2-3 -1. Nonrelastivistic vs Relativistic Spectrum

水素様原子のE-スペクトルに似ている。→ $Z=1,\ m=\frac{m_e}{2}$ で e^+e^- に応用:

Sch.eq と Dirac.eq の差について

◎ Schrödinger equation でのエネルギースペクトル

$$\left[-\frac{\Delta}{2m}-\frac{Ze^2}{4\pi r}-\varepsilon_{n,l}\right]\psi_{n,l}(\mathbf{r})=0 \quad \left[e^+e^-\text{の場合},\ Z=1,\ m=\frac{m_e}{2}\right]$$

ポジトロニウムの換算質量

$$-\Delta=-\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\hat{L}^2}{r^2},\quad \boxed{\hat{L}^2=l(l+1)},\quad \boxed{\varepsilon_{n,l}=-\frac{m(Z\alpha)^2}{2n^2}} \quad \left[\frac{m_e\alpha^2}{2}=13.6/2\,eV\right]$$

$= 6.8\,eV$ ポジトロニウムの束縛エネルギー

◎ Klein-Gordon equation でのエネルギースペクトル ← スピンを無視しているが、実際はスピンの効果が重要。

実は実験値とあんまり合わないから参考程度

$$\left[\left(E+\frac{Z\alpha}{r}\right)^2+\Delta-m^2\right]\phi=0$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\hat{L}^2-Z^2\alpha^2}{r^2}-\frac{2Z\alpha E}{r}-(E^2-m^2)\right]\phi=0 \quad \left[e^+e^-\text{の場合},\ Z=1,\ m=\frac{m_e}{2}\right]$$

Schrödinger eq. を以下のように置き換えたもの。

$$\hat{L}^2\to\hat{L}^2-Z^2\alpha^2\equiv\lambda(\lambda+1)\ \to\ l-\lambda=\delta_l\simeq\frac{Z^2\alpha^2}{2l+1}+O(\alpha^4)$$

$$\alpha\to\alpha\frac{E}{m} \qquad \to\ \boxed{\lambda=l-\delta_l=l-\frac{Z^2\alpha^2}{2l+1}}$$

ズレはとても小さい。

$$\varepsilon\to\frac{E^2-m^2}{2m}\ \to\ \frac{E^2-m^2}{2m}=-\frac{mZ^2\alpha^2}{2}\frac{E_{nl}^2}{m^2}\frac{1}{(n-\delta_l)^2}$$

$\left[e^+e^-\text{の場合},\ Z=1,\ m=\frac{m_e}{2}\right]$

$$\to\ \boxed{E_{nl}=m-\frac{mZ^2\alpha^2}{2n^2}-\frac{mZ^4\alpha^4}{n^3(2l+1)}+\frac{3}{8}\frac{mZ^4\alpha^4}{n^4}+O(\alpha^6)}$$

ズレは小さい。

◎ Dirac equation でのエネルギースペクトル

◎ カイラル表示を使う

?

まず、Klein-Gordon eq. に、$\frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\pm ie\,\sigma\cdot\mathbf{E}=\mp iZ\alpha\frac{\sigma\cdot\hat{r}}{r^2}$ (spin term) を足す。

スピンの向き

$$\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\Big(\hat{L}^2-Z^2\alpha^2\underbrace{\mp iZ\alpha\,\sigma\cdot\hat{r}}_{\text{ここが変わってる。}}\Big)\frac{1}{r^2}-\frac{2Z\alpha E}{r}-(E^2-m^2)\right]\psi_\pm=0$$

$\hat{J}=\hat{L}+\hat{S}=\hat{L}+\frac{\hat{\sigma}}{2}$ が、$\hat{J}^2=j(j+1)$, ($j_z=m$, $-j\le m\le j$, $\hat{L}^2=l(l+1)$) の固有値を持つ部分空間を考える。この部分空間で、$\hat{L}^2-Z^2\alpha^2\mp iZ\alpha\,\sigma\cdot\hat{r}$ は以下の固有値を持つ。

$$\hat{L}^2-Z^2\alpha^2\mp iZ\alpha\,\sigma\cdot\hat{r}=\begin{pmatrix}(j+\frac{1}{2})(j+\frac{3}{2})-Z^2\alpha^2 & \mp iZ\alpha\\ \mp iZ\alpha & (j-\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2})-Z^2\alpha^2\end{pmatrix}$$

新 方位角量子数

$$\boxed{\lambda=\Big(j\pm\frac{1}{2}\Big)-\underbrace{\delta_j}_{\text{ズレ}}},\quad \delta_j=\frac{Z^2\alpha^2}{2j+1}+O((Z\alpha)^4)$$

ズレは小さい。α^2 のファクター

$$\boxed{E_{nj}=m-\frac{mZ^2\alpha^2}{2n^2}-\frac{mZ^4\alpha^4}{n^3(2j+1)}+\frac{3}{8}\frac{mZ^4\alpha^4}{n^4}+O(\alpha^6)} \quad \left[e^+e^-\text{の場合},\ Z=1,\ m=\frac{m_e}{2}\right]$$

ズレは小さい。(α^4 のファクター)

注 $Z\geq137$ で $\delta_{\frac{1}{2}}$ が虚数になる。(ブマイン マ=64)

Figure 2-2 に エネルギースペクトルが示されている。[Schrödinger eq. とくらべて，いくつかの新定数がでている。]

$$E(2P_{\frac{3}{2}}) - E(2P_{\frac{1}{2}}) \simeq \frac{m\alpha^4}{32} = 4.53 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV} \qquad [e^+\text{–}e^- \text{の場合}, \ \frac{4.53}{2} \times 10^{-5}\,\mathrm{eV}]$$

(*) (この結果は，L-S 力を加えた Schrödinger eq. の摂動部と一致する)

$Z_c \sim 137$ (を～137 で．真空偏極 電荷への影響)

(ファインマン図の話) でいくつかの定数が 変数になる。

次に，このエネルギー固有値に対応する固有関数を求める。

$\Psi = \begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix}$ とおいて，$\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{L}^2$ の固有関数になっているものを求める。

$$\hat{L}^2 \varphi^{(\pm)}_{j,m} = l(l+1)\varphi^{(\pm)}_{j,m}, \quad \hat{J}_z \varphi^{(\pm)}_{j,m} = m\,\varphi^{(\pm)}_{j,m}, \quad \hat{J}^2 \varphi^{(\pm)}_{j,m} = j(j+1)\,\varphi^{(\pm)}_{j,m}$$

$\varphi^{(\pm)}_{j,m} = \begin{pmatrix} a_{m'} & Y_l^{m'} \\ b_{m'} & Y_l^{m'} \end{pmatrix}$ とおいて，上の条件を課すと，
$$\varphi^{(+)}_{j,m} = (2l+1)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} (l+m+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} & Y_l^{m-\frac{1}{2}} \\ (l-m+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} & Y_l^{m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (j = l+\tfrac{1}{2})$$

↑ 球面調和関数

$$\varphi^{(-)}_{j,m} = (2l+1)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} (l-m+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} & Y_l^{m-\frac{1}{2}} \\ -(l+m+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} & Y_l^{m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (j = l-\tfrac{1}{2}) \ (l>0)$$

$\varphi^{(+)}_{j,m} = \vec{\sigma}\cdot\hat{r}\,\varphi^{(-)}_{j,m}$ となるように phase をとる。

次に，Ψ を求める。$E\Psi = \left(\frac{1}{i}\alpha\cdot\nabla + \beta m - \frac{Z\alpha}{r}\right)\Psi = H\Psi$ (Dirac eq.) は空間反転対称。なので，$\beta\,\psi^{(\pm)}_{j,m}(\vec{x}) = \pm\,\psi^{(\pm)}_{j,m}(\vec{x})$ のパリティ偶，奇の2つの固有状態がある。

$$\psi^l_{jm} = \begin{pmatrix} \frac{iG_{lj}(r)}{r}\varphi^l_{jm} \\ \frac{F_{lj}(r)}{r}(\vec{\sigma}\cdot\hat{r})\varphi^l_{jm} \end{pmatrix} \text{ とおく。} \quad H = \begin{pmatrix} m - \frac{Z\alpha}{r} & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & -m - \frac{Z\alpha}{r} \end{pmatrix}$$
をかけて，固有値方程式を得る。

$$\begin{cases} \left(E - m + \frac{Z\alpha}{r}\right) G_{lj}(r) = -\frac{dF_{lj}}{dr}(r) \mp \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{F_{lj}(r)}{r} \\ \left(E + m + \frac{Z\alpha}{r}\right) F_{lj}(r) = \frac{dG_{lj}}{dr}(r) \mp \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{G_{lj}(r)}{r} \end{cases} \to \text{この解法は，(2-94)}$$

@ Hyperfine structure

非相対論の式を用いる。$H_{Hf} = -\frac{e}{2m}\sigma_e\cdot\mathbb{B}$，$\mathbb{B} = \nabla\times\mathbb{A}$，$\mathbb{A} = -\frac{1}{4\pi}\mu_p \times \nabla\frac{1}{r}$

$\mu = \frac{1}{2}\int \mathbb{r}\times\mathbb{J}\,d^3x$，$\nabla^2\mathbb{A} = -\mathbb{J}$，$\mathbb{J} = -\mu\times\nabla\delta^3(x)$ を使って，

$$H_{Hf} = \frac{e}{8\pi m}\sigma_e\left(\mu_p\nabla^2 - (\mu_p\cdot\nabla)\nabla\right)\frac{1}{r} \underset{\text{解釈}}{\to} H_{hf} = -\frac{e}{3m}\sigma_e\cdot\mu_p\,\delta^3(r)$$

$$\langle H_{Hf}\rangle = \frac{e^2}{12\pi m_e m_p} g_p\,\sigma_e\cdot\sigma_p\,|\psi(0)|^2, \quad |\psi(0)|^2 = \frac{(m_e\alpha)^3}{\pi}$$

Energy Splitting ↓

$$\Delta E_{Hf} = \frac{4}{3} m_e\alpha^4 \frac{m_e}{m_p} g_p = 5.89 \times 10^{-6}\,\mathrm{eV}$$