

担当：藤林

平成 23 年 7 月 5 日

16.3 核力の性質

短距離斥力

$l=0$ の軌道にはパウリ原理を考えてもクォーク 6 つは入れる 斥力にはならない．しかしクォークのスピンの相互作用は，平行なスピンの対が増えるために大きくなる．クォーク 3 つのときは質量の増加が

$$\Delta M_{SS} = \begin{cases} -3 \cdot \frac{4\pi}{9} \frac{\hbar^3}{c^3} \frac{\alpha_s}{m^2} |\psi(0)|^2 (S=1/2, \text{平行なスピン対 1 つ}) \\ +3 \cdot \frac{4\pi}{9} \frac{\hbar^3}{c^3} \frac{\alpha_s}{m^2} |\psi(0)|^2 (S=3/2, \text{平行なスピン対 3 つ}) \end{cases}$$

である．平行なスピン対が 2 つ増えているので，1 つあたりは Δ と核子の質量差の半分増加する．

$l=1$ に 2 つ， $l=0$ に 4 つのクォークを入れたときは，スピン - スピン相互作用は減少するが，それと同じくらいのエネルギーが $l=1$ への励起に必要である．結局，核子同士が近づくと系のエネルギーは増加し，斥力が働く．

引力

原子物理から類推する．まず，閉じ込め効果のせいでイオン結合は無い．Van-der-Waals 力は近距離では弱すぎる．また，遠距離ではグルーオンは閉じ込め効果で交換されなくなる．

ダイクォーク - クォークが水素原子のように共有結合するモデルがある．このとき，スピン - スピン相互作用によってダイクォークの状態はスピン，アイソスピンが Singlet になる方が安定である．この引力ポテンシャルは，実験値の $1/3$ となる．これは，交換されるクォークの色が同じでないといけなからである ($\frac{1}{3} \cdot 3 = 1/3$) ．

中間子交換

sea クォークの寄与によるクォーク - 反クォーク対の交換で力をやり取りする．ポテンシャルは

$$V = g \cdot \frac{e^{-\frac{m_c}{\hbar} r}}{r}$$

となる．

これの導出

クライン・ゴールドン方程式の定常状態での解を考える．

$$(\partial_\nu \partial^\nu + \mu^2)\psi = (-\nabla^2 + \mu^2)\psi = 0$$

球対称だとすると

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r\psi(r) - \mu^2\psi(r) = 0$$

$\phi = r\psi$ と置くと, この方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi(r) - \mu^2\phi(r) = 0$$

となり, 無限遠で 0 となる解を選ぶと $\phi(r) = ge^{-\mu r}$ となり, 湯川ポテンシャルが得られる.

媒介する中間子の質量が大きいと到達距離が減る. 交換粒子としてはパイ中間子, ρ , ω などである.

長距離ではパイ中間子の交換でよく記述できるが, 短距離では核子の内部構造が役割をはたすので不適当となる.

核子を点状粒子としてきた. クォークの描像で計算しようとする, 核子の中のクォーク, 反クォークが中間子を形成する確率も知る必要があるが, 結合定数が大きくて計算が困難である. このような点から, 中間子交換のモデルは核力を記述する最良の方法である.

17 原子核の構造

17.1 フェルミ気体模型

核子の運動量分布, 結合エネルギー, 質量公式の項の説明をする.

体積 V 中で, 運動量が $p \sim p + dp$ の間にある状態数は

$$dn = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot 4\pi p^2 dp$$

基底状態ではフェルミ運動量 p_F までの状態が核子によって占められるので, スピンも考慮に入れて陽子, 中性子の個数 N, Z は

$$N = \frac{V}{3\pi^2\hbar^3} \cdot (p_F^n)^3, \quad Z = \frac{V}{3\pi^2\hbar^3} \cdot (p_F^p)^3$$

原子核を球形とし, 体積

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 A$$

に $R_0 = 1.21\text{fm}$ を入れると,

$$p_F = p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \simeq 250\text{MeV}$$

フェルミエネルギー E_F は

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} \simeq 33\text{MeV}$$

となる. 核子 1 つあたりの束縛エネルギーは $7 \sim 8\text{MeV}$ であるので, ポテンシャルの深さは $V_0 \simeq 40\text{MeV}$ となる.

重い原子核で $N > Z$ となることは，陽子の Coulomb 力を考えることで説明できる．陽子の平均場ポテンシャルが $V_C = (Z - 1) \frac{\alpha \hbar c}{R}$ だけ底上げされるためである．

核子 1 つあたりの運動エネルギーの平均は

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{\int_{p < p_F} d^3 p E_{kin}}{\int_{p < p_F} d^3 p} = \frac{\int_0^{p_F} dp p^2 \frac{p^2}{2M}}{\int_0^{p_F} dp p^2} = \frac{5}{3} \frac{p_F^3}{2M} \simeq 20 \text{MeV}$$

原子核全体の運動エネルギーは

$$E_{kin}(N, Z) = \frac{3}{10M} (N(p_F^n)^2 + Z(p_F^p)^2) = \frac{3}{10M} \left(\frac{9\pi}{4} \right) \frac{\hbar^2}{R_0^2} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}}$$

となる．これを $N - Z$ で展開する．

$$\begin{aligned} N^{5/3} + Z^{5/3} &= \{(N - Z) + Z\}^{5/3} + \{N - (N - Z)\}^{5/3} \\ &= 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} + \frac{5}{9} \cdot 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{-1/3} (N - Z)^2 + \dots \end{aligned}$$

となるので，

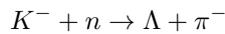
$$E_{kin}(N, Z) = \frac{3}{10M} \left(\frac{9\pi}{4} \right) \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(A + \frac{5}{9} \frac{(N - Z)^2}{A} + \dots \right)$$

この 1 項目が体積項，2 項目が非対称項への寄与になる．

非対称項を定量的に評価するには， $N \neq Z$ の時のポテンシャルの変化も考慮に入れなければいけない．

17.2 ハイパー核

原子核中の核子の系は小さいので，球対称なポテンシャル中に出来た準位に核子を詰めるという模型が使われる．個々の準位のエネルギーを知る方法として，ハイペロンを原子核の中に作るというものがある．



という反応によって原子核中の中性子を Λ 粒子に変換する．エネルギー保存の式は

$$E_K + M_n - B_n = E_\pi + M_\Lambda - B_\Lambda + (\text{原子核の反跳エネルギー})$$

なので， Λ 粒子の束縛エネルギーは

$$B_\Lambda = B_n + E_\pi - E_K + M_\Lambda - M_n + (\text{原子核の反跳エネルギー})$$

B_n の値は ^{12}C の中性子分離エネルギーを用いた．実験の結果は図 17.3． ^{12}C の中で，どの準位の中性子が Λ 粒子に変換され，それがどの準位に入るかで異なる場所にピークが立つ． $1p \rightarrow 1p$ は 1， $1p \rightarrow 1s$ のときは 2 である． $1s$ からの寄与は $B_\Lambda < 0$ の領域に見える．

重い原子核でも同じ事をして，各準位の束縛エネルギーが質量数の関数として得られる．結果は一樣ポテンシャル ($V_0 \simeq 30 \text{MeV}$) 中の自由粒子のものとよく一致する．

17.3 殻模型

核子がつくる平均ポテンシャルの中に出来た準位を、パウリ原理に従って核子が占める模型。

魔法数

陽子数及び中性子数が 2,8,20,28,50,82,126 の原子核は安定で、核子の束縛エネルギーは大きい。これを魔法数（マジックナンバー）という。原子では、電子が閉殻まで詰まっている原子が安定である。

原子核ポテンシャルの固有状態

殻模型に適したポテンシャルを導入する。軽い原子核では調和振動子ポテンシャルが良い近似になる。エネルギー準位は

$$E_{HO} = \hbar\omega(N + 3/2)(N = 2(n - 1) + l)$$

である。閉殻は、2,8,20,40...となり、20 までは説明できる。

Woods-Saxon ポテンシャル

重い原子核ではフェルミ分布によって記述される。

$$V_{\text{Central}}(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)/a}}$$

これは解析的には解けず、数値計算される。閉殻は 2,8,18,20,34,...

スピン - 軌道結合

ポテンシャルに l_s 項を付け加える。

$$V(r) = V_{\text{Central}}(r) + V_{ls}(r) \frac{\langle \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \rangle}{\hbar^2}$$

軌道角運動量 l とスピン角運動量 s を合成すると全角運動量は $j\hbar = (l \pm 1/2)\hbar$ となる。 $\langle \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \rangle$ は

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \rangle}{\hbar^2} &= \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2} \\ &= \begin{cases} l/2 & (j = l + 1/2) \\ -(l+1)/2 & (j = l - 1/2) \end{cases} \end{aligned}$$

よってエネルギーの分離は

$$\Delta E_{ls} = \frac{2l+1}{2} \langle V_{ls}(r) \rangle$$

のように、軌道角運動量と共に線型に増加する。 $\langle V_{ls}(r) \rangle < 0$ であるので、 $j = l + 1/2$ は $j = l - 1/2$ より下の準位にある。この相互作用によって、魔法数が説明できる。

1 粒子, 1 空孔状態

核力はアイソスピンに依らないので, $A = 15$ の ${}^{15}_7\text{N}_8$ と ${}^{15}_8\text{O}_7$ は似た準位を持つ (鏡映核) .

$A = 15, 16$ の原子核は第一励起状態は高い. ${}^{16}_8\text{O}_8$ は $1p_{1/2}$ までの軌道を全て占めている. 第一励起は $1d_{5/2}$ だが, ギャップが大きい.

$A = 17$ の ${}^{17}_8\text{O}$ と ${}^{17}_9\text{F}$ は $1d_{5/2}$ に 1 つだけ核子がある. よって $J^P = 5/2^-$ である. 第一励起は $1d_{5/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ で, スピン, パリティは $J^P = 1/2^+$ となる.

$A = 15$ は $1p_{1/2}$ がひとつ空いている (空孔). これを $1p_{1/2}^{-1}$ と書く. スピン, パリティは空孔が担うので, $J^P = 1/2^-$ である. 第一励起は $1p_{3/2} \rightarrow 1p_{1/2}$ であるので, $J^P = 3/2^+$ となる.

殻模型での磁気モーメント

原子核のスピン・軌道角運動量は核子のものの和.

$$\mu_{\text{原子核}} = \mu_N \cdot \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^A \{l_i g_l + s_i g_s\}$$

$$g_l = \begin{cases} 1(\text{陽子}) \\ 0(\text{中性子, 電荷を持たないため}) \end{cases}$$

$$g_s = \begin{cases} 5.58(\text{陽子}) \\ -3.83(\text{中性子}) \end{cases}$$

である. ${}^{16}\text{O}$ の基底状態は閉殻で, スピンと軌道角運動量は合成されて 0 となるため磁気モーメントは 0 である. また閉殻では一つの準位に必ず偶数個の核子が入るのでパリティは正である.

\therefore 全運動量 j の準位には閉殻の時 $2j + 1$ 個の核子が入る. これらは全て同じ軌道をもつので, スピン部分で完全反対称になっていなければいけない. つまり常に Spin Singlet に組む必要があり, したがって閉殻ではスピン 0 である.

1 粒子, 1 空孔のとき,

$$\mu_{\text{原子核}} = \frac{\mu_N}{\hbar} \langle \psi_{\text{原子核}} | g_l \mathbf{l} + g_s \mathbf{s} | \psi_{\text{原子核}} \rangle$$

Wigner-Eckart の定理より, ベクトル演算子 \mathbf{V} の期待値は

$$\langle jm' | \mathbf{V} | jm \rangle = \frac{\langle jm' | \mathbf{V} \cdot \mathbf{J} | jm \rangle}{\langle jm' | \mathbf{J}^2 | jm \rangle} \langle jm' | \mathbf{J} | jm \rangle$$

となる. よって,

$$\mu_{\text{原子核}} = g_{\text{原子核}} \cdot \mu_N \cdot \frac{\langle \mathbf{J} \rangle}{\hbar}$$

$$g_{\text{原子核}} = \frac{\langle jm' | g_l \mathbf{l} \cdot \mathbf{J} + g_s \mathbf{s} \cdot \mathbf{J} | jm \rangle}{\langle jm' | \mathbf{J}^2 | jm \rangle}$$

今は $J = j$ である. $2\mathbf{l} \cdot \mathbf{j} = j^2 + l^2 - s^2$ などを用いて

$$g_{\text{原子核}} = \frac{g_l \{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)\} + g_s \{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)\}}{2j(j+1)}$$

原子核のスピン M が J と等しい時, これを原子核の磁気モーメントと呼ぶ. この時, $\langle J \rangle = (0, 0, \hbar J)$ であるので,

$$\frac{|\mu_{Kern}|}{\mu_N} = g_{\text{原子核}} J = \left(g_l \pm \frac{g_s - g_l}{2l + 1} \right) \cdot J$$

補足 A : 3次元調和振動子

Hamiltonian は

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2 r^2} \right] + \frac{m\omega^2}{2} r^2$$

である. これは変数分離で解けて,

$$\mathbf{L}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

なる Y_{lm} (球面調和関数) を用いて, $\psi_{lm}(r) = \frac{R_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi)$ と置くと, $R_l(r)$ が従う方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} R_l(r) - \frac{m\omega^2}{2} r R_l(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^3} R_l(r) = E \frac{R_l(r)}{r}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} R_l(r) - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} r^2 R_l(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_l(r) = -\frac{2mE}{\hbar^2} R_l(r)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} R_l(r) + (k^2 - \lambda^2 r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}) R_l(r) = 0$$

ここで $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\lambda = \frac{m\omega}{\hbar}$.

まずはこの解の漸近的な性質を調べる. $r \rightarrow \infty$ の時は $\lambda^2 r^2$ が重要になる. このとき方程式は

$$\frac{d^2}{dr^2} R_l(r) = \lambda^2 r^2 R_l(r)$$

よって

$$R_l(r) \sim e^{-\lambda r^2/2} \quad (r \rightarrow \infty)$$

である. 次に $r \rightarrow 0$ では $\frac{l(l+1)}{r^2}$ が重要. この時は

$$\frac{d^2}{dr^2} R_l(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_l(r) = 0$$

この解のかたちとして $R_l(r) = r^\alpha \sum_i a_i r^i$ を仮定して代入すると

$$r^\alpha \sum_i a_i r^{i-2} [(\alpha+i)(\alpha+i-1) - l(l+1)] = 0$$

よって $\alpha(\alpha-1) - l(l+1) = 0$, つまり $\alpha = -l, l+1$. ここから $r \rightarrow 0$ のとき,

$$R_l(r) \sim \begin{cases} r^{l+1} \\ r^{-l} \end{cases}$$

全体の解として,

$$R_l(r) = r^{l+1} e^{-\lambda r^2} \cdot v(r)$$

と置くと, v が満たす方程式は

$$v'' + 2 \left(\frac{l(l+1)}{r} - \lambda r \right) v' - [\lambda(2l+3) - k^2] v = 0$$

ここで $t = \lambda r^2$ と置くと, クンマーの微分方程式

$$t \frac{d^2}{dt^2} v(t) + (l + 3/2 - t) \frac{d}{dt} v - \left[\frac{1}{2} \left(l + \frac{3}{2} \right) - \frac{\kappa}{2} \right] v = 0$$

を得る. この解は合流型超幾何関数で書けて,

$$v(r) = A \cdot {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left(l + \frac{3}{2} \right) - \frac{\kappa}{2}; l + \frac{3}{2}; \lambda r^2 \right) + B \cdot r^{-(2l+1)} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left(-l + \frac{1}{2} \right) - \frac{\kappa}{2}; -l + \frac{1}{2}; \lambda r^2 \right)$$

2項目は $r = 0$ で発散してしまうので解として適当ではない.

$$v(r) = A \cdot {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left(l + \frac{3}{2} \right) - \frac{\kappa}{2}; l + \frac{3}{2}; \lambda r^2 \right)$$

$r \rightarrow \infty$ で $R_l(r) \rightarrow 0$ となって欲しいので, この多項式は有限項で打ち切られるべきである. よって

$$\frac{1}{2} \left(l + \frac{3}{2} \right) - \frac{\kappa}{2} = -n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

よって

$$E_{nl} = \hbar \omega \left(2n + l + \frac{3}{2} \right)$$

となる.

クンマーの微分方程式

クンマーの微分方程式は

$$\left[z \frac{d^2}{dz^2} + (c - z) \frac{d}{dz} - a \right] u(z) = 0$$

である. 一般解は

$$u(z) = A \cdot {}_1F_1(a, c; z) + B \cdot r^{1-c} {}_1F_1(a - c + 1, 2 - c; z)$$

である. ${}_1F_1(a, c; z)$ は合流型超幾何関数で,

$${}_1F_1(a, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!}$$

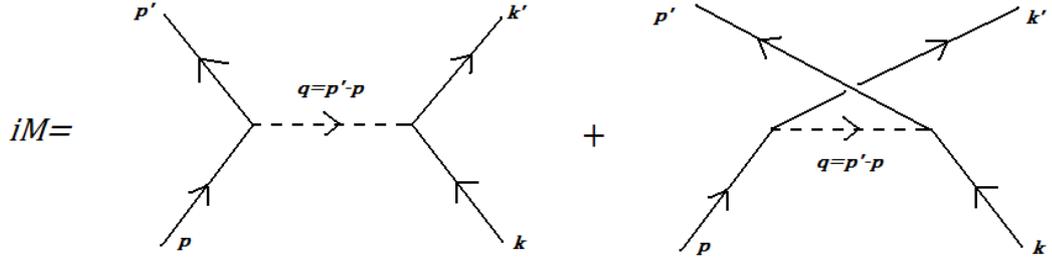
$$(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1) \quad (\text{Pochhammer's symbol})$$

補足 B：湯川ポテンシャル（場の理論から）

Fermion が Boson を媒介して相互作用するモデルを考える．相互作用 Hamiltonian は

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = g\phi\bar{\psi}\psi$$

で，2本の Fermion の線が1つの Boson の線と頂点で交わるというダイアグラムになる．遷移行列要素は



区別できる Fermion の遷移行列要素は1つ目のダイアグラムからの寄与しか無い．Feynman rule に従って計算すると，

$$i\mathcal{M}_{(p,s)(k,r)\rightarrow(p',s')(k',r')} = \bar{u}^{s'}(p')u^s(p)(-ig)\frac{i}{(p'-p)^2 - m_\phi^2}(-ig)\bar{u}^{r'}(k')u^r(k)$$

となる．以後，計算は非相対論的な極限で行う．

$$p^\mu \simeq (m, \mathbf{p})$$

従って，

$$(p' - p)^2 \simeq -|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2$$

また，Chiral 表示では

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix}$$

ここで， ξ^s を， $\xi^{s'\dagger}\xi^s = \delta^{s's}$ となるように選ぶと

$$\bar{u}^{s'}(p')u^s(p) = 2m\delta^{s's}$$

となり，結局始状態と終状態のスピンの同じものだけが残る（つまり散乱前後で各粒子のスピンの保存することが分かる）

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \frac{-ig^2}{-|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 - m_\phi^2} (2m)^2 \\ &= \frac{ig^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} (2m)^2 \end{aligned}$$

これは最低次の近似なので，非相対論的な散乱理論での Born 近似に対応する．相対論的な1粒子状態は $|p\rangle = \sqrt{2E_p}a_p^\dagger|0\rangle \simeq \sqrt{2ma_p^\dagger}|0\rangle$ となることに注意して

$$\begin{aligned} (2m)^2 \langle p_f | iT | p_i \rangle &= -2\pi(2m)^2 \delta(E_f - E_i) iT_{f,i} \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) i\mathcal{M} \end{aligned}$$

となる．Born 近似のもとでは， $\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_i$ のとき，つまり T 行列要素から $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)$ を除くと

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \int d^3x e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x})$$

となるので，比較すると

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{-g^2}{q^2 + m_\phi^2}$$

となる．これを Fourier 変換することでポテンシャルの形は

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi r} e^{-mr}$$

となり，湯川型ポテンシャル，しかも引力になることが分かる．

補足 C : Wigner-Eckart の定理

Wigner-Eckart の定理とは次の関係式のことである

$$\langle j' m'; \beta | T_M^{(L)} | j m; \alpha \rangle = (j m L M | j' m') \langle j'; \beta || T^{(L)} || j; \alpha \rangle$$

$\langle j'; \beta || T^{(L)} || j; \alpha \rangle$ は磁気量子数 m, m', M に依存しない数である．

∴

(step1)

$|LM; jm; \alpha \rangle \equiv T_M^{(L)} |jm; \alpha \rangle$ はテンソル積 $|LM \rangle \otimes |jm \rangle$ のように変換する．これは実際に空間回転演算子 P_R を作用させて確認できる．

$$P_R |LM; jm; \alpha \rangle = P_R T_M^{(L)} P_R^{-1} P_R |jm; \alpha \rangle = \sum_{M', m'} D_{M'M}^{(L)} D_{m'm}^{(j)} T_{M'}^{(L)} |jm'; \alpha \rangle = \sum_{M', m'} D_{M'M}^{(L)} D_{m'm}^{(j)} |LM; jm'; \alpha \rangle$$

(step2)

step1 より，

$$|JM'; T^{(L)}, j, \alpha \rangle \equiv \sum_m (j m L M' - m | JM') T_{M'-m}^{(L)} |jm; \alpha \rangle$$

は $|J\mu \rangle$ と同じように変換する．両辺に $(j m' L M | JM')$ を掛けて， J について和をとると

$$\sum_J (j m' L M | JM') |JM'; T^{(L)}, j, \alpha \rangle = \sum_m \sum_J (j m L M' - m | JM') (j m' L M | JM') T_{M'-m}^{(L)} |jm; \alpha \rangle$$

クレプシュ-ゴルダン係数の直交性から

$$\sum_J (j_1 m_1 j_2 m_2 | JM) (j_1 m'_1 j_2 m'_2 | JM) = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}$$

なので

$$\sum_J (j m' L M | JM') |JM'; T^{(L)}, j, \alpha \rangle = \sum_m \delta_{m m'} \delta_{M'-m, M} T_{M'-m}^{(L)} |jm; \alpha \rangle = \delta_{M'-m', M} T_{M'-m'}^{(L)} |jm'; \alpha \rangle$$

ここで $M' - m' = M$ のときは

$$T_M^{(L)}|jm; \alpha\rangle = \sum_J (jmLM|JM+m)|JM+m; T^{(L)}, j, \alpha\rangle$$

を得る . これと $|j'm'; \beta\rangle$ との内積をとると

$$\langle j'm'; \beta|T_M^{(L)}|jm; \alpha\rangle = \sum_J (jmLM|JM+m)\langle j'm'; \beta|JM+m; T^{(L)}, j, \alpha\rangle$$

ここで $\langle j'm'; \beta|JM+m; T^{(L)}, j, \alpha\rangle \propto \delta_{j'J}\delta_{m', M+m}$ であるので

$$\langle j'm'; \beta|T_M^{(L)}|jm; \alpha\rangle = (jmLM|j'M+m)\langle j'm'; \beta|j'm'; T^{(L)}, j, \alpha\rangle$$

あとは $\langle j'm'; \beta|j'm'; T^{(L)}, j, \alpha\rangle$ が m' に依存しないことを示す .

$$\begin{aligned} j_-|j'm'; T^{(L)}, j, \alpha\rangle &= \sqrt{(j'+m')(j'-m'+1)}|j'm'-1; T^{(L)}, j, \alpha\rangle \\ \langle j'm'-1; \beta|j_- &= \sqrt{(j'+m')(j'-m'+1)}\langle j'm'; \beta| \end{aligned}$$

この1つ目の式に $\langle j'm'-1; \beta|$ を掛けると

$$\langle j'm'-1; \beta|j_-|j'm'; T^{(L)}, j, \alpha\rangle = \sqrt{(j'+m')(j'-m'+1)}\langle j'm'-1; \beta|j'm'-1; T^{(L)}, j, \alpha\rangle$$

また , 2つ目の式に $|j'm'; T^{(L)}, j, \alpha\rangle$ を掛けると

$$\langle j'm'-1; \beta|j_-|j'm'; T^{(L)}, j, \alpha\rangle = \sqrt{(j'+m')(j'-m'+1)}\langle j'm'; \beta|j'm'; T^{(L)}, j, \alpha\rangle$$

この二つの式から ,

$$\langle j'm'-1; \beta|j'm'-1; T^{(L)}, j, \alpha\rangle = \langle j'm'; \beta|j'm'; T^{(L)}, j, \alpha\rangle$$

を得る . これは $\langle j'm'; \beta|j'm'; T^{(L)}, j, \alpha\rangle$ が m' によつていないことを示す . よつて

$$\langle j'm'; \beta|T_M^{(L)}|jm; \alpha\rangle = (jmLM|j'm')\langle j'; \beta||T^{(L)}||j; \alpha\rangle$$

と書ける .