Greiner P.309 ~ 325　　　　2011.12.15

9.2 SU(5)に含まれる $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$　　担当：河合

SU(5)が
- カラー $SU(3)_c$
- 左巻き粒子の弱いアイソスピン $SU(2)_L$
- ハイパーチャージ U(1)

を持つ最も簡単なユニタリー群である。

U(1), SU(2) ⋯ rank 1
SU(3) ⋯ rank 2
→ 統一理論は少なくともrank 4
実際 SU(5)はrank 4

3つの相互作用群を含む統一ゲージ群の特徴

- カラー群 SU(3)は GSW群 $SU(2)_L \times U(1)$ に関して完全に隠れている。
  r, g, b で同じフレーバーのクォーク間に電荷、弱電荷の違いがない。
  → SU(3) と $SU(2)_L \times U(1)$ は SU(5)に統合されたとき互いに交換することを意味する。
- SU(2)×U(1)群の生成子がSU(3)の生成子に対して単位行列か0行列のようにふるまう。SU(3)の3次元部分空間
- レプトンはカラーシングレットなので、SU(3)の生成子はレプトン成分に対して固有値ゼロでなければならない。

これらを考慮した結果 SU(5)の5次元表現で
初めの3行3列をカラーSU(3)の生成子にとり、
後の2行2列を弱いアイソスピン $SU(2)_L$ の生成子にとる。
これによって完全にSU(5)の構造を決定し、U(1)も含んでいる。
SU(5)からワインバーグ角も計算することができる。
統一ゲージ群SU(5)を考えることは、単なる数学的配列ではなく、実験で確認できる物理的な予言もすることができる。

SU(3) ⊂ SU(5) の対角な生成子は対角行列 $\hat{C}_{11}, \hat{C}_{22}, \hat{C}_{33}$ から作られる。traceless性を要求して、

$$\hat{C}''_{11} = \hat{C}_{11} - \frac{1}{3}(\hat{C}_{11} + \hat{C}_{22} + \hat{C}_{33}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{C}''_{22} = \hat{C}_{22} - \frac{1}{3}(\hat{C}_{11} + \hat{C}_{22} + \hat{C}_{33}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (9.19)$$

組み合わせて

$$\tilde{\lambda}_3 \equiv \hat{C}''_{11} - \hat{C}''_{22} = \begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & -1 &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 0 \end{pmatrix}$$

← 2乗のトレース＝2に規格化

$$\tilde{\lambda}_8 \equiv \sqrt{3}\left(\hat{C}''_{11} + \hat{C}''_{22}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 1 &&& \\ && -2 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 0 \end{pmatrix} \qquad (9.20)$$

こうして $SU(3)$ の生成子が得られる。

同様に $SU(2)$ は、$\hat{C}_{44}$, $\hat{C}_{55}$ から、

$$\tilde{\lambda}_{23} \equiv \tilde{\tau}_3 = \hat{C}''_{44} - \hat{C}''_{55} = \begin{pmatrix} 0 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 1 & \\ &&&& -1 \end{pmatrix} \qquad (9.21)$$

最後に $U(1)$ に対応する生成子は、対角で、

$SU(3)$, $SU(2)$ に関して単位行列として働き、traceless性を要求する。

これら全てを満足するのは次の場合のみで、

$$\tilde{Y} \equiv \sqrt{\frac{5}{3}}\left(\hat{C}_{44} + \hat{C}_{55}\right) = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -2 &&&& \\ & -2 &&& \\ && -2 && \\ &&& 3 & \\ &&&& 3 \end{pmatrix} \qquad (9.22)$$

— Ex 9.1

$SU(5)$ の全ての生成子 $\tilde{\lambda}_i\ (i=1\sim 24)$ を求める。

部分群 $U(1)$ の生成子は 1個 … $\tilde{Y}$

$SU(3)$, $SU(2)$ で対角な生成子 … $\tilde{\lambda}_3$, $\tilde{\lambda}_8$, $\tilde{\tau}_3$ ← 既出

残りは非対角な演算子

$\tilde{\lambda}_9 \sim \tilde{\lambda}_{20}$ は異なる部分群に属する多重項間の遷移を表す。

→ ゲージボソン X, Y によって媒介される。 $SU(3) \leftrightarrow SU(2)\times U(1)$

$$\tilde{\lambda}_{21} \equiv \tilde{\tau}_1 = \begin{pmatrix} &&&& \\ &&&& \\ &&&& \\ &&& 0 & 1 \\ &&& 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_{22} \equiv \tilde{\tau}_2 = \begin{pmatrix} &&&& \\ &&&& \\ &&&& \\ &&& 0 & -i \\ &&& i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_{23} \equiv \tilde{\tau}_3 = \begin{pmatrix} &&&& \\ &&&& \\ &&&& \\ &&& 1 & 0 \\ &&& 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\tilde{\lambda}_{24} \equiv \tilde{Y}$

$\tilde{\lambda}_1 \sim \tilde{\lambda}_8$ … $SU(3)$ のリー代数

$\tilde{\tau}_1 \sim \tilde{\tau}_3$ … $SU(2)$ 代数 , $\tilde{Y}$ … $U(1)$

演算子 $\tilde{\lambda}_i\ (i=1\sim 21)$ は $\tilde{\tau}_i\ (i=1,2,3)$ と交換するので

部分群 $SU(3)$ と $SU(2)$ は交換する。$U(1)$ も同様

残りの $\tilde{\lambda}_9 \sim \tilde{\lambda}_{20}$ の 12個の生成子は新しい群 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ を表す

GSW理論から、レプトンダブレット $\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}$ のハイパーチャージは -1

ハイパーチャージに対応する $\hat{Y}$ を次のように規格化しておくと便利

$$\hat{Y} = \sqrt{\frac{5}{3}}\,\tilde{Y} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & & & & \\ & -\frac{2}{3} & & & \\ & & -\frac{2}{3} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

電荷のハイパーチャージを現実に合うように合わせると、クォークのハイパーチャージが予言できる

左巻きレプトンダブレット $(\nu_e, e^-)_L$ は複素共役表現 $\bar{5}$ に属する。

ハイパーチャージの演算子は $-\tilde{Y}$ で与えられる。

（群演算子について考えると

$[\exp(i\alpha\hat{Y})]^* = \exp(-i\alpha\hat{Y}) = \exp[i\alpha(-\hat{Y})]$ ）

電荷演算子は 5表現で

$$\hat{Q} = \hat{T}_3 + \frac{1}{2}\hat{Y} = \frac{1}{2}\hat{\tau}_3 + \sqrt{\frac{5}{12}}\,\tilde{Y} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -\frac{1}{3} & & \\ & -\frac{1}{3} & \\ & & -\frac{1}{3} \end{matrix}}_{\text{カラー}SU(3)} & \\ & \underbrace{\begin{matrix} 1 & \\ & 0 \end{matrix}}_{\text{レプトンアンチダブレット}(e^c,\,-\nu_e^c)_R} \end{pmatrix} \qquad (9.25)$$

$\bar{5}$表現では $(-\hat{Q})$

(9.25)式は、SU(5)の5重項のフェルミオンが統一されたことを表している。→Ex 9.2

右巻きdクォーク カラートリプレット

5次元表現は次で与えられる。

$$[5] = (\psi_p)_R = \begin{pmatrix} d_r \\ d_b \\ d_g \\ e^+ \\ -\nu_e^c \end{pmatrix}_R \qquad (p = 1, \cdots, 5) \qquad (9.26)$$

c は反粒子を表す

SU(2)ダブレット $\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L$ に対応する反粒子は $\begin{pmatrix} e^+ \\ -\nu_e^c \end{pmatrix}_R$

ヘリシティの符号が反粒子では逆になる →Ex 9.2

— Ex 9.2 荷電共役変換

スピン$\frac{1}{2}$の反粒子は荷電共役変換で得る

$\psi^c = \hat{C}\bar{\psi}^T = \hat{C}\gamma^0\psi^*$, $\bar{\psi}^c = \overline{\psi^c}$ ← 荷電共役変換の定義

荷電共役変換の演算子 $\hat{C}$ は $\hat{C}\gamma^\mu\hat{C}^{-1} = -\gamma^{\mu T}$ をみたす。

例えば $\hat{C} = i\gamma^2\gamma^0$ はこの条件をみたす。

カイラリティ固有状態のふるまいは、次の通り

$$(\psi_L)^c = \hat{C}\gamma^0(\psi_L)^* = i\gamma^2 \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi^*$$
$$= \frac{1}{2}(1+\gamma_5) i\gamma^2\psi^* = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\hat{C}\gamma^0\psi^*$$
$$= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi^c = (\psi^c)_R$$

同様にして、
$$(\psi_R)^c = (\psi^c)_L$$

よって右巻き電子の荷電共役変換したものは左巻き陽電子である。

アイソスピンダブレットに対する荷電共役変換はもう少し複雑になる。

(9.24)のハイパーチャージの例のように、荷電共役変換は、対称変換を生み出す全ての生成子の固有値の符号を変える。このことは荷電共役変換の中の複素共役変換が原因である。したがって、ナイーブにはレプトンダブレットの個々の成分に荷電共役変換を適用すると

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \longrightarrow L' = \begin{pmatrix} \nu_e^c \\ e^+ \end{pmatrix}_R \quad \begin{matrix} T_3 = -\frac{1}{2} \\ T_3 = +\frac{1}{2} \end{matrix}$$

これは正しくなく、正しくは、L'を2軸(or 1軸)まわりにアイソスピン空間で180°回転してやる。

$$e^{i\pi \frac{\tau_2}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}\tau_2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\tau_2 \sin\frac{\pi}{2} = i\tau_2 = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^e = i\tau_2 \begin{pmatrix} \nu_e^c \\ e^+ \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_e^c \\ e^+ \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} e^+ \\ -\nu_e^c \end{pmatrix}_R$$

こうすると反粒子のdoubletでも粒子のdoubletと同じSU(2)変換

ここまで左巻き荷電共役変換された粒子$(d_r, d_b, d_g)_L$, e^+_Lを5重項でいれたいとまとめようとしてきたが、これは不可能。

d: アイソスピンダブレット　e^+_L: アイソスピンシングレット　同じ多様性を有する。

ベストな方法は荷電共役変換した左巻き粒子を含む反5重項を作ること

$$[\bar{5}] = (\psi_p^c)_L = \begin{pmatrix} d_r^c \\ d_b^c \\ d_g^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}_L \qquad (p=1,\cdots,5)$$

クォーク $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$　u_R d_R

右クォークは singlet
左クォークは doublet

(d^cは反dクォークのことで$\bar{d}$とも書くが、随伴スピノール$\bar{d} = d^\dagger\gamma^0$と間違えないよう)
、ここではd^cを使う

左巻きで残りのシングレット e^+_L, (u_r^c, u_b^c, u_g^c)もSU(5)多重項に入れるために数学的準備が必要

右レプトンの e^- sing
左レプトンの doub $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$

SU(5)の既約表現をSU(3)とSU(2)のテンソル積で分解する。

まずは、SU(5)基本表現の分解

$$5 \equiv \square_5 = (\underset{\uparrow}{\square_3}, \underset{\uparrow}{1_2}) + (1_3, \square_2) \equiv (3, 1) + (1, 2)$$

SU(3), SU(2)に属する

2つの基本表現の直積は、

$$\square_5 \times \square_5 = [(\square_3, 1_2) + (1_3, \square_2)] \times [(\square_3, 1_2) + (1_3, \square_2)]$$

$$= (\square_3 \times \square_3, 1_2) + (\square_3, \square_2) + (\square_3, \square_2) + (1_3, \square_2 \times \square_2)$$

$$= (\square\!\square_3, 1_2) + \left(\begin{array}{c}\square\\[-4pt]\square\end{array}_3, 1_2\right) + 2(\square_3, \square_2)$$

$$+ (1_3, \square\!\square_2) + \left(1_3, \begin{array}{c}\square\\[-4pt]\square\end{array}_2\right)$$

$$\equiv (6, 1) + (\overline{3}, 1) + 2(3, 2) + (1, 3) + (1, 1)$$

一方(9.18)式

$$5 \times 5 \equiv \square_5 \times \square_5 = \square\!\square_5 + \begin{array}{c}\square\\[-4pt]\square\end{array}_5 = 15 + 10$$

上下の箱は反対称，左右の箱は対称なので，

$(6, 1)$, $(1, 3) \to$ 15次元表現（対称）

$(\overline{3}, 1)$, $(1, 1) \to$ 10次元表現（反対称）

$(3, 2)$の2つ → 対称と反対称

$$10 = (\overline{3}, 1) + (3, 2)_{anti} + (1, 1)$$

$$15 = (6, 1) + (3, 2)_{sym} + (1, 3)$$

Ex 9.3 SU(5) 5重項

10次元表現は3つの基本成分を持つ

		基底ベクトル
カラーアンチトリプレット、アイソスピンシングレット	$(\overline{3}, 1)$	→ 3つ
反対称　カラートリプレット，アイソスピンダブレット	$(3, 2)_{anti}$	→ 6つ
完全なシングレット	$(1, 1)$	→ 1つ

全部で10個の基底ベクトルを作る → 10次元表現

随伴表現の分解は　$[\overline{5}] = (\overline{3}, 1) + (1, \overline{2})$

左巻き反dクォークはアイソスピンシングレットを作るが

カラーシングレットな粒子$(e^-, \nu_e)_L$はアイソスピンダブレットに属する

$(1, \overline{2})$は$(1, 2)$に等しい

[10]表現の個々の成分は

$$\left\{\begin{array}{l} (\overline{3}, 1) \to (u_r^c, u_b^c, u_g^c)_L \\ (3, 2) \to \begin{pmatrix} u_r & u_b & u_g \\ d_r & d_b & d_g \end{pmatrix}_L \\ (1, 1) \to e_L^+ \end{array}\right.$$

に対応する

反対称 $SU(5)$ $[10]$ 表現は
10個の独立な成分を持つ 5×5 行列で表わされる。
これらの行列を ψ_{ij} と書く　$\psi_{ij}=-\psi_{ji}$
この表現の群演算子は基本表現の演算子のテンソル積で表される。

$$\psi_{kl}=g_k g_l-g_l g_k$$

$$\psi'_{kl}=\sum_{i,j}U^{[10]}_{kl,ij}\psi_{ij}=\sum_{i,j}\left(U^{[10]}_{ki}U^{[10]}_{lj}\right)\psi_{ij}$$

群演算子のかけ算は生成子のたし算に対応する。
電荷行列 $Q^{[5]}_{ki}=Q^{[5]}_i\delta_{ik}$ のような対角演算子に対して、5次元表現での群の回転が $U^{[5]}_{kl}=exp(iQ^{[5]}_k)\delta_{kl}$ のとき、10次元表現では群演算子は

$$U^{[10]}_{kl,ij}=U^{[5]}_{ki}U^{[5]}_{lj}=e^{iQ^{[5]}_k}\delta_{ki}e^{iQ^{[5]}_l}\delta_{lj}=e^{iQ^{[10]}}\delta_{ki}\delta_{lj}$$

よって電荷演算子は加法で得られる。

$$\hat{Q}^{[10]}=\left(Q^{[5]}_k+Q^{[5]}_l\right)\delta_{ki}\delta_{lj}$$

その結果

$$\hat{Q}^{[10]}\psi_{kl}=\sum_{i,j}Q^{[10]}_{kl,ij}\psi_{ij}=\sum_{i,j}\left(Q^{[5]}_i+Q^{[5]}_j\right)\delta_{ki}\delta_{lj}\psi_{ij}$$

$$=\left(Q^{[5]}_k+Q^{[5]}_l\right)\psi_{kl}=Q_{kl}\psi_{kl}$$

電荷行列 (9.25) $\hat{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&&&&\\&-\frac{1}{3}&&&\\&&-\frac{1}{3}&&\\&&&1&\\&&&&0\end{pmatrix}$ の固有値から、(Q_k+Q_l) は

$$Q_{kl}=(Q_k+Q_l)=\begin{pmatrix}*&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&*&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&*&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&*&1\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&1&*\end{pmatrix}$$

反対称状態 $\psi_{kl}=g_k g_l-g_l g_k$ の電荷 Q_{kl} は個々の状態の和で求められる。
対角要素は寄与しない。$\psi_{ii}=0\rightarrow *$ を使った
$SU(3)$ と $SU(2)$ に関しての10次元表現の分解 (9.31a) は
反対称行列 ψ_{ij} に左巻き粒子を残した配列となる

$$10=\left(\begin{array}{c:c}(\bar{3},1)&(3,2)\\\hdashline(3,2)&(1,1)\end{array}\right)$$

カラーベクトル (u^c_r, u^c_b, u^c_g) から $\sum_k\epsilon_{ijk}(u^c_k)_L$ により反対称 3×3 行列を作り、
シングレット e^+_L から $\epsilon_{ij}e^+_L$ により反対称 2×2 行列を作る。

すると行列ψ_{ij}は次の通り

$$\psi_{ij}^{[10]}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u_g^c & -u_b^c & -u_r & -d_r \\ -u_g^c & 0 & u_r^c & -u_b & -d_b \\ u_b^c & -u_r^c & 0 & -u_g & -d_g \\ \hline u_r & u_b & u_g & 0 & -e^+ \\ d_r & d_b & d_g & e^+ & 0 \end{array}\right)_L \qquad (9.37)$$

- 全部の粒子が2回ずつ出てくるので$\frac{1}{\sqrt{2}}$で規格化
- $r, b, g \longrightarrow 1, 2, 3$を用いる。
- 電荷演算子を作用させると$Q(u)=-Q(u^c)=+\frac{2}{3}$, $Q(d)=-\frac{1}{3}$, $Q(e^+)=+1$

ある特定の電荷を固定すると(例えば電子の電荷を固定)

- 他の全粒子の電荷が完全に決まる。$\rightarrow SU(5)$によって電荷が量子化
- traceless な演算子の線形結合である電荷演算子も traceless

$\rightarrow$多重項内の左巻きフェルミオンの電荷の和はゼロ

$[5]: \ 3Q(d)+Q(e^+)+Q(\bar{\nu}_e)=0$

$[10]: \ \sum_{k,l} Q_{kl}=\underbrace{\sum_{k} Q_{kk}}_{0}+\sum_{k\neq l} Q_{kl}=\sum_{k\neq l}(Q_k+Q_l)=3Q(\bar{u})+3Q(u)+3Q(d)+Q(e^+)$

$\qquad\qquad =3Q(d)+Q(e^+)=0$

ただし$Q(u^c)=-Q(u)$、以上より

$Q(\bar{\nu}_e)=0$, $Q(d)=-\frac{1}{3}Q(e^+)=\frac{1}{3}Q(e^-)$

さらに電弱統一理論のダブレットの性質より2スピノールの上成分と下成分の電荷の差

$\Delta Q=g_0\left(\frac{Y}{2}+T_3=+\frac{1}{2}\right)-g_0\left(\frac{Y}{2}+T_3=-\frac{1}{2}\right)=g_0$

$\therefore \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}$について、$Q(u)-Q(d)=Q(\nu_e)-Q(e^-)$

$Q(u)=Q(d)+[Q(\nu_e)-Q(e^-)]=-\frac{2}{3}Q(e^-)$

こうして全粒子の電荷が$Q(e^-)$だけで書けた。

$SU(5)$の他の成功としては、全レプトンダブレットに対して、1つずつクォークダブレットが存在する。そのような組み合わせのときだけ標準理論が繰り込み可能になる。

Ex 9.4

(ν_μ, μ, c, s), (ν_τ, τ, t, b)についても(ν_e, e, u, d)と同じように$SU(5)$の多重項を作れる。5重項, 10重項, 反5重項, 反10重項

各世代でレプトンとクォークの数は一致し、各レプトンフレーバーに対して、1つのクォークが存在すると期待される。

$\longrightarrow$ tクォークの予言

$\longrightarrow$ 1995年 発見