

② SUPPLEMENT 9.11 Anomaly Free

ゲージ理論の繰り込みをする時の正規化の方法 (次元正規化, Pauli-Villars の方法) は、ゲージ対称性を破るものを選ばなければならぬ。土居は、Slavnov-Taylor identity (QED の Ward-Takahashi identity の一般化) が使える。繰り込み可能性を証明できる。

Fig. 9.7, 9.8 の三角 diagram や、高次の diagram はゲージ対称性を破る (∵ $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ に比例する) ことを 量子異常 (anomaly) とし、以下ではこれをみる。

Fig. 9.8 の 2 つの diagram に対する振幅 (のループ部分) は

$$T_{\mu\nu\lambda}^{abc} = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \hat{\lambda}^c \gamma_\lambda \frac{i}{\not{p} - m} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \hat{\lambda}^a \gamma_\mu \gamma_5 \right] + \left(\begin{matrix} k_1 \leftrightarrow k_2 \\ \nu \leftrightarrow \lambda \\ b \leftrightarrow c \end{matrix} \right) \right\} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{8} \text{Tr} (\hat{\lambda}^a \hat{\lambda}^c \hat{\lambda}^b) \left(-i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_\lambda \frac{i}{\not{p} - m} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right] \right) + \frac{1}{8} \text{Tr} (\hat{\lambda}^a \hat{\lambda}^b \hat{\lambda}^c) \left(\begin{matrix} k_1 \leftrightarrow k_2 \\ \nu \leftrightarrow \lambda \end{matrix} \right) \quad (4)$$

(A) (B)

(B) $\hat{\lambda}$ と γ_5 は作用する空間が存在

$m \rightarrow 0$ の極限で (A) = (B) である事がわかる。(5), (6) 更に propagator の fermion に γ_5 を加えて

$$T_{\mu\nu\lambda}^{abc} = \frac{1}{8} D^{abc} \left(-i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{p} - \not{k}_2} \gamma_\lambda \frac{i}{\not{p}} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} + \not{k}_1} \gamma_\mu \gamma_5 \right] \right), \quad D^{abc} = \sum_{\text{fermion}} \text{Tr} [\hat{\lambda}^a \{ \hat{\lambda}^b, \hat{\lambda}^c \}_+] \quad (7), (8)$$

積の部分には次の関係を用いる。この diagram の奇数項は消えるため、 $D^{abc} = 0$ となり

$$\sum_f \text{Tr} [\hat{\lambda}^a \{ \hat{\lambda}^b, \hat{\lambda}^c \}_+] = 0 \quad (9)$$

が成立 (2次元では)。 (9) は anomaly free, anomaly cancel の式とわかる。

③ EXERCISE 9.12 GSW は anomaly free であるか? - Yes.

GSW ... $\hat{\lambda}^i = \sigma_i \quad (i=1, 2, 3)$ と (2. (9) が成立するから) $\hat{\lambda}^4 = \hat{Y} = 2(\hat{Q} - \hat{T}_3)$

全ての a, b, c は (9) に代入して、left-handed (lh) と right-handed (rh) のフェルミオンについて、 γ_5 の符号が異なる事に注意。

全ての a, b, c について (9) が成立 \Rightarrow GSW は anomaly free な理論である。

§ 9.6 Proton Decay

Sect. 9.3 の最後で議論したように、leptoquark (X or Y) の交換はバリオン数の保存則を破り、それによつて proton が meson や lepton に崩壊する事が許される。
 (もしも proton decay が観測され、その寿命が理論と良く一致すれば、SU(5) の GUT が正しい事の証明となる)

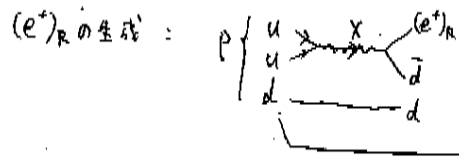
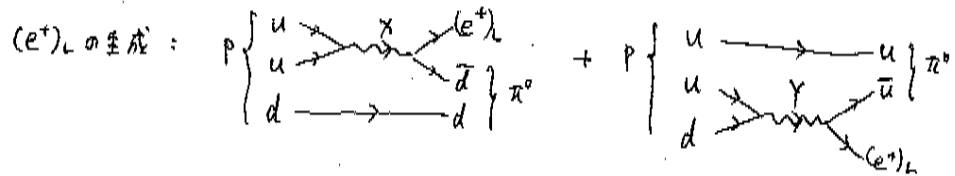
proton-decay の uc 道の channel を以下に示す。

$$p \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d\bar{d}e^+ \\ u\bar{u}e^+ \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi^0 e^+ \\ \rho^0 e^+ \\ \omega e^+ \\ \gamma e^+ \end{array} \right\} \quad \dots (9.104 a)$$

$$p \rightarrow u\bar{d}\bar{u} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi^+\bar{\nu}_e \\ \rho^+\bar{\nu}_e \end{array} \right\} \quad \dots (9.104 b)$$

==> は、最も崩壊分枝比の大きい $p \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d\bar{d}e^+ \\ u\bar{u}e^+ \end{array} \right\} \rightarrow \pi^0 e^+$ の process を考える。

Diagram を書くと、



~~非相対論的~~の Walecka model を用いる

- proton や meson (π^0) 中での γ の運動状態の形は未知である。
- π^0 (MIT bag model, 非相対論的 σ モデル など) に与えられる。
- ==> は非相対論的 γ の π^0 での proton decay を評価する。

つまり、 u_L の e^+ と d_L の d^c の対生成 :

$$\begin{array}{c} u_L \\ u_L \\ d_L \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} X \\ X \\ X \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} e_L^+ \\ \bar{d}^c \\ d_R^c \end{array} \quad \dots (9.110)$$

を考える。

X boson の質量は W や Z の質量 よりもかなり大きい ($M_{X,Y} \sim 10^{15} \text{ GeV}$ (9.99), $M_{Z,W} \sim 10^2 \text{ GeV}$) ので、

X boson の交換は Fermi 理論と同じように、(点での相互作用とみなせる。 X boson の propagator は

$$\frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_X^2}}{k^2 - M_X^2} \rightarrow -\frac{g_{\mu\nu}}{M_X^2} \quad \dots (9.111) \quad \text{と近似的。}$$

Exercise 9.13 §7. 4-fermion process の振幅を計算する

$$\hat{H}_I = \frac{g_s^2}{M_X^2} \text{Exp}_R \hat{U}_Y \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \hat{U}_p \hat{e}^c \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} d_\alpha \quad \dots (9.112)$$

簡単のため、 $\cos\theta_c \sim 1$ とする。
 \hat{u}, \hat{d} は u, d クォークの場の演算子 $\hat{\psi}$ を表し、 \hat{e}^c は e^+ の場の演算子である。
 添字 α, β, γ は クォーク の カラー を表し、 Exp_R には 色 2 組 に入 る。

(9.112) と (9.113) を用いて (Exercise 9.13), (9.110) に 対応 する 行列 要素 は

$$\frac{g_s^2}{M_X^2} \text{Exp}_R \left[\bar{v}_{\bar{u}\gamma} \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) U_{up} \right] \left[\bar{U}_{\bar{e}} \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) v_{d\alpha} \right] \quad \dots (9.114a)$$

と なる。(9.114a) を Fierz 変換 (Exercise 2.12) すると

$$\frac{g_s^2}{M_X^2} \text{Exp}_R \left[\bar{U}_{\bar{e}} \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) U_{up} \right] \left[\bar{v}_{\bar{u}\gamma} \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) v_{d\alpha} \right] \quad \dots (9.114b)$$

$\approx \approx$

$$\bar{v}_{\bar{u}\gamma} \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) v_{d\alpha} = \left[\bar{v}_{\bar{u}\gamma} \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) v_{d\alpha} \right] \leftarrow \text{Fierz}$$

$$= \bar{v}_{d\alpha} \gamma^\mu \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \bar{v}_{\bar{u}\gamma} \quad \dots (9.115)$$

Dirac 表示 を 用 いた は

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\gamma}^\mu &= i\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad \dots (9.116) \\ \tilde{\gamma}_c &= i\gamma^2 \gamma^* \Rightarrow U_{\tilde{p}(p,s)} = i\gamma^2 \tilde{v}_{\tilde{p}(p,s)}^\dagger \quad \dots (9.117) \end{aligned} \right.$$

$$\bar{v}_{\bar{u}\gamma} \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) v_{d\alpha} = \bar{U}_{\bar{d}\alpha} \gamma^\mu \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) U_{u\gamma} \quad \dots (9.118)$$

よって (9.114) は 結局

$$\frac{g_s^2}{M_X^2} \text{Exp}_R \left[\bar{U}_{\bar{d}\alpha} \gamma^\mu \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) U_{u\gamma} \right] \left[\bar{U}_{\bar{e}} \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) U_{up} \right] \quad \dots (9.114c)$$

• 非相対論的 クォーク の χ^0/χ_L は

$$U_{\tilde{p}} = \begin{pmatrix} \chi_{\tilde{p}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots (9.119) \quad \left(\chi_{\tilde{p}}(s_1=+1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi_{\tilde{p}}(s_1=-1/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

• e^+ の 相対論的 粒 子 $\chi_{\tilde{e}}^{\pm}$ ($m \rightarrow 0$)

$$(U_{\tilde{e}})_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_{\tilde{e},L} \\ -\chi_{\tilde{e},L} \end{pmatrix}, \quad \chi_{\tilde{e},L} = \left(1 - \frac{v^2}{p} \right) \chi_{\tilde{e}} \quad \dots (9.120)$$

⊙ EXERCISE 9.13 The Interaction Hamiltonian for Proton Decay.

④

問 = (9.112) と (9.114a) を示せ.

解 = (9.112) の証明

(9.52) より, X_{ν} leptoquark の交換の相互作用の一部は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{int} = & \left[(\bar{u}_b)_L (U_g^c)_L - (\bar{u}_g)_L (U_b^c)_L + (\bar{e}^+)_L (d_r)_L \right] X_{\nu} \\ & + \left[(\bar{u}_g^c)_L (U_b)_L - (\bar{u}_b^c)_L (U_g)_L + (\bar{d}_b)_L (e^+)_L \right] X_{\nu}^* \quad \dots (2) \end{aligned}$$

(2) の中は $\underbrace{(\bar{e}^+)_L (d_r)_L X_{\nu}}_{\substack{\text{2つの } u \text{ が } \gamma \text{ を消滅させ、} \\ \text{Xボソンを生成}}}$... (9)

$\underbrace{(\bar{u}_b^c)_L (U_g)_L X_{\nu}^*}_{\substack{\text{Xボソンを消滅させ、} \\ \text{e}^+ \text{ と } \bar{d} \text{ を生成}}}$... (9)

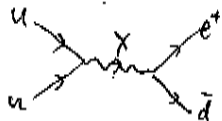
(9) をもう少し正確に書くと,

$$(\bar{e}^+)_L \gamma^{\mu} (d_r)_L X_{\nu\mu} - (\bar{u}_b^c)_L \gamma^{\mu} (U_g)_L X_{\nu\mu}^* \quad \dots (8) \quad \left(\odot \mathcal{L} = \text{Tr} \left[\bar{\psi}^{(L,R)} \not{\partial} \psi^{(L,R)} \right] \right)$$

lh, rh の結果は (9) より記述できず, (8) は次の形に書き直せる.

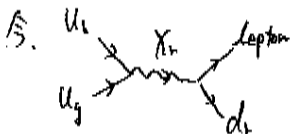
$$\left[\bar{e}^+ \gamma^{\mu} \frac{1-\gamma_5}{2} d_r \right] X_{\nu\mu} - \left[\bar{u}_b^c \gamma^{\mu} \frac{1-\gamma_5}{2} U_g \right] X_{\nu\mu}^* \quad \dots (10)$$

$\gamma^{\mu} A_{\mu}$ の形
q, x, y, w, z



この表に示す反応に $u u \rightarrow X \rightarrow e^+ \bar{d}$ に対する最低次の 11 次元 τ 2-粒子相互作用の形を与える.

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = & -g_s^2 \left[\bar{u}_b^c \gamma^{\mu} \frac{1-\gamma_5}{2} U_g \right] \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{M_X^2}}{k^2 - M_X^2} \left[\bar{e}^+ \gamma^{\nu} \frac{1-\gamma_5}{2} d_r \right] \\ \rightarrow & \frac{g_s^2}{M_X^2} \left[\bar{u}_b^c \gamma^{\mu} \frac{1-\gamma_5}{2} U_g \right] \left[\bar{e}^+ \gamma_{\mu} \frac{1-\gamma_5}{2} d_r \right] \quad \dots (11) \end{aligned}$$



この反応は見た通り, カラーは色反対称性を通して消滅して何もないのである.

$$\hat{H}_{int} = \frac{g_s^2}{M_X^2} \text{Exp} \left[\bar{u}_b^c \gamma_{\mu} \frac{1-\gamma_5}{2} \hat{U}_g \right] \left[\hat{e}^+ \gamma^{\mu} \frac{1-\gamma_5}{2} \hat{d}_r \right] \quad \dots (12)$$

よって (9.112) を示すことが,

上記の 11 の上の \wedge は場の演算子である事を強調するために付け加える.

• 2次は (9.114a) を示した。

(12) の 2枚の [] は、場の演算子の中であらわさく (9.113)。

$$\begin{aligned} \hat{U}_x \dots \hat{U}_p &= \left(\bar{U}_{ux} \hat{d}_{ux}^\dagger + \bar{v}_{ux} \hat{b}_{ux} \right) \dots \left(U_{up} \hat{b}_{up} + v_{up} \hat{d}_{up}^\dagger \right) \\ &= \bar{U}_{ux} \dots U_{up} \hat{d}_{ux}^\dagger \hat{b}_{up} + \bar{U}_{ux} \dots v_{up} \hat{d}_{ux}^\dagger \hat{d}_{up}^\dagger \\ &\quad + \bar{v}_{ux} \dots U_{up} \hat{b}_{ux} \hat{b}_{up} + \bar{v}_{ux} \dots v_{up} \hat{b}_{ux} \hat{d}_{up}^\dagger \end{aligned} \quad \dots (13a)$$

$$\begin{aligned} \hat{e} \dots \hat{d}_\alpha &= \left(\bar{U}_e \hat{d}_e^\dagger + \bar{v}_e \hat{b}_e \right) \dots \left(U_{d\alpha} \hat{b}_{d\alpha} + v_{d\alpha} \hat{d}_{d\alpha}^\dagger \right) \\ &= \bar{U}_e \dots U_{d\alpha} \hat{d}_e^\dagger \hat{b}_{d\alpha} + \bar{U}_e \dots v_{d\alpha} \hat{d}_e^\dagger \hat{d}_{d\alpha}^\dagger \\ &\quad + \bar{v}_e \dots U_{d\alpha} \hat{b}_e \hat{b}_{d\alpha} + \bar{v}_e \dots v_{d\alpha} \hat{b}_e \hat{d}_{d\alpha}^\dagger \end{aligned} \quad \dots (13b)$$

... は $\gamma^{\mu} \frac{1-\gamma_5}{2}$ の略記である。

今、2つの U 演算子の積消滅の意味がある。

$$\hat{b}_{ux} \hat{b}_{up} |0\rangle \dots (14a)$$

つまり、 e^+ と d^- の積消滅の意味がある。

$$\langle 0 | \hat{d}_e \hat{d}_{d\alpha} = \left(\hat{d}_e^\dagger \hat{d}_{d\alpha}^\dagger |0\rangle \right)^\dagger \dots (14b)$$

つまり、この過程の振幅は

$$\langle 0 | \hat{d}_e \hat{d}_{d\alpha} \hat{H}_{int} \hat{b}_{ux} \hat{b}_{up} |0\rangle \dots (15)$$

である。ここで $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$ とし (12) を用いて、使用した (13a) と (13b) の \dots の項を消せば、(15) は

$$\langle 0 | \hat{d}_e \hat{d}_{d\alpha} \hat{H}_{int} \hat{b}_{ux} \hat{b}_{up} |0\rangle = \frac{g_s^2}{M_X^2} E_{up} \left[\bar{v}_{ux} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} U_p \right] \left[\bar{U}_e \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} v_{d\alpha} \right] \dots (16)$$

とあり、これは (9.114a) とあり、diagram (9.110) に対応する頂点の行列要素である。

Exercise 9.13 あり

Dirac 表示 (9.121) を用いると、(9.114) は

$$\frac{g_s^2}{2\sqrt{2} M_X^2} \text{Epr} \left\{ (\chi_{da}^\dagger \chi_{ur}) (\chi_{eL}^\dagger \chi_{up}) + (\chi_{da}^\dagger \sigma \chi_{ur}) (\chi_{eL}^\dagger \sigma \chi_{up}) \right\} \quad (9.114 d)$$

となる。

・カラー自由度は 3 になる。

proton の波動関数: 3 のカラーの colour singlet になる。

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} \text{Epr} \chi_{up} \chi_{up} \chi_{d\bar{u}} \quad (9.125)$$

$\frac{1}{\sqrt{6}}$ の factor (colour factor) は、colour singlet の結合が 6 種類ある事に起因する。

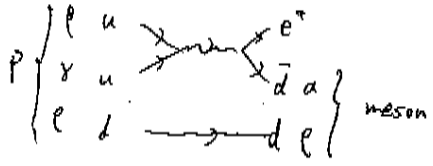
meson の波動関数: 2 のカラーの colour singlet になる。

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{ij} \chi_{da} \chi_{up} = \frac{1}{\sqrt{3}} \chi_{da} \chi_{ud} \quad (9.126)$$

よって、proton-decay の結合定数の colour factor は

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \text{Epr} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{ij} \times \text{Epr} = \sqrt{2}$$

proton
meson
meson



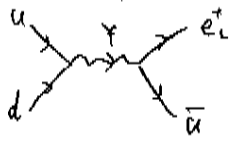
∴ colour 自由度は $\sqrt{2}$ を与えることになる。

カラー自由度を考慮すると、(9.114d) は

$$\frac{g_s^2}{2 M_X^2} \left\{ (\chi_{da}^\dagger \chi_u) (\chi_{eL}^\dagger \chi_u) + (\chi_{da}^\dagger \sigma \chi_u) (\chi_{eL}^\dagger \sigma \chi_u) \right\} \quad (9.128)$$

となる。

また、 $(e^+)_L$ の生成は



$$\dots (9.129) \quad \text{4 種類可能}$$

よって (9.110) → (9.128) の計算と同様になる。 $M_X = M_Y$ とすると

$$\frac{g_s^2}{2 M_X^2} \left\{ (\chi_{da}^\dagger \chi_d) (\chi_{eL}^\dagger \chi_u) + (\chi_{da}^\dagger \sigma \chi_d) (\chi_{eL}^\dagger \sigma \chi_u) \right\} \quad (9.130)$$

⇒ (-) 符号は X boson と Y boson の結合の仕方から異なる事に起因する。(Example 9.6)

• 次は (9.114a) を示した。

(12) の 2 行 2 列の [] は、場の演算子 ϕ の中をあたりに置く (9.113)。

$$\begin{aligned}
 \hat{U}_x^c \dots \hat{U}_p &= \left(\bar{U}_{\bar{u}x} \hat{d}_{\bar{u}x}^\dagger + \bar{v}_{\bar{u}x} \hat{b}_{\bar{u}x} \right) \dots \left(U_{up} \hat{b}_{up} + v_{up} \hat{d}_{up}^\dagger \right) \\
 &= \bar{U}_{\bar{u}x} \dots U_{up} \hat{d}_{\bar{u}x}^\dagger \hat{b}_{up} + \bar{U}_{\bar{u}x} \dots v_{up} \hat{d}_{\bar{u}x}^\dagger \hat{d}_{up}^\dagger \\
 &\quad + \bar{v}_{\bar{u}x} \dots U_{up} \hat{b}_{\bar{u}x} \hat{b}_{up} + \bar{v}_{\bar{u}x} \dots v_{up} \hat{b}_{\bar{u}x} \hat{d}_{up}^\dagger \quad \dots (13a) \\
 \hat{e}^c \dots \hat{d}_a &= \left(\bar{U}_e \hat{d}_e^\dagger + \bar{v}_e \hat{b}_e \right) \dots \left(U_{da} \hat{b}_{da} + v_{da} \hat{d}_{da}^\dagger \right) \\
 &= \bar{U}_e \dots U_{da} \hat{d}_e^\dagger \hat{b}_{da} + \bar{U}_e \dots v_{da} \hat{d}_e^\dagger \hat{d}_{da}^\dagger \\
 &\quad + \bar{v}_e \dots U_{da} \hat{b}_e \hat{b}_{da} + \bar{v}_e \dots v_{da} \hat{b}_e \hat{d}_{da}^\dagger \quad \dots (13b)
 \end{aligned}$$

... は $\gamma^{\mu \frac{1-\gamma_5}{2}}$ の略記である。

今、2 つの $U_{\bar{u}x \rightarrow up}$ の演算子の意味がある。

$$\hat{b}_{\bar{u}x}^\dagger \hat{b}_{up}^\dagger |0\rangle \quad \dots (14a)$$

つまり、 e^+ と \bar{d} の演算子に意味がある。

$$\langle 0 | \hat{d}_e \hat{d}_{\bar{d}a} = \left(\hat{d}_e^\dagger \hat{d}_{\bar{d}a}^\dagger |0\rangle \right)^\dagger \quad \dots (14b)$$

つまり、その過程の振幅は

$$\langle 0 | \hat{d}_e \hat{d}_{\bar{d}a} \hat{H}_{int} \hat{b}_{\bar{u}x}^\dagger \hat{b}_{up}^\dagger |0\rangle \quad \dots (15)$$

である。ここで $\hat{H}_{int} = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$ と (12) を用いて、使う過程 (13a) と (13b) の m の値を代入して、(15) は

$$\langle 0 | \hat{d}_e \hat{d}_{\bar{d}a} \hat{H}_{int} \hat{b}_{\bar{u}x}^\dagger \hat{b}_{up}^\dagger |0\rangle = \frac{g_s^2}{M_X^2} E_{upx} \left[\bar{v}_{\bar{u}x} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} U_{up} \right] \left[\bar{U}_e \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} v_{da} \right] \quad \dots (16)$$

となる。これは (9.114a) である。diagram (9.110) に対応する頂点の行列要素である。

Exercise 9.13 あり

Dirac 表示 \Leftrightarrow (9.121) を用いる。(9.114) は

$$\frac{g_s^2}{2\sqrt{2} M_X^2} \text{Exp} \left\{ (\bar{\chi}_{da}^\dagger \chi_{ur}) (\bar{\chi}_{eL}^\dagger \chi_{up}) + (\bar{\chi}_{da} \chi_{ur}) (\bar{\chi}_{eL}^\dagger \chi_{up}) \right\} \quad (9.114 d)$$

と存す。

• カラー保存性も考慮する。

proton の波動関数: 3つのクォークの colour singlet 状態 $\sim \epsilon_{abc}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} \text{Exp} \chi_{up} \chi_{up} \chi_{ud} \quad (9.125)$$

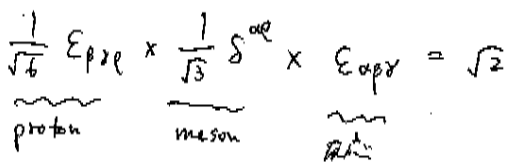
$\frac{1}{\sqrt{6}}$ の factor (colour factor) は、colour singlet の状態は 6 種類ある事に起因する。

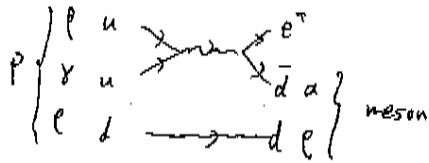
meson の波動関数: 2つのクォークの colour singlet 状態 $\sim \delta_{ab}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{ab} \chi_{da} \chi_{up} = \frac{1}{\sqrt{3}} \chi_{da} \chi_{ud} \quad (9.126)$$

よって, proton-decay の振幅係数の colour factor は

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \text{Exp} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{ab} \times \text{Exp} = \sqrt{2}$$



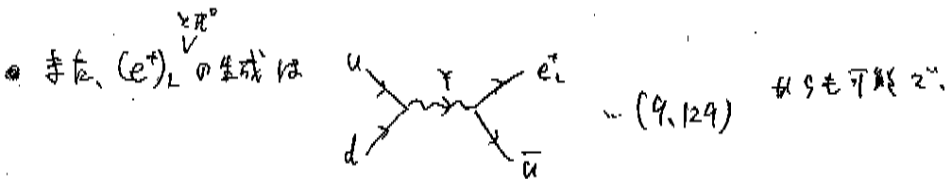


\therefore colour 保存性は $\sqrt{2}$ を与える事に注意。

カラー保存性を考慮すると、(9.114d) は

$$\frac{g_s^2}{2 M_X^2} \left\{ (\bar{\chi}_d^\dagger \chi_u) (\bar{\chi}_{eL}^\dagger \chi_u) + (\bar{\chi}_d \chi_u) (\bar{\chi}_{eL}^\dagger \chi_{up}) \right\} \quad (9.128)$$

と存す。

また、 $(e^+)_{\text{L}}$ の生成は  (9.129) としても可能。

よって (9.110) \rightarrow (9.120) の計算と同様に注意。 $M_X = M_Y$ とすると

$$\frac{g_s^2}{2 M_X^2} \left\{ (\bar{\chi}_d^\dagger \chi_u) (\bar{\chi}_{eL}^\dagger \chi_u) + (\bar{\chi}_u^\dagger \chi_d) (\bar{\chi}_{eL}^\dagger \chi_u) \right\} \quad (9.130)$$

この(-)符号は X boson と Y boson の結合の仕方による事に起因する。(Example 9.6)

• (9.128) と (9.130) の行列要素を評価するために、proton の波動関数を求める必要がある。

3つの quark が同じ S 状態にあると仮定して、2つの波動関数の空間部分は分離できる。

quark は 7_c であるから、3波動関数は反対称に組む必要がある。また、colour は反対称に組んでおくので、spin と flavour を合わせて対称に組まなければならない。

• 3つの quark の状態 $|z\rangle$ を

$$|z\rangle = C_{ijk} |i, j, k\rangle = C_{ijk} \hat{a}_{(i)}^\dagger \hat{a}_{(j)}^\dagger \hat{a}_{(k)}^\dagger |0\rangle \quad (9.131)$$

と、 $\hat{a}_{(i)}^\dagger$ は i 番目の spin と flavour (i) 状態の粒子の生成演算子である。

$|0\rangle$ は真空 (9.132)

C_{ijk} は 3波動関数の spin と flavour 部分である。前述したように、 C_{ijk} は添字の入れ替えに対して対称である。 (9.133)

(9.131) が 1 に normalized しておくことは重要である。

$$\Rightarrow C_{ijk}^* C_{ijk} = 1 \quad (9.134)$$

(9.134) が 1 になるのは、 n 粒子状態に対して $\frac{1}{\sqrt{n!}}$ の factor を付けなければならない。 (A)

(9.136) と 2 粒子に対して示すこと)

また、3つの quark はそれぞれ区別が付けられる (と仮定して u, d の区別はあってもいい) ので、6 をかける。 (B)

よって、(A), (B) より $\frac{1}{\sqrt{6}} \times 6 = \sqrt{6}$ (9.137) の factor を付けなければならない。

よって、(9.110) と (9.129) の process に対する有効演算子は

$$\sqrt{6} \times \left(\frac{1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2}{2} \right) \frac{g_s^2}{M_s^2} \left[\hat{V}_1(u \rightarrow \bar{e}_1) \hat{V}_2(u \rightarrow d) + \hat{V}_1(u \rightarrow \bar{e}_1) \hat{V}_2(d \rightarrow u) \right] \quad (9.138)$$

と与えられる。 σ : spin 演算子, $\hat{V}_1(u \rightarrow \bar{e}_1)$ は粒子 1 が u になっているか、粒子 1 が u になっているが粒子 2 が u の e^+ に変化している演算子。

• (9.138) の proton の波動関数の spin-flavour 部分: $\frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \phi' + \chi'' \phi'')$ (9.139)

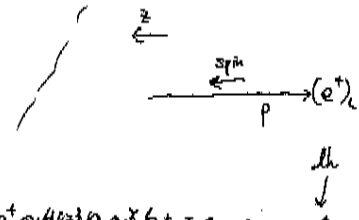
$$\pi^0 \text{ の 3波動関数の spin-flavour 部分: } \chi_f^\dagger \phi_f^\dagger$$

これは式 1 を参照する。

ϕ', ϕ'' は (9.140), χ', χ'' は ϕ', ϕ'' と $u \rightarrow \uparrow, d \rightarrow \downarrow$ としたとき (spin の量子化軸は e^+ の運動量の方向と一致し $\leftarrow e^+$ の $s_z = +\frac{1}{2}$)

χ_f は (9.144), ϕ_f は (9.146)

と与えられる。



$\omega_1 \cdot \omega_2$ は $\omega_1 \omega_2$ は, (9.142), (9.143) より $\omega_1 \cdot \omega_2 \pi' = -3\pi'$, $\omega_1 \cdot \omega_2 \pi'' = \pi''$

以上より 行列要素は

$$\sqrt{6} \times \left[\frac{1-3}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1+1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] \times \frac{g_5^2}{\sqrt{2} M_X^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{3} g_5^2}{2 M_X^2} \quad (9.144)$$

反応率は (9.144) の二乗に比例する。

• 始状態の proton の $2E \gg m$ 平均を取らなければならぬ。

$2E \gg m \rightarrow 2E \gg m$ は 角運動量の保存を破るの2. * proton の $2E \gg m$ の寄与は 0, proton $2E \gg m$ e^+

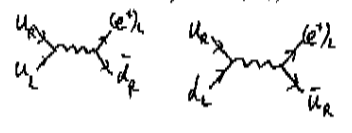
よって 平均をとると factor $1/2$ あり。

② 今更 $proton \rightarrow \pi^0 + e^+$ の崩壊のうち, $(e^+)_L$ の生成を考えた。

$(e^+)_R$ の生成も考えた。

10表現
↓

$(e^+)_L$ の生成は (9.140), (9.129) の diagram の寄与にあたる。(\bar{e}_L, d_L, u_L が全て同じ SU(5) 多重項に入っている)



他方, $(e^+)_R$ の生成は \bar{e}_R と d_R は同じ多重項に入っているが, \bar{e}_R と u_R は $\lambda=2$ の異なる。(Example 9.4, 9.6)

よって 寄与する diagram は $(u_L, d_L) \rightarrow X \rightarrow (e^+_R, d_L)$ のみである。 $(u_L, d_R) \rightarrow Y \rightarrow (u_R, e^+_R)$ が存在する。

その振幅は (9.144) の $1/2$ とする。

• 5-2. e^+ の生成の反応率は

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \right) \times \frac{3 g_5^4}{4 M_X^4} = \frac{15 g_5^4}{32 M_X^4} \quad (9.151) \quad (1) \text{に比例する}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{p の } 2E \gg m \text{ の平均} \\ \text{e}^+ \text{ の生成} \end{array} \right\} \text{e}^+ \text{ の生成}$



• (9.128) と (9.130) の行列要素を評価するために、proton の波動関数を求める必要がある。

3つの quark が同じ状態にあると仮定し、2人よりの波動関数の空間部分は分離できる。

quark はフェルミオンなので、波動関数は反対称に組む必要がある。また、colour は反対称に組んでおくので、spin と flavour を合わせて対称に組む必要がある。

• 3つの quark の状態 $|Z\rangle$ は

$$|Z\rangle = C_{ijk} |i, j, k\rangle = C_{ijk} \hat{a}_{u_i}^\dagger \hat{a}_{d_j}^\dagger \hat{a}_{k_l}^\dagger |0\rangle \quad (9.131)$$

と、 $\hat{a}_{i(q)}^\dagger$ は i 番目の spin と flavour を持つ quark の生成演算子である。
 $|0\rangle$ は真空 (9.132)

C_{ijk} は波動関数の spin と flavour 部分である。前述したように、 C_{ijk} は添字の入れ替えに対して対称である。(9.133)

(9.131) が 1 に normalize しておく必要がある。

$$\Rightarrow C_{ijk}^* C_{ijk} = 1 \quad (9.134)$$

(9.134) が満たされるように n 粒子状態に対して $\frac{1}{\sqrt{n!}}$ の factor をかけなければならない。(A)

(9.136) を 2 粒子に対して示す。

また、3つの quark はそれぞれ区別が付けられる (2人か 1人か 0人か) ので、b をかける。(B)

よって (A), (B) より $\frac{1}{\sqrt{6}} \times 6 = \sqrt{6} \quad (9.137)$ の factor をかけなければならない。

よって、(9.110) と (9.129) の process に対する有効遷移演算子は

$$\sqrt{6} \times \left(\frac{1 + \gamma_5 \gamma_0}{2} \right) \frac{g_s^2}{M_x^2} \left[\hat{V}_1(u \rightarrow \bar{c}) \hat{V}_2(u \rightarrow d) + \hat{V}_1(u \rightarrow \bar{c}) \hat{V}_2(d \rightarrow u) \right] \quad (9.138)$$

と与えられる。④: spin 演算子, $\hat{V}_1(u \rightarrow \bar{c})$ は quark 1 が u になるか 0 になるか、quark 2 が u になるか 0 になるか、quark 3 が u になるか 0 になるかを示す演算子。

• (9.138) の proton の波動関数の spin-flavour 部分: $\frac{1}{\sqrt{2}} (\chi^+ \phi^+ + \chi^0 \phi^0) \quad (9.139)$

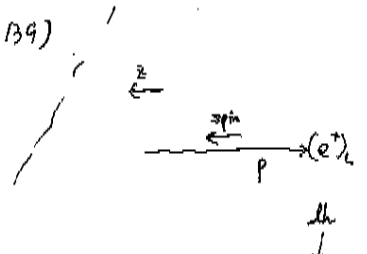
$$\pi^0 \text{ の spin-flavour 部分} = \chi_+^\dagger \phi_+^\dagger$$

と与えられる。

ϕ^+, ϕ^0 は (9.140), χ^+, χ^0 は ϕ^+, ϕ^0 と $u \rightarrow \uparrow, d \rightarrow \downarrow$ としたとき (spin の量子化軸は e^+ の進行方向の逆方向に選ぶと e^+ の $S_z = +\frac{1}{2}$)

$$\chi_+ \text{ は (9.144), } \phi_+ \text{ は (9.146)}$$

と与えられる。



$\sigma_1 \cdot \sigma_2$ は $(9.142), (9.143)$ より $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \chi' = -3\chi', \sigma_1 \cdot \sigma_2 \chi'' = \chi''$

以上より 行列要素は

$$\sqrt{5} \times \left[\frac{1-3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1+1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] \times \frac{g^2}{\sqrt{2} M_x^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{5} g^2}{2 M_x^2} \quad (9.144)$$

反応率は (9.144) の二乗に比例する。

始状態の proton の ΣE^0 に π^0 平均を取ると $\frac{1}{2}$ になる。

$\Sigma E^0 - \frac{1}{2} \rightarrow \Sigma E^0 + \frac{1}{2}$ は 角運動量の保存を破るの2. \bullet proton の ΣE^0 の奇点は 0.
 proton $\frac{1}{2} e^+$

よって 平均をとると factor $\frac{1}{2}$ がつく。

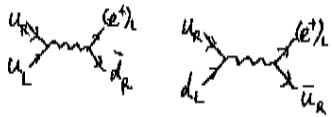
よって proton $\rightarrow \pi^0 + e^+$ の崩壊のうち, $(e^+)_L$ の生成を考えた。

$(e^+)_R$ の生成も考えた。

10表現



$(e^+)_L$ の生成は (9.100), (9.129) の diagram の奇点がある。(\bar{e}_L, d_L, u_L が全て同じ SU(5) 多重項に入っている)



他方, $(e^+)_R$ の生成については, \bar{e}_R と d_R は同じ多重項に入っているが, \bar{e}_R と u_R は $\lambda=2$ である。(Example 9.4, 9.6)



よって 奇点がある diagram は $(u_L, u_L \rightarrow X \rightarrow e^+, d_L)$ のみである。 $(u_L, d_L \rightarrow Y \rightarrow \bar{u}_L, e^+)$ は存在しない。

その振幅は (9.144) のように $\frac{1}{2}$ となる。

よって, e^+ の生成の反応率は

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{3 g^4}{4 M_x^4} = \frac{15 g^4}{32 M_x^4} \quad (9.151) \quad (\text{に比例する})$$

\uparrow p の ΣE^0 の平均
 \uparrow $(e^+)_R$ の生成 $(\frac{1}{2})^2$
 \uparrow $(e^+)_L$ の生成



• 更に, proton の崩壊関数の空間部分は 2 重に考慮しなければならない。

今, ほぼ 1 重の相互作用を考慮している。反応率は 2 つのクォークが同じ位置に存在する確率に比例する。

2 の仮定の下では, 行列要素の空間部分は

$$\int d^3r_1 d^3r_2 \psi^*(r_1) \psi^*(r_2) S^3(r_1-r_2) \psi(r_1) \psi(r_2) \dots (9.152)$$

である。 $\psi(r)$ は 3 波動関数の空間部分であり, 今の仮定の下では 3 つ全てのクォークに対して同じ関数形である。

しかし, (9.152) の値を正確に評価せず, $2 \times 10^{-3} \text{ GeV}^3 \sim 0.25 \text{ fm}^3$ と仮定する。

これは, $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \Lambda \times \Omega \text{ の崩壊比の計算結果} \text{ の値が示唆する値} \\ \cdot \text{ bag model の計算結果とよく一致する} \end{array} \right\}$ と考え, 正当化される。

• また, 反応率の最終的な形を得るために,

$$\int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - k_2) \dots (9.153)$$

に對し, proton の 4 元運動量 p を $p = (M_p, 0, 0, 0)$ (静止系) とすると, $\left(\frac{M_p}{M_p}\right)^2 \sim 0.02$ である。

$$(9.153) = 0.122 \cdot \frac{M_p^2}{\pi} \dots (9.154)$$

• Fig. 9.9 に示す通り, gluon の radiative correction の効果は全無ではない。

これはより反応率は増え, factor として

$$\left. \begin{array}{l} 12.5 \text{ 倍 for } p \rightarrow \pi^0 + \bar{e}_L \\ 11 \text{ 倍 for } p \rightarrow \pi^0 + \bar{e}_R \end{array} \right\} (9.160)$$

に於て, $p \rightarrow \pi^0 + \bar{e}_L$ の反応率は $p \rightarrow \pi^0 + \bar{e}_R$ の 9 倍ある。結局

$$\frac{1}{5} (4 \times 12.5 + 1 \times 11) = 12.2 \dots (9.161)$$

の factor が全体にかけられる。

② 以上より, $p \rightarrow \pi^0 + e^+$ の反応率は $1.3 \times 10^{-4} M^{-4} \text{ GeV}^5$ と推定される。

この process は proton-decay の全反応率の 37% の寄与をする。

他の可能な process の崩壊分岐比は Table 9.2 にある。

もちろん, この値はモデルに依存するが, MIT-bag-model での計算とほぼ一致する。

• 全反応率が, proton の寿命を計算する。

$$\tau_p \sim 6 \times 10^{27} \left(\frac{M_x}{10^{16} \text{ GeV}} \right)^4 \text{ years} \dots (9.162)$$

2-loop の計算から, $M_x = (6 \pm 3) \times 10^{16} \text{ GeV}$ である。 $\tau_p \sim 4 \times 10^{31} \text{ years}$ ← 実験値と符合する (この値は小さすぎる)

↑
 M_x が小さすぎる

§ 9.7 展望：標準模型の拡張

§ 9.5 2)は Fig. 9.3 (p.357) の g^2 の g^2 一致し、これは GUT の g^2 スケールである。
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (9.164)

しかし、この g^2 の実験データを用いて計算すると、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は 1点で交わるように見えない。(Fig. 9.10)
 $SU(5)$ の

Fig. 9.10 の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の g^2 依存性を見比べると、急激に変わるように見える。

これは変化を伴うから、1点で交わるように見えない。むしろ $M_{GUT} \sim M_X$ が大きくなり、proton の寿命が増えるからである。
 交点の g^2 の値は shift する

(9.84) $\frac{1}{\alpha_i(g^2)} = \frac{1}{\alpha_i(M^2)} + b_i \ln \frac{g^2}{M^2}$ の b_i が小さければ、 g^2 依存性はゆるやかに変わる。

$b_i = \frac{11n - 4N_g}{12\pi}$ ($n = SU(n)$ の次元, $N_g = \text{fermion の数}$)。従って、 N_g が大きければよい。

$n=2, 3$ の種類は実験結果 (Example 5.3) から N_g が大きくなるのは使えない。

§ 9.2 Supersymmetry (SUSY)

標準模型の全 2 の素粒子 (フェルミオンとヒッグスボソン) に対し、同じ質量を持つ粒子が存在する。
 全 2 の素粒子 (レプトンとクォーク) に対し、同じ質量を持つ粒子が存在する。

Table 9.3 に標準模型の素粒子の SUSY partner が示されている。

SUSY partner はスピン以外に同じ量子数を持つ。

(9.64) に loop correction と h^2 ヒッグスボソンの質量も取り入れた $b_i = (9.165)$ ($N_H = \text{Higgs doublet の数}$)

SUSY も取り入れた $\bar{b}_i = (9.166)$

b_i も \bar{b}_i の値が小さい (ゆるやか)

SUSY partner の質量が $1 \text{ TeV} \approx 10^3 \text{ GeV}$ のオーダーであると仮定すると、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は 1点で交わる!! (Fig. 9.11)

$\Rightarrow g^2 = (10^{16} \text{ GeV})^2$: 前より 1桁大きくなる (望ましい)

標準模型の素粒子、フェルミオン X, Y , h^2 ヒッグスボソン、全 2 の SUSY partner を含む $SU(5)$ GUT を考える。

$M_X \sim 3 \times 10^{15} \text{ GeV}$ とする。これを用いて proton の寿命を計算すると、

$\tau_p \sim 10^{32.2 \pm 1.2} \text{ years}$ (9.169) : SUSY を含む $SU(5)$ の proton lifetime

これは実験の下限を超える (正しい可能性はある)

たとえ 3 が間違っているとしても、concept は間違っていないはずである。

↑
 "minimal" $SU(5)$

何れにしても Higgs 粒子 ($M_H \leq 1 \text{ TeV}$) の存在を仮定して話を進めよう。

しかし実験で Higgs 粒子の存在を確定しなすけは存しない。