

15.5 バリオンのセミレプトン崩壊

筒井翔一郎

2011 年 6 月 28 日

15.5 バリオンのセミレプトン崩壊

中性子の β 崩壊について考察する。崩壊確率は Fermi の黄金律によって計算できる。全エネルギーが E_0 、電子のエネルギーが E_e であるような崩壊確率は、

$$dW(E_e) = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d\rho_f(E_0, E_e)}{dE_e} dE_e \quad (15.32)$$

である。以下ではまず、遷移行列要素 $\mathcal{M}_{fi}$ について述べる。

始状態、終状態の全角運動量を J_i, J_f 、その変化分を $\Delta J = J_f - J_i$ とする。 β 崩壊は、 ΔJ の取りうる値によって 2 種類に分類することができる。ただし、以下では特に断らない限り軌道角運動量が 0 の場合を考えるものとする。

(1) $\Delta J = 0$ の遷移を Fermi 遷移という。このとき、電子とニュートリノの合成スピンは 0(singlet) である。

(2) $\Delta J = 0, \pm 1$ (ただし $0 \rightarrow 0$ を除く) の遷移を Gamow-Teller 遷移という。このとき、電子とニュートリノの合成スピンは 1(triplet) である。

中性子の β 崩壊は $1/2 \rightarrow 1/2$ の過程であるから、Fermi 遷移も Gamow-Teller 遷移も起こりうる。

【Fermi 遷移】

Fermi 遷移はベクトル結合によって引き起こされるので、ベクトル遷移とも言う。ベクトル遷移の行列要素は、

$$|\mathcal{M}_{fi}|_F = \frac{G_F}{V} c_V |\langle uud | \sum_{i=1}^3 T_{i,+} | udd \rangle| \quad (15.33)$$

と書ける。(付録 A) ただし、 $T_{i,+}$ は、 i 番目のクォークに作用する(強い)アイソスピンの上昇演算子である。また、 $|udd\rangle$ などは、すべて (15.5) (15.6) の意味で用いている。弱い相互作用においては、クォーク間の混合が起こることに注意すると、

$$|\mathcal{M}_{fi}|_F = \frac{G_F}{V} \cos \theta_c c_V |\langle uud | \sum_{i=1}^3 I_{i,+} | udd \rangle| = \frac{G_F}{V} \cos \theta_c c_V \quad (15.35)$$

となる。(付録 B) ここに現れた $I_{i,+}$ は、弱いアイソスピンの上昇演算子である。

【Gamow-Teller 遷移】

Gamow-Teller 遷移は軸性ベクトル結合によって引き起こされるので、軸性ベクトル結合とも言う。軸性ベ

クトル遷移の行列要素は、

$$|\mathcal{M}_{fi}|_{\text{GT}} = \frac{G_F}{V} c_A |\langle \text{uud} | \sum_{i=1}^3 T_{i,+} \sigma_i | \text{udd} \rangle| \quad (15.36)$$

と書ける。(付録 A) 特にこの z 成分を計算すると、

$$|\langle \text{uud} | \sum_{i=1}^3 T_{i,+} \sigma_{i,z} | \text{udd} \rangle| = \frac{5}{3} \quad (15.37)$$

を得る。(付録 B)

上の計算は構成子クォーク模型に基づいたものであった。核子のレベルで見ると、全行列要素は、

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{g_V^2}{V^2} |\langle p | I_+ | n \rangle|^2 + \frac{g_A^2}{V^2} |\langle p | I_+ \sigma | n \rangle|^2 = \frac{g_V^2 + 3g_A^2}{V^2} \quad (15.38,39)$$

である。ここに g_V 、 g_A は、それぞれベクトル遷移、軸性ベクトル遷移の結合の強さを表す定数である。この結果を、構成子クォーク模型に基づいた計算と比較すると、

$$g_V = G_F \cos \theta_c c_V \quad (15.40)$$

$$g_A \approx G_F \cos \theta_c \frac{5}{3} c_A \quad (15.41)$$

となる。ただし、核子内のクォークの波動関数が決まっていないので、これは近似的な関係式である。

崩壊確率が与えられれば、中性子の寿命を計算することができる。寿命は単位時間当たりの崩壊確率の逆数で定義される。

$$\frac{1}{\tau} = \int_{m_e c^2}^{E_0} \frac{dW}{dE_e} dE_e = \int_{m_e c^2}^{E_0} \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d\rho_f(E_0, E_e)}{dE_e} dE_e \quad (15.42)$$

核子の反跳を無視して電子とニュートリノの状態密度を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_f(E_0, E_e)}{dE_e} &= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p_e^2 \frac{dp_e}{dE_e} \cdot \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_0} \\ &= \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_e}{c^3} \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \cdot \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_\nu^2}{c^3} \\ &= (4\pi V)^2 \frac{E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \cdot (E_0 - E_e)^2}{(2\pi\hbar c)^6} \end{aligned} \quad (15.43)$$

となる。行列要素がエネルギーに依らないと仮定すれば、寿命の式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{(4\pi V)^2}{(2\pi\hbar c)^6} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \int_{m_e c^2}^{E_0} E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \cdot (E_0 - E_e)^2 dE_e \\ &= \frac{(2\pi)^3}{\hbar (2\pi\hbar c)^6} (g_V^2 + 3g_A^2) \int_{m_e c^2}^{E_0} E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \cdot (E_0 - E_e)^2 dE_e \end{aligned}$$

となる。さらに積分の部分をも、

$$\begin{aligned} \int_{m_e c^2}^{E_0} E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \cdot (E_0 - E_e)^2 dE_e &= (m_e c^2)^3 \int_{m_e c^2}^{E_0} E_e \sqrt{\frac{E_e^2}{m_e^2 c^4} - 1} \cdot \left(\frac{E_0}{m_e c^2} - \frac{E_e}{m_e c^2} \right)^2 dE_e \\ &= (m_e c^2)^5 \int_1^{\mathcal{E}_0} \mathcal{E}_e \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - 1} (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_e)^2 d\mathcal{E}_e \\ &= (m_e c^2)^5 f(E_0) \end{aligned}$$

ただし、

$$\mathcal{E}_0 = \frac{E_0}{m_e c^2} \quad \mathcal{E}_e = \frac{E_e^2}{m_e^2 c^4}$$

と規格化しておけば、結局、

$$\frac{1}{\tau} = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \cdot (g_V^2 + 3g_A^2) \cdot f(E_0) \quad (15.47)$$

のようになる。特に、エネルギーが大きい極限では、

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{1}{\hbar^7 c^6} \cdot (g_V^2 + 3g_A^2) \cdot \frac{E_0^5}{60\pi^3} \quad (15.49)$$

となり、寿命はエネルギーの 5 乗に反比例する。(Sargent 則、付録 C) 実験的な中性子の寿命は、 $889.1 \pm 2.1\text{s}$ である。

また、結合の強さ g_V 、 g_A を決定するには、もう一つの測定量が必要であるが、例えば非対称度を用いる方法がある。様々な実験の結果、 $c_V = 1$ であることが分かっている。これは、弱い相互作用のベクトル部分が保存することを示している。(CVC) 一方で、軸性ベクトル部分は部分的にしか保存しない。(PCAC)

一般の β 崩壊も中性子の β 崩壊と考え方は同じである。次にハイペロン (ストレンジネスを持つ粒子) のセミレプトン崩壊について述べる。セミレプトン崩壊の崩壊確率は、

$$\frac{V_{s.l.}}{\tau} \propto |\mathcal{M}_{fi}|_{s.l.}^2 \quad (15.56)$$

のように表せるから、ハイペロンの寿命と、セミレプトンチャネルへの崩壊分岐比 $V_{s.l.}$ を測定することにより、崩壊確率を実験的に決定することができる。また、ハイペロンの崩壊を詳しく調べることは、Cabibbo 理論の検証にもなる。例として $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + e^- + \bar{\nu}_e$ という崩壊を考える。Fermi 遷移の行列要素は、

$$|\mathcal{M}_{fi}|_F = \frac{G_F}{V} |\langle uds | \sum_{i=1}^3 T_{i,+} | dss \rangle| = \frac{G_F}{V} \sin \theta_c |\langle uds | \sum_{i=1}^3 I_{i,+} | dss \rangle| \quad (15.59)$$

であり、Gamow-Teller 遷移の行列要素は、

$$|\mathcal{M}_{fi}|_{GT} = \frac{g_A}{g_V} \frac{G_F}{V} |\langle uds | \sum_{i=1}^3 T_{i,+} \sigma_i | dss \rangle| = \frac{g_A}{g_V} \frac{G_F}{V} \sin \theta_c |\langle uds | \sum_{i=1}^3 I_{i,+} \sigma_i | dss \rangle| \quad (15.60)$$

であって、中性子の場合と同様に計算できる。

付録 A β 崩壊の遷移行列要素

V-A 理論に基づく Fermi の 4 点相互作用 Hamiltonian は、次のように与えられる。

$$H_{\text{int}} = G_F \int d^3x [\bar{\psi}_p(x) \gamma^\mu (c_V + c_A \gamma_5) \psi_n(x)] J_\mu^{(\text{ev})}(x) + h.c.$$

ただしここで、 $J_\mu^{(\text{ev})}(x)$ はレプトンカレントである。

$$J_\mu^{(\text{ev})}(x) = \bar{\psi}_e(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu(x)$$

また、各 ψ はディラックスピノルである。Hamiltonian 中のエルミート共役の部分は、いわゆる逆 β 崩壊を表す項なので以下では省略する。この相互作用 Hamiltonian を用いると、 β 崩壊の S 行列は次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{fi}(n \rightarrow p e^- \bar{\nu}) &= -i \int dt H_{\text{int}} \\ &= -i G_F \int d^4x [\bar{\psi}_p(x) \gamma^\mu (c_V + c_A \gamma_5) \psi_n(x)] J_\mu^{(\text{ev})}(x) \end{aligned}$$

ここで、ディラックスピノルの時間依存部分を括りだして、次のようにおく。

$$\begin{aligned} \psi_p(x) &= u_p(\mathbf{x}) e^{-iE_p t} \\ \psi_n(x) &= u_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} \\ \psi_e(x) &= u_e(\mathbf{x}) e^{-iE_e t} \\ \psi_\nu(x) &= v_\nu(\mathbf{x}) e^{+iE_\nu t} \\ J_\mu^{(\text{ev})}(\mathbf{x}) &= \bar{u}_e(\mathbf{x}) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_\nu(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

これらの表式を用いると、

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i G_F \int dt e^{i(E_e + E_\nu + E_p - E_n)t} \int d^3x [\bar{u}_p(\mathbf{x}) \gamma^\mu (c_V + c_A \gamma_5) u_n(\mathbf{x})] J_\mu^{(\text{ev})}(\mathbf{x}) \\ &= -2\pi i \delta(E_e + E_\nu + E_p - E_n) G_F \int d^3x [\bar{u}_p(\mathbf{x}) \gamma^\mu (c_V + c_A \gamma_5) u_n(\mathbf{x})] J_\mu^{(\text{ev})}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

となる。ここで、核子の運動は非相対論的に扱えるものと仮定する。このとき、 $u \rightarrow \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix}$ となるから、

$$\begin{aligned} \bar{u}_p \gamma^0 u_n &\rightarrow \begin{pmatrix} \phi_p^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n \\ 0 \end{pmatrix} = \phi_p^\dagger \phi_n \\ \bar{u}_p \gamma^i u_n &\rightarrow \begin{pmatrix} \phi_p^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \bar{u}_p \gamma^0 \gamma^5 u_n &\rightarrow \begin{pmatrix} \phi_p^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_p^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \bar{u}_p \gamma^i \gamma^5 u_n &\rightarrow \begin{pmatrix} \phi_p^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_p^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n \\ 0 \end{pmatrix} = \phi_p^\dagger \sigma^i \phi_n \end{aligned}$$

を得る。従って、S 行列の非相対論的極限は

$$S_{fi} = -2\pi i \delta(E_e + E_\nu + E_p - E_n) G_{FCV} \int d^3x \phi_p^\dagger \phi_n J_0^{(\text{ev})}(\mathbf{x}) \\ - 2\pi i \delta(E_e + E_\nu + E_p - E_n) G_{FCA} \int d^3x \phi_p^\dagger \sigma^i \phi_n J_i^{(\text{ev})}(\mathbf{x})$$

となる。核子の半径程度の領域では、レプトンの波動関数は一様であるとして良い。すると、レプトンカレントは積分の外に出すことができ、

$$S_{fi} = -2\pi i \delta(E_e + E_\nu + E_p - E_n) G_{FCV} J_0^{(\text{ev})}(0) \int d^3x \phi_p^\dagger \phi_n \\ - 2\pi i \delta(E_e + E_\nu + E_p - E_n) G_{FCA} J_i^{(\text{ev})}(0) \int d^3x \phi_p^\dagger \sigma^i \phi_n$$

となる。積分の前のデルタ関数は、エネルギー保存を表しているが簡単のために、 $S_{fi} = -2\pi i \mathcal{M}_{fi}$ で遷移行列を定義しておく。結局、

$$\mathcal{M}_{fi} = G_{FCV} J_0^{(\text{ev})}(0) \int d^3x \phi_p^\dagger \phi_n + G_{FCA} J_i^{(\text{ev})}(0) \int d^3x \phi_p^\dagger \sigma^i \phi_n$$

が得られる。右辺第 1 項が Fermi 遷移、第 2 項が Gamow-Teller 遷移を表す。遷移行列をあらわにアイソスピン演算子を用いて書くために、核子の波動関数をアイソスピンの 2 重項で記述することにする。 $\Psi_p = \begin{pmatrix} \phi_p \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $\Psi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_n \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\phi_p^\dagger \phi_n = \begin{pmatrix} \phi_p^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_n \end{pmatrix} = \Psi_p^\dagger I_+ \Psi_n$$

と書ける。 Ψ を改めて ψ と書くことにすれば、

$$\mathcal{M}_{fi} = G_{FCV} J_0^{(\text{ev})}(0) \int d^3x \psi_p^\dagger I_+ \psi_n + G_{FCA} J_i^{(\text{ev})}(0) \int d^3x \phi_p^\dagger \sigma^i \phi_n \\ = G_{FCV} J_0^{(\text{ev})}(0) \langle p | I_+ | n \rangle + G_{FCA} J_i^{(\text{ev})}(0) \langle p | \sigma^i | n \rangle$$

を得る。ここで、

$$u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(p) \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{V}}$$

とおき、 $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \sim 1$ と近似する。(許容遷移) さらに $\tilde{u}(p)$ を改めて $u(p)$ と書くことにすると、

$$\mathcal{M}_{fi}/V = G_F \left(c_V \langle 1 | \bar{u}_e(p, s) \gamma^0 (1 - \gamma^5) v_\nu(k, t) + c_A \langle \sigma_i | \bar{u}_e(p, s) \gamma^i (1 - \gamma^5) v_\nu(k, t) \right)$$

のようになる。ただし、 $\langle 1 \rangle$ などは行列要素を略記したものである。また、 $\bar{u}_e(\mathbf{p}, s)$ の s などは、スピンを表す添字である。

$$(\bar{u} \gamma^\mu v)^* = \bar{v} \gamma^\mu u \quad (\bar{u} \gamma^\mu \gamma^5 v)^* = \bar{v} \gamma^\mu \gamma^5 u$$

に注意すると、

$$\mathcal{M}_{fi}^*/V = G_F \left(c_V \langle 1 \rangle^* \bar{v}_\nu(k, t) \gamma^0 (1 - \gamma^5) u_e(p, s) + c_A \langle \sigma_i \rangle^* \bar{v}_\nu(k, t) \gamma^i (1 - \gamma^5) u_e(p, s) \right)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{fi}|^2/V^2 G_F^2 &= |c_V|^2 |\langle 1 \rangle|^2 [\bar{u}_e(p, s) \gamma^0 (1 - \gamma^5) v_\nu(k, t)] [\bar{\nu}_\nu(k, t) \gamma^0 (1 - \gamma^5) u_e(p, s)] \\
&\quad + |c_A|^2 \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle^* [\bar{u}_e(p, s) \gamma^j (1 - \gamma^5) v_\nu(k, t)] [\bar{\nu}_\nu(k, t) \gamma^j (1 - \gamma^5) u_e(p, s)] \\
&\quad + c_V^* c_A \langle 1 \rangle^* \langle \sigma_i \rangle [\bar{u}_e(p, s) \gamma^i (1 - \gamma^5) v_\nu(k, t)] [\bar{\nu}_\nu(k, t) \gamma^0 (1 - \gamma^5) u_e(p, s)] \\
&\quad + c_V c_A^* \langle 1 \rangle \langle \sigma_i \rangle^* [\bar{u}_e(p, s) \gamma^0 (1 - \gamma^5) v_\nu(k, t)] [\bar{\nu}_\nu(k, t) \gamma^i (1 - \gamma^5) u_e(p, s)]
\end{aligned}$$

となる。レプトンのスピンを区別しない実験では、スピンについての和を取ったものが反応確率を与えることになる。スピン和の公式

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m \quad \sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
\sum |\mathcal{M}_{fi}|^2/V^2 G_F^2 &= |c_V|^2 |\langle 1 \rangle|^2 \text{tr}[(\not{p} + m) \gamma^0 (1 - \gamma^5) \not{k} \gamma^0 (1 - \gamma^5)] \\
&\quad + |c_A|^2 \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle^* \text{tr}[(\not{p} + m) \gamma^j (1 - \gamma^5) \not{k} \gamma^j (1 - \gamma^5)] \\
&\quad + c_V^* c_A \langle 1 \rangle^* \langle \sigma_i \rangle \text{tr}[(\not{p} + m) \gamma^i (1 - \gamma^5) \not{k} \gamma^0 (1 - \gamma^5)] \\
&\quad + c_V c_A^* \langle 1 \rangle \langle \sigma_i \rangle^* \text{tr}[(\not{p} + m) \gamma^0 (1 - \gamma^5) \not{k} \gamma^i (1 - \gamma^5)]
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\text{tr}[(1 - \gamma^5) \not{k} \gamma^\mu (1 - \gamma^5)] = \text{tr}[(1 - \gamma^5) \not{k} (1 + \gamma^5) \gamma^\mu] = \text{tr}[(1 - \gamma^5)^2 \not{k} \gamma^\mu] = 2 \text{tr}[(1 - \gamma^5) \not{k} \gamma^\mu]$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\sum |\mathcal{M}_{fi}|^2/2V^2 G_F^2 &= |c_V|^2 |\langle 1 \rangle|^2 \text{tr}[(\not{p} + m) \gamma^0 (1 - \gamma^5) \not{k} \gamma^0] \\
&\quad + |c_A|^2 \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle^* \text{tr}[(\not{p} + m) \gamma^j (1 - \gamma^5) \not{k} \gamma^j] \\
&\quad + c_V^* c_A \langle 1 \rangle^* \langle \sigma_i \rangle \text{tr}[(\not{p} + m) \gamma^i (1 - \gamma^5) \not{k} \gamma^0] \\
&\quad + c_V c_A^* \langle 1 \rangle \langle \sigma_i \rangle^* \text{tr}[(\not{p} + m) \gamma^0 (1 - \gamma^5) \not{k} \gamma^i]
\end{aligned}$$

のようになる。トレースの中身は、

$$\begin{aligned}
\text{tr}[(\not{p} + m) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{k} \gamma^\nu] &= \text{tr}[\not{p} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu] - \text{tr}[\not{p} \gamma^\mu \gamma^5 \not{k} \gamma^\nu] \\
&= p_\rho k_\sigma \text{tr}[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu] - p_\rho k_\sigma \text{tr}[\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\sigma \gamma^\nu] \\
&= 4p_\rho k_\sigma (g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} - g^{\rho\sigma} g^{\nu\mu} + g^{\rho\nu} g^{\mu\sigma}) - p_\rho k_\sigma (-4i) \epsilon^{\rho\mu\sigma\nu} \\
&= 4(p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot k + i p_\rho k_\sigma \epsilon^{\rho\mu\sigma\nu})
\end{aligned}$$

などと計算できるので、結局、

$$\begin{aligned}
\sum |\mathcal{M}_{fi}|^2/8V^2 G_F^2 &= |c_V|^2 |\langle 1 \rangle|^2 (p^0 k^0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}) \\
&\quad + |c_A|^2 \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle^* (p^i k^j + p^j k^i - g^{ij} p \cdot k + i p_\rho k_\sigma \epsilon^{\rho i \sigma j}) \\
&\quad + c_V^* c_A \langle 1 \rangle^* \langle \sigma_i \rangle (p^i k^0 + p^0 k^i + i p_\rho k_\sigma \epsilon^{\rho i \sigma 0}) \\
&\quad + c_V c_A^* \langle 1 \rangle \langle \sigma_i \rangle^* (p^0 k^i + p^i k^0 + i p_\rho k_\sigma \epsilon^{\rho 0 \sigma i}) \\
&= |c_V|^2 |\langle 1 \rangle|^2 (p^0 k^0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}) \\
&\quad + |c_A|^2 \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle^* (p^i k^j + p^j k^i - g^{ij} p \cdot k + i p_\rho k_\sigma \epsilon^{\rho i \sigma j}) \\
&\quad + 2(p^0 k^i + p^i k^0) (c_V^* c_A \langle 1 \rangle^* \langle \sigma_i \rangle + c_V c_A^* \langle 1 \rangle \langle \sigma_i \rangle^*) \\
&\quad + 2i p_\rho k_\sigma \epsilon^{\rho i \sigma 0} (c_V^* c_A \langle 1 \rangle^* \langle \sigma_i \rangle - c_V c_A^* \langle 1 \rangle \langle \sigma_i \rangle^*)
\end{aligned}$$

となる。さらに計算を進めると、次のようにまとめることができる。

$$\sum |\mathcal{M}_{fi}|^2 / 8V^2 G_F^2 = (a + b\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} + A\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{k} + B\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{p})$$

ここで、 $\hat{\mathbf{J}}$ は中性子の単位偏光ベクトル、 a, b, A, B は定数であり、特に $a = c_V^2 |\langle 1 \rangle|^2 + c_A^2 |\langle \sigma \rangle|^2$ である。この式において、レプトンが放出される全方向に渡って積分をすると、角度依存のある項は落ちてしまい、

$$a = c_V^2 |\langle 1 \rangle|^2 + c_A^2 |\langle \sigma \rangle|^2$$

の項だけが β 崩壊の崩壊確率に寄与することになる。以上の議論は、一般の β 崩壊にも適用できる。(Greiner: Gauge Theory of Weak Interaction)

付録 B 遷移行列要素の計算

B.1 Fermi 遷移

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 I_{i,+} |\text{udd}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} (2 |\text{u}^\uparrow \text{d}^\uparrow \text{u}^\downarrow\rangle + 2 |\text{d}^\uparrow \text{u}^\uparrow \text{u}^\downarrow\rangle + 2 |\text{u}^\uparrow \text{u}^\downarrow \text{d}^\uparrow\rangle + 2 |\text{d}^\uparrow \text{u}^\downarrow \text{u}^\uparrow\rangle + 2 |\text{u}^\downarrow \text{u}^\uparrow \text{d}^\uparrow\rangle + 2 |\text{u}^\downarrow \text{d}^\uparrow \text{u}^\uparrow\rangle \\ &\quad - |\text{u}^\uparrow \text{d}^\downarrow \text{u}^\uparrow\rangle - |\text{d}^\uparrow \text{u}^\downarrow \text{u}^\uparrow\rangle - |\text{u}^\uparrow \text{u}^\uparrow \text{d}^\downarrow\rangle - |\text{d}^\uparrow \text{u}^\uparrow \text{u}^\downarrow\rangle - |\text{u}^\uparrow \text{u}^\uparrow \text{d}^\downarrow\rangle - |\text{u}^\uparrow \text{d}^\uparrow \text{u}^\downarrow\rangle \\ &\quad - |\text{u}^\downarrow \text{d}^\uparrow \text{u}^\uparrow\rangle - |\text{d}^\downarrow \text{u}^\uparrow \text{u}^\uparrow\rangle - |\text{u}^\downarrow \text{u}^\uparrow \text{d}^\uparrow\rangle - |\text{d}^\downarrow \text{u}^\uparrow \text{u}^\uparrow\rangle - |\text{u}^\uparrow \text{u}^\downarrow \text{d}^\uparrow\rangle - |\text{u}^\uparrow \text{d}^\downarrow \text{u}^\uparrow\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{18}} (-2 |\text{u}^\uparrow \text{u}^\uparrow \text{d}^\downarrow\rangle + |\text{u}^\uparrow \text{u}^\downarrow \text{d}^\uparrow\rangle + |\text{u}^\downarrow \text{u}^\uparrow \text{d}^\uparrow\rangle \\ &\quad - 2 |\text{u}^\uparrow \text{d}^\downarrow \text{u}^\uparrow\rangle + |\text{u}^\uparrow \text{d}^\uparrow \text{u}^\downarrow\rangle + |\text{u}^\downarrow \text{d}^\uparrow \text{u}^\uparrow\rangle \\ &\quad - 2 |\text{d}^\downarrow \text{u}^\uparrow \text{u}^\uparrow\rangle + |\text{d}^\uparrow \text{u}^\uparrow \text{u}^\downarrow\rangle + |\text{d}^\uparrow \text{u}^\downarrow \text{u}^\uparrow\rangle) \\ &= -|\text{uud}\rangle \end{aligned}$$

従って、

$$|\langle \text{uud} | \sum_{i=1}^3 I_{i,+} | \text{udd} \rangle| = 1$$

B.2 Gamow-Teller 遷移

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 I_{i,+} \sigma_{i,z} |\text{udd}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} (2 |\text{u}^\uparrow \text{d}^\uparrow \text{u}^\downarrow\rangle + 2 |\text{d}^\uparrow \text{u}^\uparrow \text{u}^\downarrow\rangle + 2 |\text{u}^\uparrow \text{u}^\downarrow \text{d}^\uparrow\rangle + 2 |\text{d}^\uparrow \text{u}^\downarrow \text{u}^\uparrow\rangle + 2 |\text{u}^\downarrow \text{u}^\uparrow \text{d}^\uparrow\rangle + 2 |\text{u}^\downarrow \text{d}^\uparrow \text{u}^\uparrow\rangle \\ &\quad - |\text{u}^\uparrow \text{d}^\downarrow \text{u}^\uparrow\rangle + |\text{d}^\uparrow \text{u}^\downarrow \text{u}^\uparrow\rangle - |\text{u}^\uparrow \text{u}^\uparrow \text{d}^\downarrow\rangle + |\text{d}^\uparrow \text{u}^\uparrow \text{u}^\downarrow\rangle - |\text{u}^\uparrow \text{u}^\uparrow \text{d}^\downarrow\rangle + |\text{u}^\uparrow \text{d}^\uparrow \text{u}^\downarrow\rangle \\ &\quad + |\text{u}^\downarrow \text{d}^\uparrow \text{u}^\uparrow\rangle - |\text{d}^\downarrow \text{u}^\uparrow \text{u}^\uparrow\rangle + |\text{u}^\downarrow \text{u}^\uparrow \text{d}^\uparrow\rangle - |\text{d}^\downarrow \text{u}^\uparrow \text{u}^\uparrow\rangle + |\text{u}^\uparrow \text{u}^\downarrow \text{d}^\uparrow\rangle - |\text{u}^\uparrow \text{d}^\downarrow \text{u}^\uparrow\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{18}} (-2 |\text{u}^\uparrow \text{u}^\uparrow \text{d}^\downarrow\rangle + 3 |\text{u}^\uparrow \text{u}^\downarrow \text{d}^\uparrow\rangle + 3 |\text{u}^\downarrow \text{u}^\uparrow \text{d}^\uparrow\rangle \\ &\quad - 2 |\text{u}^\uparrow \text{d}^\downarrow \text{u}^\uparrow\rangle + 3 |\text{u}^\uparrow \text{d}^\uparrow \text{u}^\downarrow\rangle + 3 |\text{u}^\downarrow \text{d}^\uparrow \text{u}^\uparrow\rangle \\ &\quad - 2 |\text{d}^\downarrow \text{u}^\uparrow \text{u}^\uparrow\rangle + 3 |\text{d}^\uparrow \text{u}^\uparrow \text{u}^\downarrow\rangle + 3 |\text{d}^\uparrow \text{u}^\downarrow \text{u}^\uparrow\rangle) \end{aligned}$$

従って、

$$|\langle \text{udd} | \sum_{i=1}^3 I_{i,+} \sigma_{i,z} | \text{udd} \rangle| = \frac{1}{18} |-4 - 3 - 3| \times 3 = \frac{5}{3}$$

付録 C 式 (15.49) について

$\mathcal{E}_0 \gg 1$ の場合について $f(E_0)$ を計算する。

$$\begin{aligned} f(E_0) &= \int_1^{\mathcal{E}_0} \mathcal{E}_e \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - 1} (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_e)^2 d\mathcal{E}_e \\ &= \mathcal{E}_0 \int_1^{\mathcal{E}_0} \mathcal{E}_e \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - 1} d\mathcal{E}_e - 2\mathcal{E}_0 \int_1^{\mathcal{E}_0} \mathcal{E}_e^2 \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - 1} d\mathcal{E}_e + \int_1^{\mathcal{E}_0} \mathcal{E}_e^3 \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - 1} d\mathcal{E}_e \\ &= \mathcal{E}_0 I_1 - 2\mathcal{E}_0 I_2 + I_3 \end{aligned}$$

ここで、 $I_1 \sim I_3$ はそれぞれ、

$$\begin{aligned} I_1 &\approx \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{E}_0^2} t^{1/2} dt = \frac{\mathcal{E}_0^5}{3} \quad (\mathcal{E}_e^2 - 1 = t) \\ I_2 &= \int_0^{x_0} \cosh^2 x \sinh^2 x dx \quad (\mathcal{E}_e = \cosh x, \mathcal{E}_0 = \cosh x_0) \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{x_0} \sinh^2 2x dx \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{x_0} (e^{4x} + e^{-4x} - 2) dx \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{4} e^{4x_0} - \frac{1}{4} e^{-4x_0} - 2x_0 \right) \\ &\approx \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2\mathcal{E}_0)^4 = \frac{\mathcal{E}_0^4}{4} \\ I_3 &\approx \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{E}_0^2} (1+t) t^{1/2} dt \approx \frac{\mathcal{E}_0^5}{5} \quad (\mathcal{E}_e^2 - 1 = t) \end{aligned}$$

のようになるので、

$$f(E_0) \approx \frac{\mathcal{E}_0^5}{3} - \frac{\mathcal{E}_0^5}{2} + \frac{\mathcal{E}_0^5}{5} = \frac{\mathcal{E}_0^5}{30}$$

を得る。