type I の down conversion について

1995 年度入学　(0081)　東 武大

平成 11 年　1 月　7 日

1　結晶の角度の見積りについて

本レポートは、先日 Paul G. Kwiat 氏が fax でおくって下さった御自身の博士論文の appendix のページを基にした議論である。まず、Yariv の教科書にあったように、位相整合条件、つまり pump → signal+idler において

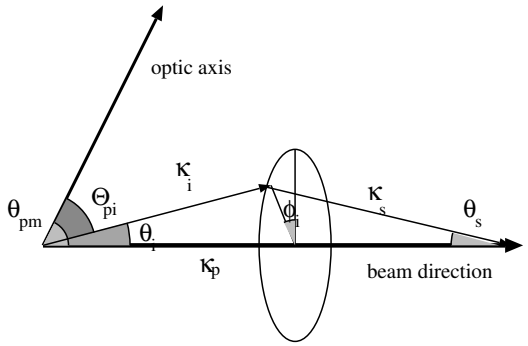

図 1: down convertesion における位相整合条件の schematic

運動量ベクトルが保存されていることが down conversion の出力を最大にする条件となる。

1.1　type I、second harmonic generation についての考察

縦方向と横方向を考慮することにより、

$$\kappa_p = \kappa_s \cos\theta_s + \kappa_i \cos\theta_i,\ \kappa_s \sin\theta_s + \kappa_i \sin\theta_i = 0 \tag{1}$$

を得る。三酸化沃化リチウムは type I の down conversion を起こす、つまり down conversion の光子の偏極は共通であり、e → o+o となる。そこで、屈折率と振動数の関係式は、以下のようになる。

$$\kappa_p = \omega_p\left(\frac{\sin^2\theta_{pm}}{n_e^2(\omega_p)} + \frac{\cos^2\theta_{pm}}{n_o^2(\omega_p)}\right)^{-1/2},\ \ \kappa_s = \omega_s n_o(\omega_s),\ \ \kappa_i = \omega_i n_o(\omega_i) \tag{2}$$

私たちの実験の down conversion では、second harmonic oscillation を仮定するので、$\omega_p = \omega_s + \omega_i$および$\omega_s = \omega_i$であると考える。これがこの系におけるエネルギー保存則となっている。 よって、$n_o(\omega_s) = n_o(\omega_i)$ であり、$\omega_s = \omega_i = \omega$とおくと、$\omega_p = 2\omega$である。幾何学的条件より $\cos\theta_i = \cos\theta_s$となることは自明である。

この条件で方程式を解けば、縦方向の運動量の関係式は自明な式となる。横方向の関係式は、

$$2\omega\left(\frac{\sin^2\theta_{pm}}{n_e^2(2\omega)} + \frac{\cos^2\theta_{pm}}{n_o^2(2\omega)}\right)^{-1/2} = 2\omega n_o(\omega)\cos\theta_i \tag{3}$$

をえる。これがθ_{pm}とθ_iの関係式となるので、θ_{pm}を指定すれば、

$$\theta_i = \arccos\left(\left(\frac{\sin^2\theta_{pm}}{n_e^2(2\omega)} + \frac{\cos^2\theta_{pm}}{n_o^2(2\omega)}\right)^{-1/2}\frac{1}{n_o(\omega)}\right) \tag{4}$$

で決まってしまう。θ_{pm}とθ_iの値の対応は下の表のようになる。屈折率の値は波長 355nm → 710nm+710nm の条件のもと、Sellmeiner 方程式に値を代入して求めている。

θ_{pm}	51.7	52.4	55.0	60.0	65.0	70.0	75.0	80.0	85.0	90.0
θ_i	1.49	3.00	5.77	8.81	10.81	12.25	13.30	14.01	14.43	14.56

1.2 type I で、必ずしも SHG とは限らない時

次に、より一般化した形として、必ずしも signal 光と idler 光の波長が一致しない場合を考察する。この時は式 (2) までは、上記の議論がそのまま通用する。このときは、$\omega_s = \omega_p - \omega_i$が通用するのみであるから、まず、横方向、縦方向の条件はそれぞれ、

$$\omega_p(\frac{\sin^2\theta_{pm}}{n_e^2(\omega_p)} + \frac{\cos^2\theta_{pm}}{n_o^2(\omega_p)})^{-1/2} = (\omega_p - \omega_i)n_o(\omega_p - \omega_i)\cos\theta_s + \omega_i n_o(\omega_i)\cos\theta_i \tag{5}$$

$$(\omega_p - \omega_i)n_o(\omega_p - \omega_i)\sin\theta_s = \omega_i n_o(\omega_i)\sin\theta_i \tag{6}$$

を得る。これを用いて、とりあえず θ_sを消去すると、最終的には以下の関係式で idler 光の広がりを得ることができる。

$$\theta_i = \arccos(\frac{\omega_p^2(\frac{\sin^2\theta_{pm}}{n_e^2(\omega_p)} + \frac{\cos^2\theta_{pm}}{n_o^2(\omega_p)})^{-1} + \omega_i^2 n_o^2(\omega_i) - (\omega_p - \omega_i)^2 n_o^2(\omega_p - \omega_i)}{2\omega_p\omega_i n_o(\omega_i)(\frac{\sin^2\theta_{pm}}{n_e^2(\omega_p)} + \frac{\cos^2\theta_{pm}}{n_o^2(\omega_p)})^{-1/2}}) \tag{7}$$

以下のグラフは、idler 光のなす角と、idler 光の波長との関係をグラフにしたものである。

1.3 type II の結晶について

今回のゼミでは発表しそびれたが、type II の結晶についても同様の考察を加えることにより、ring のでき具合についての評価をすることが可能となる。今度は type II なので、e → o+e の偏光を仮定する。そうすれば、位相整合条件 (1) はそのまま成立するものの、波数ベクトルは、

$$\kappa_p = \omega_p n_e(\omega_p, \theta_{pm}), \quad \kappa_s = \omega_s n_o(\omega_s), \quad \kappa_i = \omega_i n_e(\omega_i, \Theta_i) \tag{8}$$

となる。また、上の図の幾何学的な条件より、

$$\cos\Theta_i = \cos\theta_p\cos\theta_i + \sin\theta_p\sin\theta_i\cos\phi_i \tag{9}$$

をえる。これらより、式 (1) を用いると、

$$\kappa_{p,\theta_{pm}}^2 - \kappa_s^2 - 2\kappa_{p,\theta_{pm}}\kappa_{i,\Theta_i}\cos\theta_i + \kappa_{i,\Theta_i}^2 = 0 \tag{10}$$

をえる。そこで、式 (10) と式 (9) を連立させて解けば、角度をプロットしていくことができる。手順としては、

- まず、$\theta_s = \theta_i = 0$ であるとして、second harmonic condition、つまり$\omega_s = \omega_i$を仮定して、θ_{pm}の値を求める。このとき、式 (9) は、自明な式$\Theta_i = \theta_{pm}$に落ちるので、

$$\frac{4}{\frac{\sin^2\theta_{pm}}{n_e^2(2\omega)} + \frac{\cos^2\theta_{pm}}{n_o^2(2\omega)}} + \frac{1}{\frac{\sin^2\theta_{pm}}{n_e^2(\omega)} + \frac{\cos^2\theta_{pm}}{n_o^2(\omega)}} - \frac{4}{\sqrt{(\frac{\sin^2\theta_{pm}}{n_e^2(2\omega)} + \frac{\cos^2\theta_{pm}}{n_o^2(2\omega)})(\frac{\sin^2\theta_{pm}}{n_e^2(\omega)} + \frac{\cos^2\theta_{pm}}{n_o^2(\omega)})}} = n_0^2(\omega) \tag{11}$$

  を mathematica などで解けば良い。

- 次に、適当にϕ_iに値を代入していって、上のプロセスでθ_{pm}の値を知った上で、式 (9) を式 (10) に代入して、数値的にθ_iを求めれば良い。これができれば、式 (1) より、θ_sの値は明らかである。これらの情報から、光の出る点を plot していけば良い。

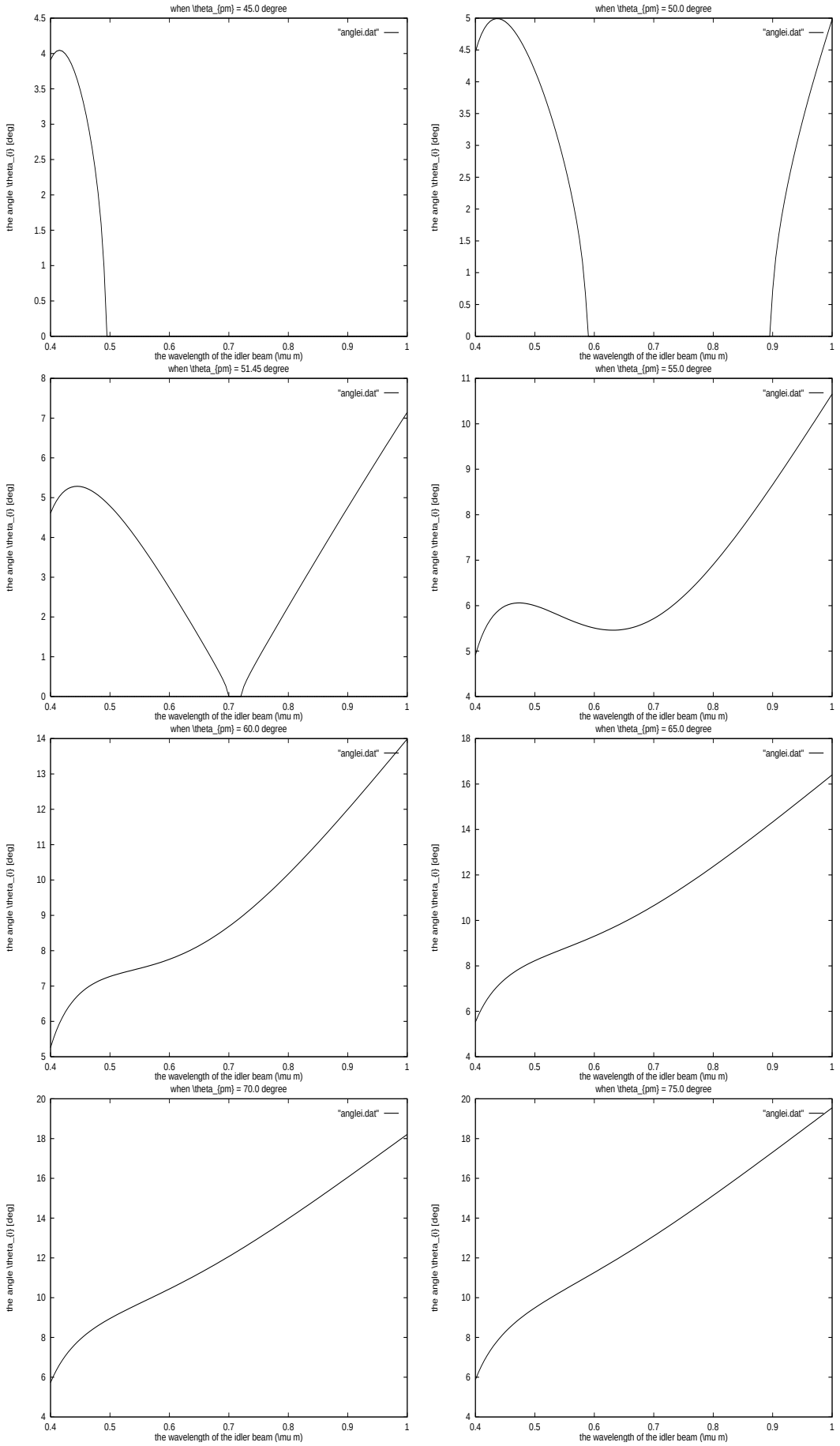

図 2: down convertesion における、idler 光波長と、idler 光の角度の関係。光学軸と pump 光のなす角を左上 45.0 °、右上 50.0 °、左中上 51.45 °、右中上 55.0 °、左中下 60.0 °、右中下 65.0 °、左下 70.0 °、右下 75.0 ° とする

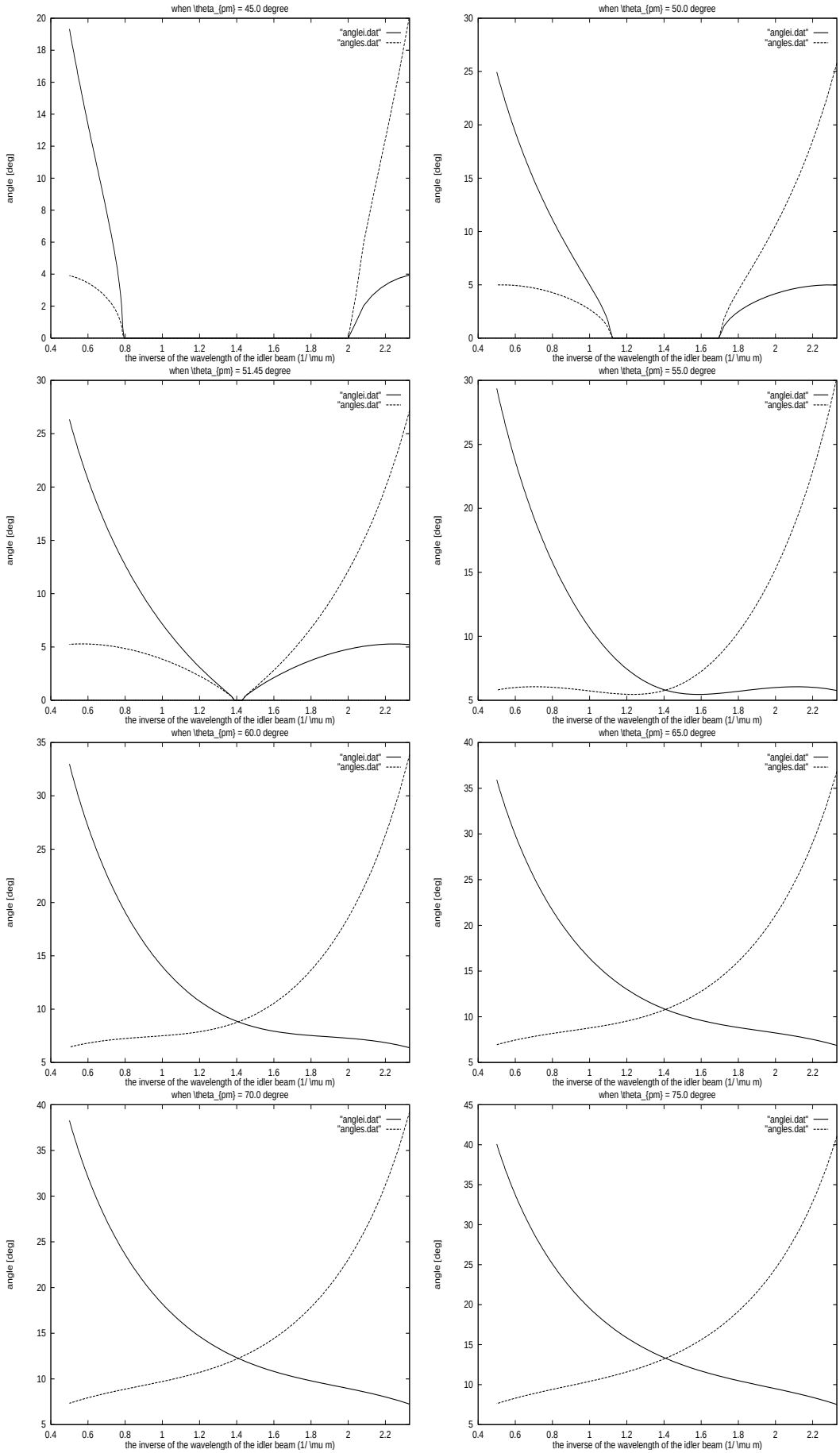

図 3: 今度は横軸を idler 光の波長の逆数にとったもの。実線が idler 光、点線が signal 光を表す。期待される通り、グラフは対称となる。光学軸と pump 光のなす角を左上 45.0 °、右上 50.0 °、左中上 51.45 °、右中上 55.0 °、左中下 60.0 °、右中下 65.0 °、左下 70.0 °、右下 75.0 ° とする

2　12/30 の三酸化沃化リチウムを用いた実験について

12/30 に、三酸化沃化リチウムを用いて、down conversion による ring を観察する実験を行なった。まず、この実験の set up は以下に記される通りである。以下、この setup の下で、ring の観察実験を行なった。角度θ_iの

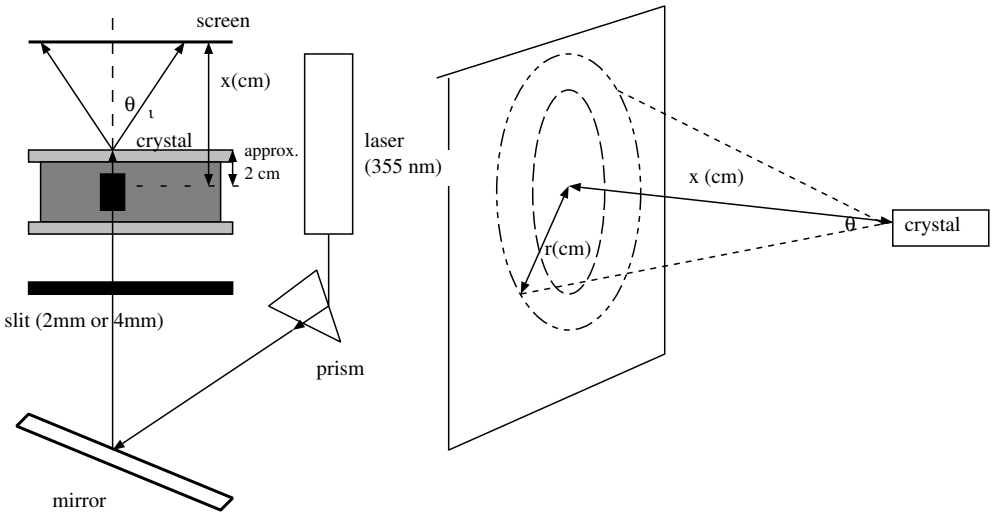

図 4: 三酸化沃化リチウムの ring の観察の setup、及び screen 上に現れた結果

理論値は前説で議論した通りであり、式 (7) に従うはずである。結果、上の図に示す通り虹色にリングが生じる場合と、分散がない場合が起こった 。すると、以下の表のような結果を得られた。なお、他にも観察したデータはあり、その写真も撮っているが、定性的な図だけは、別の HP にある、写真を参照頂きたい。

写真番号	角度 (目盛) °	θ_{pm}	特徴	ring 半径	色 ・波長	距離 x	θ_i
4 及び 5	不明	不明	スクリーンとの距離 35cm	4.2cm	赤 (780nm)	37.0cm	6.47 °
6 及び 7	不明	不明	スクリーンとの距離 20cm	4.5cm	赤 (780nm)	22.0cm	11.56 °
9	229 °	52.4 °	ケース軸を beam に平行	2.5cm	赤 (620nm)	18.0cm	7.90 °
10	222 °	不明	可視光域で分散なし	3.7cm	様々な色混じる	18.0cm	11.62 °
11 ~ 13	227 °	不明	緑が外、赤が内	3.4cm	緑 (500nm)	18.0cm	10.69 °
11 ~ 13	227 °	不明	上記と同条件	2.8cm	赤 (620nm)	16.0cm	8.84 °

表 1: type I の down conversion の光の屈折角度

ここで前節で求めた理論値と、今回田中研究室で得た実験値とに大きなギャップがあることに気づいた。今回の実験において、分散がなく様々な波長のリングが重なって見える現象それ自体は、前節の理論から予測できることである。例えば、前節の 55 ° のグラフは、可視光域 400nm ~ 620nm で idler 光の分散角が横ばいになっているのが見られる。そして、可視光に関していえば、前節の理論計算より、55.0 ° より小さければ緑のリングの方が外側に来て、大きければ赤いリングの方が外側に来る。つまり、上記の実験装では、θ の目盛値を大きくすれば、光学軸とレーザーのなす角は小さくなる。しかし、今回の実験値と考え合わせると、以下の 2 つの点でおかしなところが生じている。

- まず、現実の分散のないリングのできる広がり角$\theta_i = 11.62$ と、大きく値が異る。このような広がりθ_iを出そうと思えば、θ_{pm}は 65 ° 程度の値は必要なはずなのである。よって、55 ° でこのような分散のないリングができることは解せない。

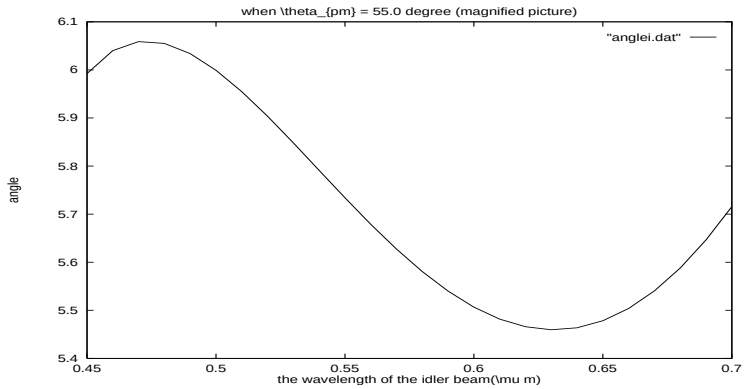

図 5: 角度 55.0 ° のときに、図のように分散のない状態が見られる

- もし、分散のないリングができる時の角度が 55 ° であるならば、赤が内側に来る状態としてはあと 3.5 ° 程度θ_{pm}を減ずれば、second harmonic generation の付近から解を持ち得ない状態が生じる。つまり、定性的には中心付近から ring がぼやけて出てくる描像になる筈なのであるが、この実験ではそのような結果を見ることはできなかった。このことは、さらに 7 ~ 8 ° 回転させてもまだ ring が出続けていた状況とは矛盾する。

今回の実験の反省点について。まず、今回は三酸化沃化リチウムによる type I の down conversion による ring はうまく出ていた。我々が実際にこの目で down conversion の現象を目にすることができた点において、今回の実験の意義は大きかった。今のところ広がりの角度θ_iの、定量的な理論値と実験値の落差は理解できていないものの、定性的には、分散のない状態があるところで見られた点やその前後の振舞いなどは、計算で予測した通りの様相を見ることができた。