

4 章

担当：藤林

平成 23 年 4 月 26 日

4 散乱

4.1 散乱課程の一般的考察

$$a + b \rightarrow c + d + \dots$$

a : ビーム粒子 (エネルギーは既知) . b : 標的粒子 (target) . $c, d, \dots$: 反応生成物

弾性散乱

$$a + b \rightarrow a' + b'$$

・ 散乱前後の粒子は同じ . 粒子 a のエネルギーと散乱角がわかれば , 運動学的に粒子 b の生成角とエネルギーについて知ることが出来る .

・ 小さい構造を知るには高エネルギーのビームが必要 . ド・ブロイ波長程度の分解能を持つ .

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{2mc^2 E_{kin} + E_{kin}^2} \simeq \begin{cases} \hbar / \sqrt{2mE_{kin}} & (E_{kin} \ll mc^2) \\ \hbar c / E_{kin} \simeq \hbar c / E & (E_{kin} \gg mc^2) \end{cases} \quad (4.1)$$

$$(E_{kin} = E - mc^2)$$

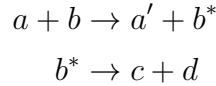
Δx ほどの広がりを分解するには不確定性関係より

$$pc \gtrsim \frac{\hbar c}{\Delta x} = \frac{200 \text{fm} \cdot \text{MeV}}{\Delta x} \quad (4.2)$$

が必要である .

非弾性散乱

例： b が励起して，その後 c, d に崩壊



・ a' のみを観測：inclusive 測定． a', c, d すべてを観測：exclusive 測定（バリオン数の保存が成り立っているなら）ビーム粒子が消える反応もある（図 c), d)）．

4.2 断面積

衝突粒子間に反応が起こる”確率”みたいなもの．

・ フラックス（単位面積あたり，単位時間あたりに入射するビーム粒子数）

$$\Phi_a = \frac{\dot{N}_a}{A} = n_a v_a \quad (4.3)$$

$\dot{N}_a, n_a, v_a$ はそれぞれ，ビーム粒子の単位時間あたりの入射数，密度，速度． A はビーム束の断面積．

・ 反応率（単位時間あたりの反応数）散乱中心がビームから見て重なりあっていない，かつ各散乱中心で散乱が独立に起こるときは

$$\dot{N} = \Phi_a \cdot N_b \cdot \sigma_b \quad (4.4)$$

N_b は標的中の散乱中心の数．

この σ_b を，幾何学的反応断面積と呼ぶ（各散乱中心がビームに対して広げている面積）．

$$\sigma_b = \dot{N} / \Phi_a N_b \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\text{単位時間あたりの反応数}}{\text{単位時間，単位面積あたりのビーム粒子数} \times \text{散乱中心数}} \\&= \frac{\text{単位時間あたりの反応数}}{\text{単位時間あたりのビーム粒子数} \times \text{単位面積あたりの散乱中心数}}\end{aligned}$$

これは，ビーム粒子の種類やエネルギーと関係なしに定義されたものだが，実際には反応率がエネルギーに非常に依存する例もあるので，全断面積 $\sigma_{tot} = \sigma_{tot}(E)$ を定義する．定義は幾何学的反応断面積と同じである．

全断面積は弾性反応断面積と非弾性反応断面積に分割でき，非弾性反応断面積は更に反応チャンネルごとに分割できる

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel} \quad (4.6)$$

$$\sigma_{inel} = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots$$

反応断面積は面積の次元を持つ．単位として，barn = 10^{-28} m, millibarn = 10^{-31} m がよく使われる．

4.3 ルミノシティ

定義は

$$\mathcal{L} \equiv \Phi_a \cdot N_b \quad (4.9)$$

$$= \dot{N}_a \cdot n_b d = n_a v_a N_b \quad (4.10)$$

貯蔵リングでの衝突でもこの関係は成り立つ． N_a, N_b 個の粒子が入ったパルス
を j 個， v の速さで周長 U のリングの中で衝突させたとき，ビームの断面積を A
とすれば

$$\mathcal{L} = \frac{N_a N_b j v / U}{A} \quad (4.11)$$

ルミノシティの意味としては単位時間あたりの反応数が

$$\dot{N} = \sigma_{tot} \cdot \mathcal{L}$$

と書けるので，ルミノシティが大きいほど反応数が多い，すなわちイベントをた
くさん取れるということになる．そのルミノシティは，ビームの断面積を小さく
するほど大きくなる．

貯蔵リングでの衝突ではルミノシティを長時間積分したものを使う． $\sigma_{tot} \cdot \int dt \mathcal{L}$
が，測定時間内の反応数となる．

例：ルミノシティの積分値が 100 pb^{-1} ，断面積が 1 nb のとき，合計で

$$1 \text{ nb} \cdot 100 \times 10^3 \text{ nb}^{-1} = 100000 \text{ 個}$$

の反応が見込める

微分断面積

反応後の粒子が立体角 Ω に放出される断面積 $\frac{d\sigma}{d\Omega}(E, \theta)$ ．

更に，散乱粒子のエネルギースペクトルから，小さな範囲 $E' \sim E' + \Delta E$ を取
り出して測定するときは2重微分断面積 $\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}$ を測っていることになる．全断面積
との関係は

$$\sigma_{tot}(E) = \int_0^{E'_{max}} dE' \int_{\text{全立体角}} d\Omega \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \quad (4.14)$$

である．

4.4 黄金律

断面積が理論からどう出るか
遷移行列要素

$$\mathcal{M}_{fi} \equiv \langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle = \int d^3x \psi_f^* \mathcal{H}_{int} \psi_i \quad (4.15)$$

終状態が体積 V , 運動量 $p \sim p + dp$ の間のある状態数は

$$dn(p) = \frac{V \cdot 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \quad (4.16)$$

また , 粒子のエネルギーと運動量の関係

$$dE = v dp \quad (4.17)$$

より , エネルギーが $E \sim E + dE$ の間にある終状態の数 , すなわち状態密度は

$$\varrho(E) = \frac{dn(E)}{dE} = \frac{V \cdot 4\pi p^2 dp}{v \cdot (2\pi\hbar)^3} \quad (4.18)$$

Fermi の第 2 黄金率によれば , 標的粒子 , 入射粒子あたりの反応率は

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot \varrho(E_f) \quad (4.19)$$

となる , 一方 , $V = N_a/n_a$ として

$$W = \frac{\dot{N}(E)}{N_a N_b} = \frac{\sigma v_a}{V} \quad (4.20)$$

と書けるので , 断面積は

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_a} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot \varrho(E_f) \cdot V \quad (4.21)$$

このように , 行列要素 $\mathcal{M}_{fi}$ がわかれば , 断面積は計算することができる .
黄金率はスペクトロスコーピーの過程でも適用可能で , この場合崩壊寿命 τ は

$$W = \frac{1}{\tau} \quad (4.22)$$

という関係がある .

4.5 ファインマン図形

$\mathcal{M}_{fi}$ を計算するときの項の速記法 . ここでは反応過程の図示に使う . vertex が
多い図形ほど , 摂動の高次の寄与となる .

Fermi の黄金律

Hamiltonian が

$$H = H_0 + V$$

と書け, V は小さいとする. 状態ベクトルの相互作用表示は

$$|\psi(t)\rangle_I = \exp\left(-\frac{H_0}{i\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle_S$$

演算子は

$$O_I(t) = \exp\left(-\frac{H_0}{i\hbar}t\right) O_S \exp\left(\frac{H_0}{i\hbar}t\right)$$

状態ベクトルの時間発展は

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = V_I(t) |\psi(t)\rangle_I$$

となる. これを形式的に解くと

$$|\psi(t)\rangle_I = T \exp\left(\int_{t_0}^t dt' V_I(t')\right) |\psi(t_0)\rangle_I$$

ここからは展開の 1 次までとる.

$$|\psi(t)\rangle_I = |\psi(t_0)\rangle_I + \int_{t_0}^t dt' V_I(t') |\psi(t_0)\rangle_I$$

$|\psi(t)\rangle_I$ を, 非摂動 Hamiltonian H_0 の固有状態 $|\varphi_n\rangle$ で展開して

$$|\psi(t)\rangle_I = \sum_n c_n(t) |\varphi_n\rangle$$

これを代入して計算すると,

$$c_n(t) = c_n(t_0) + \sum_m c_m(t_0) \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_{nm}(t')$$

ここで, $V_{nm}(t) = \langle \varphi_n | V_I(t) | \varphi_m \rangle$. この結果を連続状態に対して適用する. 簡単のため, H_0 の固有状態は連続とし, $t_0 = 0$ とする.

$$|\psi(t)\rangle_I = \int d\nu c_\nu(t) |\varphi_\nu\rangle$$

$c_\nu(0) = \delta(\nu - \nu_0)$ とすると ,

$$\begin{aligned} c_\nu(t) &= c_\nu(0) + \int d\mu \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' V_{\nu\mu}(t') c_\mu(0) \\ &= \delta(\nu - \nu_0) + \int d\mu \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' V_{\nu\mu}(t') \delta(\nu - \nu_0) \\ &= \delta(\nu - \nu_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' V_{\nu\nu_0}(t') \end{aligned}$$

$\nu \neq \nu_0$ のとき ,

$$V_{\nu\nu_0}(t) = \exp\left(\frac{E_{\nu_0} - E_\nu}{i\hbar}t\right) \langle \varphi_\nu | V | \varphi_{\nu_0} \rangle$$

なので ,

$$c_\nu(t) = \frac{\langle \varphi_\nu | V | \varphi_{\nu_0} \rangle}{E_{\nu_0} - E_\nu} \left[\exp\left(\frac{E_{\nu_0} - E_\nu}{i\hbar}t\right) - 1 \right]$$

よって遷移確率 $|c_\nu(t)|^2$ は

$$|c_\nu(t)|^2 = \frac{|\langle \varphi_\nu | V | \varphi_{\nu_0} \rangle|^2}{(E_{\nu_0} - E_\nu)^2} \left[2 \sin\left(\frac{E_{\nu_0} - E_\nu}{2\hbar}t\right) \right]^2$$

$\left(\frac{\sin \omega t}{\omega}\right)^2 \rightarrow t\pi\delta(\omega)(t \rightarrow \infty)$ と書けるので , t が大きいときはこの置換えをして

$$\begin{aligned} |c_\nu(t)|^2 &= |\langle \varphi_\nu | V | \varphi_{\nu_0} \rangle|^2 \frac{1}{\hbar^2} \pi \delta\left(\frac{E_{\nu_0} - E_\nu}{2\hbar}\right) \\ &= |\langle \varphi_\nu | V | \varphi_{\nu_0} \rangle|^2 \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_{\nu_0} - E_\nu) \end{aligned}$$

よって状態数 $d\nu$ あたりの遷移確率 $d\omega$ は ,

$$d\omega_{\nu_0 \rightarrow \nu} = |\langle \varphi_\nu | V | \varphi_{\nu_0} \rangle|^2 \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_{\nu_0} - E_\nu) d\nu$$

ここで ,

$$d\nu = \frac{d\nu}{dE} dE = \varrho(E) dE$$

なので , $\nu_0 \rightarrow i, \nu \rightarrow f$ の置き換えで , Fermi の黄金律

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \varrho(E_f)$$

を得る .