9.3 SU(5) ゲージ理論

SU(5) ゲージ理論のゲージボソンは 随伴表現 (24表現) に属していると考えるのが自然である。

- グルーオンは、SU(3) の随伴表現である 8表現に属していた。上の主張は、この拡張となっている。

- 24表現は $5 \otimes \bar{5}$ を既約分解して得られるが、これはちょうど、ボソンを表すものになっている。
  (メソンが $3 \otimes \bar{3}$ などから構成できたこととのアナロジー)

実際 24表現は、標準理論のゲージボソンを含んだ拡張になっている。

$$[24]_5 = (8,1) \oplus (\bar{3},2) \oplus (3,2) \oplus (1,3) \oplus (1,1)$$

- $(8,1)$: カラー octet アイソスピン singlet = グルーオン
- $(\bar{3},2)$, $(3,2)$: 未知の粒子
- $(1,3)$: カラー singlet アイソスピン triplet
- $(1,1)$: カラーもアイソスピンも singlet

$(1,3)$ と $(1,1)$ = $W^{\pm}$, Z と光子

上の既約分解から存在が予言される未知のゲージボソンを、次のように書く。

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix}$$

この粒子が、陽子崩壊などの現象を引き起こすことになる。

EXERCISE 9.5. ゲージボソンの電荷.

9.2節では、10表現の基底を構成して、行列表示することにより、u. d. e^+ の電荷を求めた。同様の議論により、ゲージボソン（g. W. B. X. Y）の電荷を求めることができる。

☆ 電荷演算子

$$Q^{[24]}_{kl} = Q_k^{[5]} + Q_l^{[\bar{5}]} = Q_k^{[5]} - Q_l^{[5]}$$

$$Q^{[5]} = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \\ & \uparrow l \end{array}$$

であるから、

$$Q^{[24]} = \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ & O & & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ & & & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \hline \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 & +1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 0 \end{array}\right)$$

☆ ボソン場の行列表示

$A_\mu = \Psi^{[24]}$ の行列表示を求めれば、直ちに電荷を求めることができる。

24表現の基底は、生成子 $\{\tilde{\lambda}_a\}$ に他ならないから、

$$A_\mu = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{24} A_\mu^a \tilde{\lambda}_a$$

と展開できる。従って、

SU(3) の グルーオンを記述

$$A_\mu = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc|cc} & & & 0{-}i0 & \cdot \\ & \boxed{\sum_{a=1}^{8} A_\mu^a \tilde{\lambda}_a} & & \vdots & \vdots \\ & & & \vdots & \vdots \\ \hline A_\mu^9 + iA_\mu^{10} & A_\mu^{11} + iA_\mu^{12} & A_\mu^{13} + iA_\mu^{14} & A_\mu^{23} & A_\mu^{21} - iA_\mu^{22} \\ A_\mu^{15} + iA_\mu^{16} & A_\mu^{17} + iA_\mu^{18} & A_\mu^{19} + iA_\mu^{20} & A_\mu^{21} + iA_\mu^{22} & -A_\mu^{23} \end{array}\right) + \frac{A_\mu^{24}}{2\sqrt{15}}\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}}_{\tilde{Y}}$$

SU(2) の W, Z, γ を記述

notationを整理すると、

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{ccc:cc} & \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_a G_\mu^a \lambda_a & & X_{1\mu}^c & Y_{1\mu}^c \\ & & & X_{2\mu}^c & Y_{2\mu}^c \\ & & & X_{3\mu}^c & Y_{3\mu}^c \\ \hdashline X_{1\mu} & X_{2\mu} & X_{3\mu} & W_\mu^3/\sqrt{2} & W_\mu^+ \\ Y_{1\mu} & Y_{2\mu} & Y_{3\mu} & W_\mu^- & -W_\mu^3/\sqrt{2} \end{array}\right) + \frac{B_\mu}{2\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

従って、

		電荷
G_μ. W_μ^3. B_μ	…	0
$W_\mu^\pm$	…	± 1
X_μ	…	$\frac{4}{3}$
Y_μ	…	$\frac{1}{3}$

であると分かる。

☆ スカラー状態

5表現の場を、 $\psi^{[5]} = \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \vdots \\ \psi_5\end{pmatrix} = \psi_1 g_1 + \cdots + \psi_3 g_3 + \psi_4 l_1 + \psi_5 l_5$

$\bar{5}$表現の場を、 $\psi^{[\bar{5}]} = (\bar{\Phi}_1 \cdots \bar{\Phi}_5) = \sim$

とおく。 $5\otimes\bar{5}$ 表現の場は、これらの直積で構成されるが、これは $\psi^{[5]}$ と $\psi^{[\bar{5}]}$ の順序に依存する。

$$[\bar{5}]\otimes[5] = \sum_i \bar{\Phi}_i \psi_i$$

$$[5]\otimes[\bar{5}] = \begin{pmatrix} \psi_1\bar{\Phi}_1 & \psi_1\bar{\Phi}_2 & \cdots \\ \psi_2\bar{\Phi}_1 & \ddots & \\ \vdots & & \psi_5\bar{\Phi}_5 \end{pmatrix}$$

前者の"スカラー状態"の電荷は、 $\hat{Q}\sum_i \bar{\Phi}_i\psi_i = \sum_i \left(Q_i^{[5]} + Q_i^{[\bar{5}]}\right)\bar{\Phi}_i\psi_i = 0$

となり、電荷を運ばない"粒子"を表す。（スカラー状態の物理的対応物は特にない。）

▼ ワインバーグ角

SU(5) ゲージ理論の共変微分は、$iD_\mu = i\partial_\mu + \frac{g_5}{2}A_\mu^a\tilde{\lambda}_a$ となる。

(g_5: 結合定数) 相互作用項のうち、電弱相互作用を表わす部分を取り出すと、

$$g_5 W_\mu^i \hat{T}_i + \frac{g_5}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} B_\mu \hat{Y}$$

となる。これを、WS理論の項

$$g W_\mu^i \hat{T}_i + \frac{g'}{2} B_\mu \hat{Y}$$

と比較すると、2つの理論の結合定数の間に、

$$g = g_5, \quad g' = \sqrt{\frac{3}{5}}\, g_5$$

なる関係があることが分かる。このことから、ワインバーグ角が

$$\sin^2\theta_W = \frac{3}{8}$$

と、exact に定まる。

※ $\sin^2\theta_W$ の値は、観測された値とは異なるが、現実のエネルギスケールでは、SU(5) 対称性は破れているので、当然といえば当然である。ワインバーグ角が SU(5) GUT のエネルギースケール (10^{15} GeV) で本当に $\sin^2\theta_W = \frac{3}{8}$ を満たすかどうかは、後の章で議論する。

▼ X ボソンのはたらき

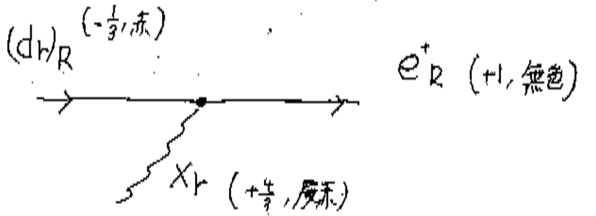
X ボソンがどのような相互作用を引き起こすのかを見るために、A_μ のうち、X_r 成分だけを考えてみる。

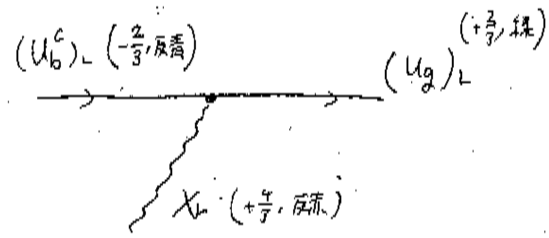
$$\hat{M}(X_r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これが、$\psi^{[5]}$ $\psi^{[10]}$ と結合すると、次のような項が得られる。

$$\overline{\Psi^{[5]}}\, M(X_r)\, \Psi^{[5]} = \bar{e}^+_R\, X_r\, (d_r)_R$$

$$\mathrm{Tr}\left[\, \overline{\Psi^{[10]}}\, M(X_r)\, \Psi^{[10]} \right] = (\bar{u}_b)_L\, X_r\, (u_g^c)_L - (\bar{u}_g)_L\, X_r\, (u_b^c)_L + \bar{e}^+_L\, X_r\, (d_r)_L$$





このように、Xボソンは、クォークをレプトンに変えたり、反クォークをクォークにしたりするはたらきをする。このように、SU(5)ゲージ理論では、バリオン数が保存しない。
代わりに、(B−L)という量は保存する。（ Xは $(B-L) = \frac{2}{3}$ ）

$$\left(カレント\ j_\mu = \bar{\Psi}^5 \partial_\mu \Psi^5 + \mathrm{Tr}[\bar{\Psi}^{10} \partial_\mu \Psi^{10}] \right)$$ [illegible]カレント

▼ SU(5)ゲージ理論のラグランジアン.

ゲージ変換 $U = e^{\frac{i g_5}{2}\theta_a \tilde{\lambda}_a}$ によって、

$$\Psi^{[5]} \longrightarrow \Psi'^{[5]} = U \Psi^{[5]}$$

と変換するものとする。この変換に対して不変なラグランジアンを構成する。

① $\Psi^{[5]}$ の運動項の微分を共変微分におきかえ、ゲージ場の変換性を次のように要求する。

$$\begin{cases} \bar{\Psi}^{[5]} \partial\!\!\!/ \Psi^{[5]} \Longrightarrow \bar{\Psi}^{[5]} D\!\!\!\!/ \Psi^{[5]} \\ A_\mu \to A'_\mu = U A^\mu U^{-1} + \frac{i}{g_5} U (\partial^\mu U^{-1}) \end{cases}$$

② $\Psi^{[10]}$ の運動項をつくる。$\bar{\Psi}^{[10]} D\!\!\!\!/ \Psi^{[10]}$ はスカラー量でないので、トレースをとって、$\mathrm{Tr}[\bar{\Psi}^{[10]} D\!\!\!\!/ \Psi^{[10]}]$ とする。この量がゲージ変換の下で不変であることは、次のように check できる。

check

(i) $\Psi^{[10]}$の変換性；
$$\Psi'^{[10]}_{ik} = (\Psi'^{[5]}_i \otimes \Psi'^{[5]}_k)_{反対称}$$
$$= (\Psi'^{[5]}_i \Psi'^{[5]}_k - (i \leftrightarrow k))$$
$$= U_{ij} U_{kl} (\Psi^{[5]}_j \Psi^{[5]}_l - (j \leftrightarrow l))$$
$$= U_{ij} U_{kl} \Psi^{[10]}_{jl}$$

(ii) $\partial_\mu \Psi^{[10]}$の変換性；
$$\partial_\mu \Psi'^{[10]} = \partial_\mu (U \Psi^{[10]} U^t)$$
$$= U(\partial_\mu \Psi^{[10]}) U^t + U\, i g_s (\partial_\mu \theta_a) \left[\frac{\tilde{\lambda}^a}{2} \Psi^{[10]} + \Psi^{[10]} \frac{\tilde{\lambda}_a{}^t}{2} \right] U^t$$

(iii) $\Psi^{[10]}$へのD_μの作用；
$$D_\mu \Psi^{[10]} = D_\mu (\Psi^{[5]} \otimes \Psi^{[5]})_{反対称}$$
$$= \left[\left(\partial_\mu - i g_s A^a_\mu \frac{\tilde{\lambda}_a}{2}\right) \Psi^{[5]} \right] \otimes \Psi^{[5]} \Big|_{反}$$
$$+ \Psi^{[5]} \otimes \left[\left(\partial_\mu - i g_s A^a_\mu \frac{\tilde{\lambda}_a}{2} \Psi^{[5]}\right) \right] \Big|_{反}$$
$$= (\partial_\mu \Psi^{[5]} \otimes \Psi^{[5]})_{反} + (\Psi^{[5]} \otimes \partial_\mu \Psi^{[5]})_{反}$$
$$- i g_s \left[\left(A^a_\mu \frac{\tilde{\lambda}_a}{2} \Psi^{[5]} \otimes \Psi^{[5]}\right)_{反} + \left(\Psi^{[5]} \otimes A^a_\mu \frac{\tilde{\lambda}_a}{2} \Psi^{[5]}\right)_{反} \right]$$
$$= \partial_\mu \Psi^{[10]} - i g_s \left\{ A^a_\mu \frac{\tilde{\lambda}_a}{2} \Psi^{[10]} + \Psi^{[10]} A^a_\mu \frac{\tilde{\lambda}_a{}^t}{2} \right\}$$

(iv) $D_\mu \Psi^{[10]}$の変換性；
$$D_\mu \Psi'^{[10]} = \partial_\mu \Psi'^{[10]} - i g_s \left\{ A'^a_\mu \frac{\tilde{\lambda}_a}{2} \Psi'^{[10]} + \Psi'^{[10]} A'^a_\mu \frac{\tilde{\lambda}_a{}^t}{2} \right\}$$
$$= U(\partial_\mu \Psi^{[10]}) U^t + U i g_s (\partial_\mu \theta_a) \left[\frac{\tilde{\lambda}_a}{2} \Psi^{[10]} + \Psi^{[10]} \frac{\tilde{\lambda}_a{}^t}{2} \right] U^t$$
$$- i g_s \left\{ U \left(A^a_\mu \frac{\tilde{\lambda}_a}{2} + \frac{i}{g_s} \cdot \frac{-i g_s}{2} \partial_\mu \theta_a \tilde{\lambda}_a \right) U^{-1} \cdot U \Psi^{[10]} U^t \right.$$
$$\left. + U \Psi^{[10]} U^t\, U^{-1t} \left(A^a_\mu \frac{\tilde{\lambda}_a{}^t}{2} + \frac{i}{g_s} \frac{-i g_s}{2} \partial_\mu \theta_a \tilde{\lambda}_a{}^t \right) U^t \right\}$$

$\partial_\mu \theta^a$を含む項がキャンセルする。

$$= U \left[\partial_\mu \Psi^{[10]} - i g_s \left(A^a_\mu \frac{\tilde{\lambda}_a}{2} \Psi^{[10]} + \Psi^{[10]} A^a_\mu \frac{\tilde{\lambda}_a{}^t}{2} \right) \right] U^t$$
$$= U D_\mu \Psi^{[10]} U^t$$

従って、 $\mathrm{Tr}[\bar{\Psi}^{[10]} \not{D} \Psi^{[10]}]$ は不変量である。 //

ラグランジアンは、次のようになる。

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}[\bar{\Psi}^{[10]} \not{D} \Psi^{[10]}] + \bar{\Psi}^{[5]} \not{D} \Psi^{[5]}$$