピノルの変換は、 $\sigma_2 \sigma^* = -\sigma_2$  の関係を用いて、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \frac{-i\sigma \cdot \nabla_1}{E+m_1} \chi_1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \frac{i\sigma^* \cdot \nabla_1}{E+m_1} \chi_1 \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} \frac{-i\sigma \cdot \nabla_1}{E+m_1} \sigma_2 \chi_1 \\ -\sigma_2 \chi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{+i\sigma \cdot \nabla_1}{E+m_1} \chi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (\because \sigma_2 \chi_1 = i\chi_2) \end{aligned} \quad (6b)$$

同様に、

$$\begin{pmatrix} \frac{-i\sigma \cdot \nabla_2}{E_2+m_2} \chi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \frac{i\sigma \cdot \nabla_2}{E_2+m_2} \chi_1 \end{pmatrix} \quad (\because \sigma_2 \chi_2 = -i\chi_1) \quad (6a)$$

最後に、 $\nabla_1 f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = -\nabla_2 f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$  なので、これらを合わせて、

$$\hat{C}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \bar{\psi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (8)$$

となる。

これまでの議論で、 $K_L^0$  は 2π 粒子には崩壊しないことを示した。しかしながら実際は、非常に小さい確率ながらも、

$$\begin{aligned} K_L^0 &\rightarrow \pi^+\pi^- \quad (0.203 \pm 0.005)\% \\ &\searrow \pi^0\pi^0 \quad (0.094 \pm 0.018)\% \end{aligned} \quad (8.49)$$

という崩壊が実験的に観測されている。 $K_S^0$  による崩壊幅と比較すると、

$$\frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)} = 5.1 \times 10^{-6}, \quad \frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \pi^0\pi^0)}{\Gamma(K_S^0 \rightarrow \pi^0\pi^0)} = 5.2 \times 10^{-6} \quad (8.50)$$

というわずかなものだが、確かに存在する崩壊モードである。

これはすなわち、CP 対称性の破れを示唆していると考えられる。

CP 破れのもとでは  $\langle K^0 | \hat{S} | \bar{K}^0 \rangle = \langle \bar{K}^0 | \hat{S} | K^0 \rangle$  はもはや正しくなく、

$M_{12} = M_{21}, \Gamma_{12} = \Gamma_{21}$  も成立しない。(M, Γ のエルミート性より、 $M_{12} = M_{21}^*, \Gamma_{12} = \Gamma_{21}^*$  は成立)

CP対称性が成り立たないとして議論することもある。

$|K_S^0\rangle, |K_L^0\rangle$  は行列  $(M - i\Gamma/2)$  の固有状態なので

$$\begin{pmatrix} M_0 - \frac{i}{2}\Gamma_0 & M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \\ M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^* & M_0 - \frac{i}{2}\Gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \bar{c} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c \\ \bar{c} \end{pmatrix} \quad (8.52)$$

として、固有値方程式より

$$\begin{aligned} (M_0 - \frac{i}{2}\Gamma_0 - \lambda)^2 &= (M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*) \\ \therefore M_0 - \frac{i}{2}\Gamma_0 - \lambda &= \pm \sqrt{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)} \end{aligned} \quad (8.53)$$

となる。これより

$$(M_0 - \frac{i}{2}\Gamma_0)c + (M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})\bar{c} = \lambda c \quad \text{より} \quad (8.54)$$

$$\frac{\bar{c}}{c} = \frac{\lambda - M_0 + \frac{i}{2}\Gamma_0}{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}} = \mp \sqrt{\frac{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}}} \quad (8.55)$$

が得られる。これと規格化の式  $|c|^2 + |\bar{c}|^2 = 1$  より

$$|K_S^0\rangle = N \left( |K^0\rangle - \sqrt{\frac{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}}} |K^{\bar{0}}\rangle \right) \equiv N (|K^0\rangle - \eta |K^{\bar{0}}\rangle) \quad (8.56)$$

$$|K_L^0\rangle = N \left( |K^0\rangle + \sqrt{\frac{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}}} |K^{\bar{0}}\rangle \right) \equiv N (|K^0\rangle + \eta |K^{\bar{0}}\rangle)$$

$$\begin{aligned} N^{-2} &= 1 + \frac{(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)(M_{12} + \frac{i}{2}\Gamma_{12})}{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12} + \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)} \\ &= 1 + \frac{|M_{12}|^2 + \frac{1}{4}|\Gamma_{12}|^2 + \text{Im}(\Gamma_{12}^* M_{12})}{|M_{12}|^2 + \frac{1}{4}|\Gamma_{12}|^2 - \text{Im}(\Gamma_{12}^* M_{12})} \approx 2 + \frac{\text{Im}(M_{12} \Gamma_{12}^*)}{|M_{12}|^2 + \frac{1}{4}|\Gamma_{12}|^2} \end{aligned} \quad (8.57)$$

が求まる。

CP対称性のもとでは  $\eta = 1$  であるが、CP破れのもとでは  $M_{12}, \Gamma_{12}$  が複素数であり

$\eta \neq 1$  となる。

$$(8.58)$$

次に  $|K_{S/L}^0\rangle$  の成分で  $2\pi$  粒子への崩壊に関わる部分を考える。それは CP 変換で符号を変えない成分であり、それを抜き出すために射影演算子  $\frac{1}{2}(1 + \hat{C}\hat{P})$  を用いると、(8.45)式を用いて、

$$\frac{1}{2}(1+\hat{C}\hat{P})|K_S^0\rangle = \frac{N}{2}(1+\hat{C}\hat{P})(|K^0\rangle - \eta|\bar{K}^0\rangle) \quad I_3 = \begin{matrix} +1/2 & -1/2 \\ \pi^+ & \pi^- \end{matrix} \quad I_3 = 1$$

$$= \frac{N}{2}(1+\eta)(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle), \quad \left. \begin{matrix} \pi^0 \\ \pi^0 \end{matrix} \right\} \quad I_3 = 0$$

(8.59)

$$\frac{1}{2}(1-\hat{C}\hat{P})|K_L^0\rangle = \frac{N}{2}(1-\hat{C}\hat{P})(|K^0\rangle - \eta|\bar{K}^0\rangle)$$

$$= \frac{N}{2}(1-\eta)(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad \left. \begin{matrix} \pi^0 & \pi^0 \\ I=0 \text{ or } 2 & I_3=0 \end{matrix} \right\} \quad (8.60)$$

よって、 $|K_S^0\rangle \rightarrow |\pi^+\pi^-\rangle$  と  $|K_L^0\rangle \rightarrow |\pi^+\pi^-\rangle$  の遷移振幅の比は、

$$\eta \equiv \frac{A(K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)}{A(K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)} = \frac{1-\eta}{1+\eta} \approx \frac{1-\eta}{2}$$

(8.61)

と求まる。終状態が  $\pi^+\pi^-$  のときの  $\eta$  と  $\pi^0\pi^0$  のときの  $\eta$  は別の独立したもので、それぞれ  $\eta_{+-}$ ,  $\eta_{00}$  とする。

$$\eta_{+-} = |\eta_{+-}| \exp(i\phi_{+-}), \quad \eta_{00} = |\eta_{00}| \exp(i\phi_{00})$$

とおくことができ、それぞれの実数値は、

$$|\eta_{+-}| = (2.274 \pm 0.022) \times 10^{-3}, \quad \phi_{+-} = (44.6 \pm 1.2)^\circ$$

$$|\eta_{00}| = (2.33 \pm 0.08) \times 10^{-3}, \quad \phi_{00} = (54 \pm 5)^\circ$$

(8.62)

と求まっている。

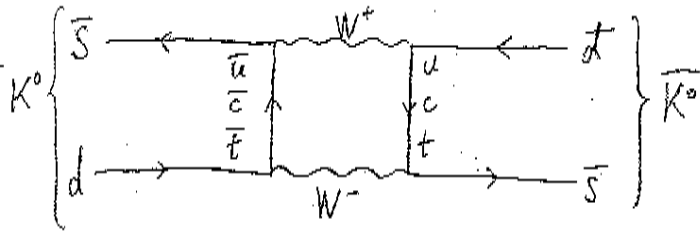
なお、 $K$ 中間子のアイソスピンは  $1/2$ 、 $2\pi$ 粒子のアイソスピンは  $0$  の  $2$  であるが、アイソスピンの変化  $\Delta I = 3/2$  のものがなければ  $\eta_{+-} = \eta_{00}$  となる。?  
 実験値においては  $\eta_{+-} \neq \eta_{00}$  であるが、両者の値が近いことから、 $\Delta I = 3/2$  の成分は少ないことがわかる。

次に、 $CP$ 破れの起源を考えたい。それは、行列要素  $M_{12}$  と  $\Gamma_{12}$  がなぜ実数でないのかを考慮することである。  
 そのためには、今まで考えてきた  $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$  のモデルをもう少し詳しく見ていくことになる。  
 つまり、この反応をクォークレベルで考えたとき、途中に現れる  $d$  や  $s$  クォークは、世代の混合により、 $d, s, b$  クォークなどが混合したものである。  
 それに対応して、反応の中間で壊れる  $u$  クォークも、 $u, c, t$  クォークの混合である。  
 ということを考慮に入れる。

7 $\pi$ -7の混合は、以前の(6.36)式に現れたUを用いて表され

$$\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = \hat{U}^\dagger \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (8.63, 64)$$

であり、反応のファインマン図は以下のようになる。



混合を考慮に入れて行列要素  $M_{12}$  をあらわすと以下のとおり。

$$M_{12} = G \left( U_{sd'}^\dagger U_{dd'} m_u + U_{ss'}^\dagger U_{sd'} m_c + U_{cb'}^\dagger U_{bb'} m_t \right)^2 \quad (8.65)$$

また、Uのユニタリ性より、

$$U_{sd'}^\dagger U_{dd'} + U_{ss'}^\dagger U_{sd'} + U_{cb'}^\dagger U_{bb'} = 0 \quad (8.67)$$

よって、

$$M_{12} = G \left[ U_{sd'}^\dagger U_{dd'} (m_u - m_c) + U_{cb'}^\dagger U_{bb'} (m_t - m_c) \right]^2 \quad (8.68)$$

$$= G \left[ A_1 C_1 C_3 (m_c - m_u) + (A_1 C_1 A_2 A_2 C_3 - A_1 A_2 C_2 A_3 e^{-i\delta}) (m_t - m_c) \right]^2 \quad (8.69)$$

となる。(U<sub>sd'</sub><sup>†</sup> = U<sub>ds'</sub><sup>\*</sup> などを用い、(6.36)式に表れるUの成分をあらわに表記した)

$\delta$ が小さいなどの近似を用いて、

$$\text{Im} \{ M_{12} \} \approx 2 \frac{A_1 A_2 C_2 A_3 A_3 \sin \delta (m_t - m_c) M_{12}}{A_1 C_1 C_3 (m_c - m_u) + (A_1 C_1 A_2 C_2 C_3 - A_1 A_2 C_2 A_3 \cos \delta) (m_t - m_c)} \quad (8.70)$$

が得られる。

これより、 $\eta$ の値を評価すると、( $\Gamma_{12}$ を無限、 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \delta$ が小、 $m_t/m_c \gg 1$ ,  $m_u$ が小、などの近似を用いた)

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2}(1-\epsilon) = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{M_{12}^*}{M_{12}}} \right) \\ &\approx \frac{A_1 \theta_2 A_1 \theta_3 A_3 \sin \delta m_t}{m_c + m_t A_1 \theta_2} \quad (8.72) \end{aligned}$$

となり、 $\eta \approx 2 \times 10^{-3}$  という実験値を説明することができる。

なお、混合角の実験値は、

$$A_1 \theta_1 = 0.229 \pm 0.011, \quad A_1 \theta_2 = 0.07 \pm 0.04, \quad A_1 \theta_3 \leq 0.06, \quad 90^\circ \leq \delta \leq 180^\circ \quad (8.73)$$

とわかっており、 $m_c \ll A_1 \theta_2 m_t$  なら、 $\eta \approx A_1 \theta_3 A_1 \sin \delta \approx 2 \times 10^{-3}$  となる。(8.74)

# 9章 Unified Gauge Theories

## 9.1 Introduction: The Symmetry Group SU(5)

これまで、GWSW理論によつて、弱い相互作用と電磁気力を、 $SU(2)_L \times U(1)$ の枠組みで統一的に記述することに成功した。

ところで、レプトンの電荷やハイパーチャージ、バリオン数が整数であるのに対し、クォークのそれらは $1/3$ の倍数となつていて、3つの組になることで整数値となる。これは、quantum chromodynamics (QCD) において、 $SU(3)$ という群を考慮することで説明される。

したがつて、当面の目標として、強い相互作用を記述する $SU(3)$ と、電弱力を記述する $SU(2) \times U(1)$ を包含した、より大きな枠組を提供する理論を構築することを考えていきたい。

まず単純に、 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を部分群として持つものとして、 $SU(5)$ が考えられる。 $SU(5)$ の既約表現の次元は、 $5, 10, 15, 24, 35, 40, \dots$  である。(後述)

3つの力を統合する具体的なモデルを考える前に、まず $SU(5)$ の性質について議論しておく。

一般に、 $SU(n)$ は、 $n \times n$ ユニタリー行列で $\det = 1$ のものからなる群。その元は

$$\hat{U} = \exp(i\hat{H}), \quad \hat{H}^\dagger = \hat{H} \quad (9.1)$$

とあらわされ、 $\hat{H}$ はgeneratorと呼ばれる。

$\hat{U}$ が $\mathbb{1}$ と近い場合は、

$$\hat{U} = \exp(i\delta\hat{H}) \approx \mathbb{1} + i\delta\hat{H} \quad (9.2)$$

と近似され、そのような $\hat{U}_1, \hat{U}_2$ の積は、

$$\hat{U}_2 \hat{U}_1 \approx (\mathbb{1} + i\delta\hat{H}_2)(\mathbb{1} + i\delta\hat{H}_1) \approx \mathbb{1} + i(\delta\hat{H}_2 + \delta\hat{H}_1) \quad (9.3)$$

と近似される。

さて、 $SU(n)$ のgeneratorをどのようにすればよいかを考えていく。

一般に複素 $n \times n$ 行列の自由度は $2n^2$ であり、そこにエルミート性の条件が $n^2$ 個、 $\det \hat{U} = 1$ の条件が1個つくので、

$SU(n)$ のgeneratorの数は $n^2 - 1$ 個あればよい。

まず generator になりうる最も簡単な形のものをとして.

$$\hat{C}_{\alpha\beta} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (C_{\alpha\beta})_{ik} = \delta_{\alpha i} \delta_{\beta k} \quad (9.4)$$

という行列に対し.

$$\hat{C}_{\alpha\beta} + \hat{C}_{\beta\alpha}, \quad \frac{1}{i}(\hat{C}_{\alpha\beta} - \hat{C}_{\beta\alpha}) \quad (9.5)$$

を考えると、これはエルミート行列となっている。 ( $\hat{C}_{\alpha\beta}^\dagger = \hat{C}_{\beta\alpha}$ )

ただしこれは  $U(n)$  に対する generator であり、 $SU(n)$  に対する generator となるためには traceless 性を要求せねばならないので.

$$\hat{C}'_{\alpha\alpha} = \hat{C}_{\alpha\alpha} - \frac{1}{n} \mathbf{1} = \hat{C}_{\alpha\alpha} - \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n \hat{C}_{\alpha\alpha} \quad (9.6)$$

$$\hat{C}'_{\alpha\beta} = \hat{C}_{\alpha\beta} \quad (\alpha \neq \beta)$$

と置き換える。ここで、 $n$  個の行列  $\hat{C}'_{\alpha\alpha}$  は.

$$\sum_{\alpha=1}^n \hat{C}'_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n \hat{C}_{\alpha\alpha} - \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{1} = 0 \quad (9.7)$$

より独立でない。そこで、 $n-1$  個の線型独立な対角行列を得るために.

$$\hat{C}'_{11} - \hat{C}'_{22}, \quad \hat{C}'_{11} + \hat{C}'_{22}, \quad \hat{C}'_{33} - \hat{C}'_{44}, \quad \hat{C}'_{33} + \hat{C}'_{44}, \quad \dots \quad (9.8)$$

のようにするのが一般的である。

$\hat{C}'_{\alpha\beta}$  について交換関係を計算すると.

$$[\hat{C}'_{\alpha\beta}, \hat{C}'_{\gamma\delta}] = \delta_{\beta\gamma} \hat{C}'_{\alpha\delta} - \delta_{\alpha\delta} \hat{C}'_{\gamma\beta} \quad (9.11)$$

となる。

このような手法での generator の構成について、 $SU(5)$  の場合の具体例がテキストに示されている。

generator のうちで、対角化されているものの数を rank といい、例えば  $SU(5)$  の場合 rank は 4 である。この数は、その群における独立な Casimir 演算子の数である。

Casimir 演算子とは、その群における全ての generator と交換可能な演算子である。

(角運動量のときの  $\hat{L}^2$  のようなもの、 $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$  と交換可能.)

Casimir 演算子のうち、最も単純で重要なものは、

$$\hat{C}_2 = \sum_{\alpha, \beta} \hat{C}_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} \quad (9.17)$$

である。これは直ちに、 $[\hat{C}_2, \hat{C}_{\alpha\beta}] = 0$  をみたす。

$SU(5)$ などの既約表現を求める際、Yang 図とよばれるものを用いると便利である。

Yang 図の例はテキスト p308 にある。

それを見ればわかる通り、箱を積み重ねたような図で、 $SU(5)$ の場合は最大で4段である。また、下へいくほど1つの段における箱の数は減っていく。

基本表現は箱1つで表され、既約表現は4つの数  $h_1, h_2, h_3, h_4$  によって指定される。

一般に、 $(h_1 - h_2, h_2 - h_3, h_3 - h_4, h_4)$  という組み合わせが用いられる。

いくつかの重要な既約表現は以下の通り。



$(1, 0, 0, 0)$     $(0, 1, 0, 0)$     $(2, 0, 0, 0)$     $(0, 0, 0, 1)$     $(1, 0, 0, 1)$     $(2, 0, 1, 1)$

既約表現の次元は、いわゆる *factors over hooks* 則で求まる。

具体例はテキスト p308 に示されている通り。

$\square$  と  $\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array}$  の次元は5であり、これらは基本表現とよばれる。

$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array}$  の次元は、 $SU(5)$  の generator の数である24と一致し、この表現は正則表現や随伴表現と呼ばれる。

より大きな次元を構成するときには、表現同士の積を考える。その具体的なやり方はテキスト p309 に記載の通り。

また、箱の横の並びは(順)対称性を示し、縦の並びは反対称性を表す。

そして、表現次元の計算を、テキスト (9.18) 式のような形で表すことにする。