

10章 弱い相互作用の現象論 (担当 藤林)

10.1 レプトン

スピン $\frac{1}{2}$ の素粒子で、電磁、弱相互作用をする。

	charge	mass [MeV]	spin	lifetime	
ν_e	0	$< 7.2 \text{ eV}$	$\frac{1}{2}$	$2.197 \times 10^{-6} \text{ s}$	
e^-	-1	0.5			
ν_μ	0	< 0.27			
μ^-	-1	105.7			
ν_τ	0	< 35			
τ^-	-1	1777			$2.91 \times 10^{-13} \text{ s}$

☐ e, μ, τ は質量が大きく異なるので、識別可能。

☐ 反レプトンの存在

☐ ニュートリノの質量

☐ 電子とミュオン

最も軽い2>. 電荷保存より、電子は安定

ミュオンは電子に崩壊。

* $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$ は観測されていない

$\Rightarrow \mu^-$ は e^- の励起状態ではない。

☐ タウオン

非常に重く、色々なレプトン、ハドロンへ崩壊。

* 検出について。

$$e^+ + e^- \rightarrow \tau^+ + \tau^-$$

生成しきい値は $\sqrt{s} = 2m_\tau c^2 = 3.568 \text{ GeV}$

● レプトン数の保存

- ν_e, ν_μ, ν_τ が 互いの反粒子とは異なる粒子であること。
・ ν_e と $\bar{\nu}_e$ が 同一粒子だとすると起こりはずの反応が起こらない。

□ レプトン数の保存

「いかなる反応においても、一つのファミリーに属するレプトンの数から反レプトンの数を引いた数は保存する」

$$L_l = N(l) - N(\bar{l}) + N(\nu_l) - N(\bar{\nu}_l) = \text{一定} \quad (10.1)$$

($l = e, \mu, \tau$)

$$L = L_e + L_\mu + L_\tau \quad : \text{レプトン数}$$

※この保存則が破られるような崩壊は、断面積の上限が与えられている。

10.2 弱い相互作用の種類

□ 弱い相互作用と他の相互作用の違い

- ・ 電磁, 強い相互作用は photon, グルオンが結合する粒子を変えない。
弱い相互作用は 同じファミリーに属するレプトンに、
クォークのフレーバーが変化しうる。

□ 組み換え "crossing"

$a + \bar{b} \rightarrow c + d$ が可能で、エネルギー的に許されれば、

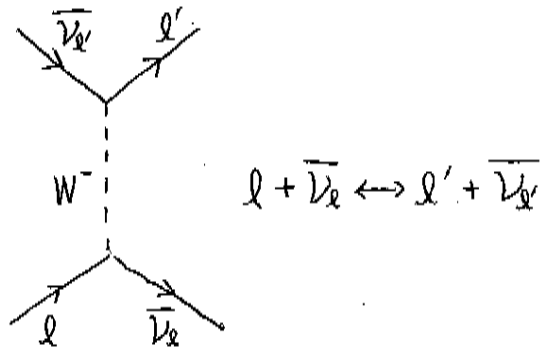
$$a \rightarrow c + d + \bar{b}$$

$a + \bar{c} \rightarrow \bar{b} + d$ etc... も可能。

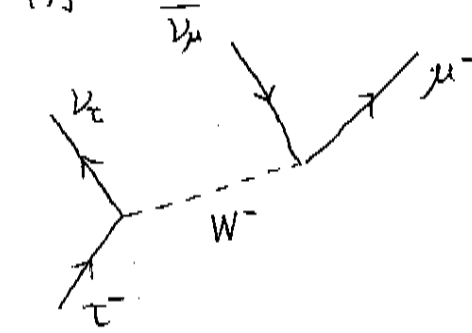
● レプトン過程

W ボソンが レプトン のみに結合.

☐ 素過程



☐ 例

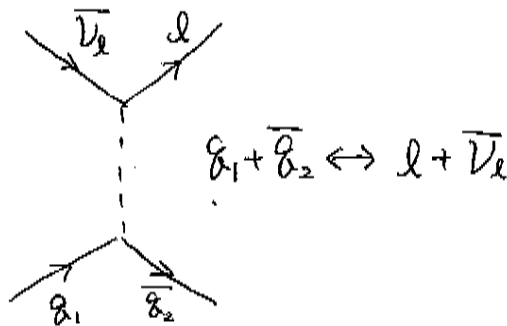


$\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$
 および、その組みかえ

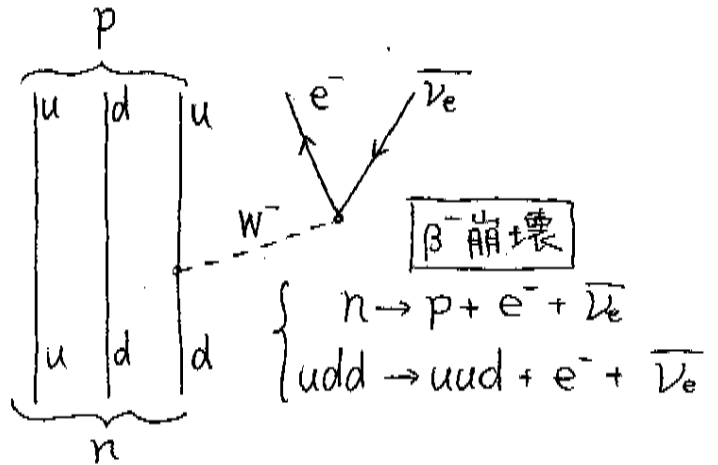
● 半レプトン過程

レプトンとクォークに結合

☐ 素過程



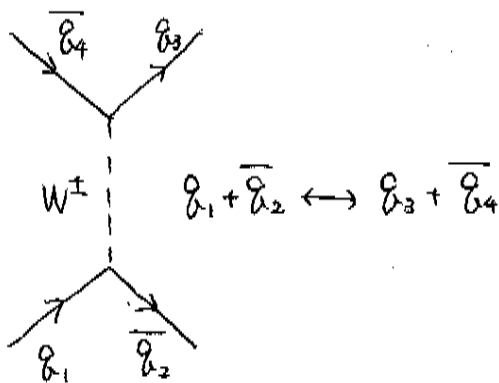
☐ 例



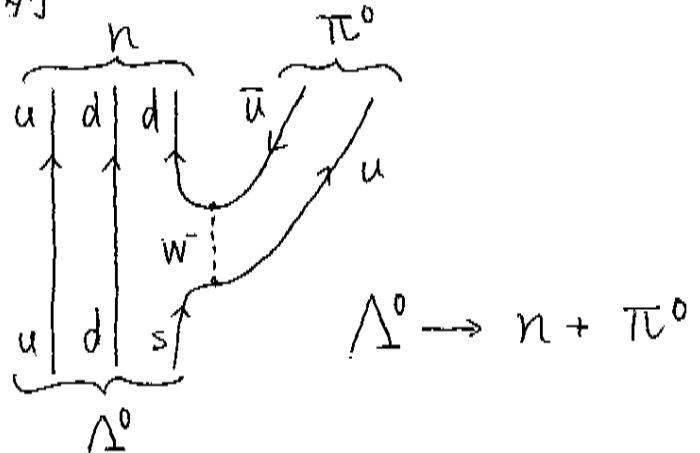
● 非レプトン過程

レプトン 関与せず

☐ 素過程



☐ 例

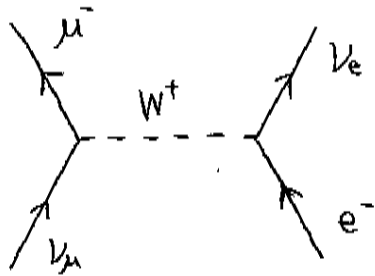


* 合計の電荷が ±1e
 の組み合わせのみ可

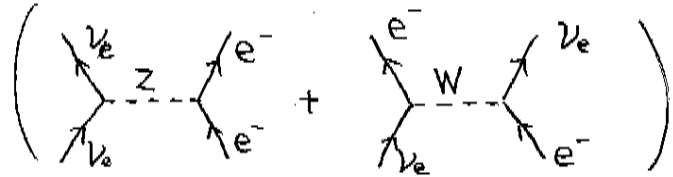
10.3 荷電流の結合強度

● ニュートリノ - 電子散乱

例 $e^- + \nu_\mu \rightarrow \mu^- + \nu_e$



- Wの交換のみで起こる.
- $e^- - \nu_e$ の散乱はより複雑.



▣ 遷移行列は

$$M_{fi} \propto g \cdot \frac{1}{Q^2 c^2 + M_W^2 c^4} \cdot g \quad (g: \text{弱電荷})$$

$Q^2 \ll M_W^2 c^2$ のとき ほぼ定数 $\frac{g^2}{M_W^2 c^4}$ に.

$M_W c^2 = 80 \text{ GeV}$ と大きいので、弱い相互作用の到達距離は短い.

$$R \lesssim \frac{\hbar}{M_W c} \approx 2.5 \times 10^{-3} \text{ fm}$$

▣ Q^2 が小さいときは、ニュートリノ - 電子散乱の全断面積は

$$\sigma = \frac{G_F^2}{\pi (\hbar c)^4} \cdot S$$

G_F : Fermi 定数で、 $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{\pi \alpha}{2} \frac{g^2}{e^2} \frac{(\hbar c)^3}{M_W^2 c^4}$ $(\leftrightarrow \alpha = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar c})$

S : 重心系のエネルギーの2乗.

Lab系では $S \approx 2m_e E_\nu$

実験室系での断面積は

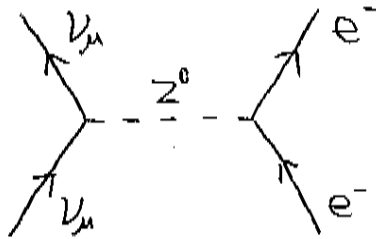
$$\sigma_{\text{lab}} = \frac{2G_F^2}{\pi (\hbar c)^4} \cdot m_e c^2 \cdot E_\nu = 1.7 \times 10^{-41} \text{ cm}^2 \cdot \left(\frac{E_\nu}{\text{GeV}} \right)$$

④ エネルギーが大きくなると.

$$\sigma = \frac{G_F^2}{\pi(\hbar c)^4} \frac{M_W^2 c^4}{s + M_W^2 c^4} \cdot s \quad \text{と修正される.}$$

⑤ 中性流

ニュートリノ-電子散乱の1つ $e^- + \nu_\mu \rightarrow e^- + \nu_\mu$ は



Zボソンを介しておこる.

⑥ ミューオンの崩壊

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

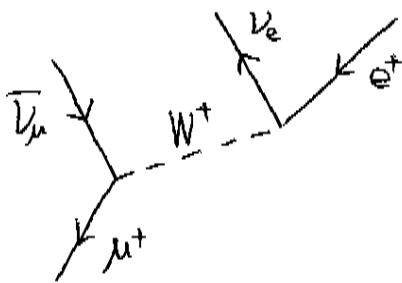
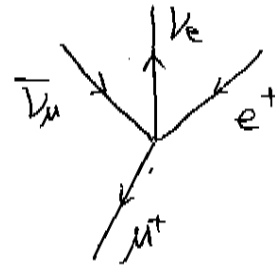


diagram は左だが、
 m_μ は m_W より
 非常に小さいので
 接触相互作用で書く.



④ この近似の下で、崩壊幅は

$$\Gamma_\mu = \frac{\hbar}{\tau_\mu} = \frac{G_F^2}{192\pi^3(\hbar c)^6} \cdot (m_\mu c^2)^5 (1 + \epsilon)$$

※ エネルギーの5乗に比例する.

この式と、実験で求められるミューオンの寿命、質量から G_F を決定できる.

⑦ 弱電荷の普遍性

g の値が $\sqrt{2}g$, Lレプトンで共通とすると.

フェルミ粒子 $\xrightarrow{W$ の交換} 軽い Lレプトン, $\sqrt{2}g$

の崩壊で (10.14) は成り立つ.

例 4 ウォンの崩壊

主なモードは $\tau^- \rightarrow \begin{cases} \nu_\tau + \bar{\nu}_e + e^- \\ \nu_\tau + \bar{\nu}_\mu + \mu^- \\ \nu_\tau + \bar{u} + d \end{cases}$ の3つ.

これらの崩壊幅は. $\Gamma_{\tau\mu} \approx \Gamma_{\tau e}$, $\Gamma_{\tau d u} \approx 3\Gamma_{\tau\mu}$

(10.14) より $\Gamma_{\tau e} = \left(\frac{m_\tau}{m_\mu}\right)^5 \Gamma_{\mu e}$ である. 寿命は

$$\tau_\tau = \frac{\hbar}{\Gamma_{\tau e} + \Gamma_{\tau\mu} + \Gamma_{\tau d u}} \approx \frac{\tau_\mu}{5 \cdot \left(\frac{m_\tau}{m_\mu}\right)^5} \approx 3.1 \times 10^{-13} \text{ s}$$

これと実験との一致から. $\begin{cases} \tau^- \text{ が 3つの色をもつことが確認できる.} \\ \tau^- \text{ と } L \text{ プトンの弱電荷は同じ.} \end{cases}$

10.4 $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \text{ ファミリー}$ —

前節の結論は. 正確な検証を待たなくては言えない.

$d \rightarrow u$ では4%小さい, $s \rightarrow u$ では $1/20$ である.

● Cabibbo 角

L プトンと同様に, $\tau^- \rightarrow \nu_\tau$ もファミリーに分ける

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

ただ, $\tau^- \rightarrow \nu_\tau$ の遷移は他のファミリーへのものもある. 3世代目を考えずに.

$|u\rangle$ の "パートナー" $|d'\rangle$, $|c\rangle$ の "パートナー" $|s'\rangle$ である.

$$\begin{pmatrix} |d'\rangle \\ |s'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix}$$

と表す. θ_c : Cabibbo 角.

実験的に. $\sin \theta_c \approx 0.22$ $\cos \theta_c \approx 0.98$

Ⅳ τ 崩壊をより正確に扱う.

$$\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \bar{u} + d \quad (u \leftrightarrow d) \quad \text{の他に}$$

$$\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \bar{u} + s \quad (u \leftrightarrow s) \quad \text{のモードがある.}$$

$\tau^- \rightarrow \text{hadron}$ の崩壊幅は,

$$\Gamma(\tau^- \rightarrow \text{hadron}) = \sin^2 \theta_c \Gamma_{\tau s \bar{u}} + \cos^2 \theta_c \Gamma_{\tau d \bar{u}}$$

と修正される. ただし, s と d の質量差を無視すれば $\Gamma_{\tau s \bar{u}} = \Gamma_{\tau d \bar{u}}$ となり,

前の議論に変更はない.

● Cabibbo - 小林 - 益川 行列

3世代の混じりも考えると, 3×3 行列となる.

自由度 4 (3つの角度 + 1つの位相)

補足

$N \times N$ が N 世代あるとする。

$$\begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad \text{と書く。}$$

d'_i は質量の固有状態 d_i の線型結合で、

$$d'_i = \sum_{j=1}^N V_{ij} d_j$$

V は $N \times N$ のユニタリ-行列、この V はパラメータをいくつ持っているか。

d_i と d'_i の位相を変えて再定義することで、 $2N-1$ 個は消える。

例 $V_{ij} = r_{ij} e^{i\theta_{ij}}$ とする。

$e^{i\theta_{ij}} d_j$ を新たに d_j として、 θ_{ij} ($j=1, \dots, N$) が消える。

$$d'_i = \sum_{j=1}^N r_{ij} e^{i(\theta_{ij} - \theta_j)} d_j \quad (i=1, \dots, N) \quad \text{となる。}$$

ここで、 $e^{-i(\theta_{i1} - \theta_1)} d'_i$ を新たに d'_i として、 θ_{i1} ($i=2, \dots, N$) も消える。

計、 $N + (N-1) = 2N-1$ の位相を消せる。

よって V のパラメータの数は $N^2 - (2N-1) = (N-1)^2$ 個。

とすることで、 $N \times N$ の直交行列は $\frac{1}{2}N(N-1)$ 個のパラメータを持つので、

V には $(N-1)^2 - \frac{1}{2}N(N-1) = \frac{1}{2}(N-1)(N-2)$ 個の位相が入ることになる。

$N=2$ のときは、自由度 1 \Rightarrow Cabibbo 行列 (θ_c で指定)

$N=3$ のときは、自由度 4 (うち 1つが位相) \Rightarrow CKM 行列。

$$V = \begin{pmatrix} C_{12} C_{13} & S_{12} C_{13} & S_{13} e^{-i\delta_{13}} \\ -S_{12} C_{23} - C_{12} S_{23} S_{13} e^{i\delta_{13}} & C_{12} C_{23} - S_{12} S_{23} S_{13} e^{i\delta_{13}} & S_{23} C_{13} \\ S_{12} S_{23} - C_{12} C_{23} S_{13} e^{i\delta_{13}} & -C_{12} S_{23} - S_{12} C_{23} S_{13} e^{i\delta_{13}} & C_{23} C_{13} \end{pmatrix}$$

$$S_{12} = \sin \theta_{12}, \quad C_{23} = \cos \theta_{23} \quad \text{etc ...}$$

$\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \delta_{13}$ で指定。

補足

Dirac eq. は $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$

Chiral 表現 $\gamma^0 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ $\gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{pmatrix}$ ϵ 用いるとこれは.

$$\begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 + \sigma \cdot \nabla) \\ i(\partial_0 - \sigma \cdot \nabla) & -m \end{pmatrix} \psi = 0$$

Lorentz 変換の生成子 $S^{\mu\nu}$ は. $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ で

$$S^{0i} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & -\sigma^i \end{pmatrix} \quad S^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & \\ & \sigma^k \end{pmatrix}$$

$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ と書くと、Lorentz 変換で ψ_L と ψ_R は混ざらない.

$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ なので、ある座標系で γ^5 の固有状態であれば、Lorentz 変換しても γ^5 の固有状態.

$$\begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1-\gamma^5}{2} \psi, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} = \frac{1+\gamma^5}{2} \psi \quad \text{で}$$

$\frac{1\pm\gamma^5}{2}$ は左巻き、右巻き状態への射影子になっている.

ψ の平面波解を求め、 $\psi(x) = u(p) e^{-ip \cdot x}$ ($p^2 = m^2$) とおく.

$u(p)$ の満たすべき式は.

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(p) = 0$$

$p = (m, \vec{0})$ とおくと、これは

$$(\gamma^0 m - m) u(p) = m \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u(p) = 0 \quad \text{よて}$$

$$u(m, \vec{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \quad (\xi^\dagger \xi = 1)$$

と書ける.

任意の p についての $u(p)$ は. $u(m, \vec{0})$ に boost して得られる.

boost の方向 \hat{z} 軸とすると ($p = (E, 0, 0, p)$),

$$\begin{pmatrix} E \\ p \end{pmatrix} = \exp \left[\eta \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\cosh \eta \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \sinh \eta \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m \cosh \eta \\ m \sinh \eta \end{pmatrix}$$

$\cosh \eta = E/m$, $\sinh \eta = p/m$ と書ける.

$$u(p) = \exp \left[-\frac{i}{2} \eta (S^{03} - S^{30}) \right] u(m, \vec{0})$$

$$= \exp \left[-\frac{\eta}{2} (\sigma^3 - \sigma^3) \right] \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$$

$$= \left[\cosh(\eta/2) \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} - \sinh(\eta/2) (\sigma^3 - \sigma^3) \right] \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\sqrt{E+p} \frac{1-\sigma^3}{2} + \sqrt{E-p} \frac{1+\sigma^3}{2}) \xi \\ (\sqrt{E+p} \frac{1+\sigma^3}{2} + \sqrt{E-p} \frac{1-\sigma^3}{2}) \xi \end{pmatrix}$$

このとき \wedge リンゲン演算子は $h = \sigma^3$ となっている. 進行方向にスピンの向きが向いている.
即ち $h = +1$ のときは $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ぞ.

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E+p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad \text{となる. 特に } m=0 \text{ のとき } E=p \text{ なので}$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad \text{となる. } h = +1 \Leftrightarrow \text{右巻き である}$$

また. $E-p = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{m\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = m \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ となる. $\beta \sim 1$ のときは

$h = +1$ の粒子の左巻きの成分は小さくなる.