暗線間隔の測定による、slit 幅の calibration

東 武大 ・古結尚 ・寺口俊介

平成 11 年 1月 26 日

01/19 までの宿題として、私たちは可変 slit を製作した。本日行なった実験の目的は、単 slit 回折の手法を通してその性能をテストすることにある。

1 Fraunhofer 回折について

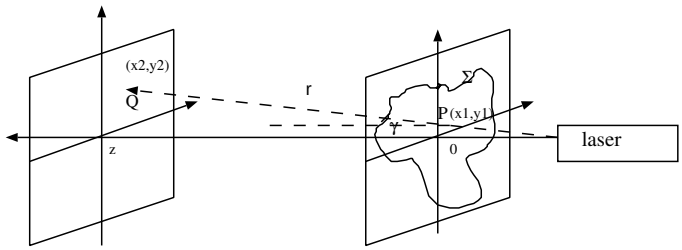


図 1: 光の回折の Fraunhofer 近似について

上の図のように、光源からの光が開口を通って、後ろの screen に照射されるとする。このとき、点 $(x_1, y_1, 0)$ を通った成分は球面波として考えると、振幅が、

$$u(x_2, y_2, z) = \frac{i}{\lambda_0} \int\int_{\Sigma} u(x_1, y_1, 0) \frac{\exp(-ik_0 r)}{r} \cos\gamma dx_1 dy_1 \tag{1}$$

として得られる。ここで、Σは $z = 0$ における開口の領域を表す。(rは点 PQ 間の距離、γは PQ の方向からの z軸からの傾き角である。よって、$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z^2}$として得られる。Fraunhofer 近似では、screen の面間隔に比べて screen の上の座標 x_2や y_2が小さく、かつ光源から slit までの距離より、slit から screen までの距離の方が十分大きいことから、x_1, y_1より x_2, y_2の方が遥かに大きいとする。そうすれば rの式を展開して、

$$r = z\sqrt{1 + (\frac{x_2 - x_1}{z})^2 + (\frac{y_2 - y_1}{z})^2} = z + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2z} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{z} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z} + \cdots \tag{2}$$

であり、このうち第三項までをとれば、

$$A_0(x_2, y_2, z) = \frac{i \exp(-ik_0 z)}{\lambda_0 z} \exp(-\frac{ik_0}{z}(x_2^2 + y_2^2)) \tag{3}$$

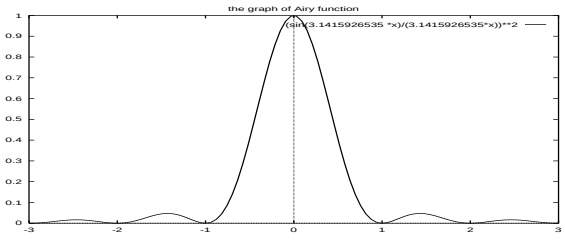
と定義するとき、光源の強さが一定であるとすれば、

$$u(x_2, y_2, z) = A_0(x_2, y_2, z) u_0 \int\int_{\Sigma} \exp(\frac{2\pi i}{z\lambda}(x_1 x_2 + y_1 y_2)) dx_1 dy_1 \tag{4}$$

である。特に、開口Σの形状が辺の長さが a, b であるような長方形の slit を想定すれば、式 (4) を計算して、

$$A_0(x_2, y_2, z) u_0 ab \frac{\sin(\frac{a x_2 \pi}{\lambda_0 z})}{\frac{a x_2 \pi}{\lambda_0 z}} \frac{\sin(\frac{b y_2 \pi}{\lambda_0 z})}{\frac{b y_2 \pi}{\lambda_0 z}} \tag{5}$$

を得る。一般に Airy 関数のグラフの概形は下図のようになる。よって、特に slit 間隔 a を動かすとき、暗部にな



るのは$\frac{ax_2\pi}{\lambda_0 z} = n\pi(n$ は整数) のとき、つまり $x_2 = \frac{\lambda_0 z}{a}n$ で得られることが分かる。従って、n 次の暗線の間隔は

$$\frac{2\lambda_0 z}{a}n \tag{6}$$

で得られることが分かる。

2 実験の setup 及び測定結果

実験の setup は下図のように行ない、slit としては図のような可変 slit を用いて a(=slit 間隔) を変えられるようにした。ここで、$z = 1.54_{(m)}$、$\lambda_0 = 6.328 \times 10^{-7}_{(m)}$ であるとした。以下の実験データにおいて、1,2,3 次までの

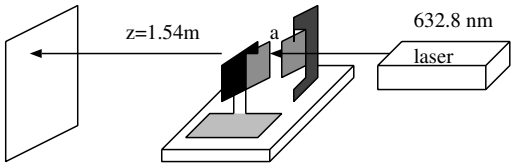


図 2: slit の性能測定の setup

回折の暗線の長さを測定し、測定は 2 回行なった。

データ解析の変更点について。まず、実験は 2 回行いそれぞれについてのデータについて分けて見ることにする。それぞれの読み幅に対して原則 3 次までの暗線をとっている。n 次の暗線の幅は、n で割って、式 (6) の n=1 のときにあたる値を $x_i(i = 1, 2, 3)$ とする。つまり

$$x_i = (measured\ data)/i \tag{7}$$

とする (表の値は直接の測定値)。そうすれば平均値は $X_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ で得ることができる。そして、この測定値の標準偏差をσ_nとすると、$\sigma_n^2 =< x_i^2 > - < x_i >^2$(以下¡X¿は X の平均値) である。装置の精度に関する最良推定値をえるには、$s_n^2 = \sigma_n^2 \frac{n}{n-1}$として、この不偏平均偏差 s_nを採用すれば良い。つぎに、実験値の中央値として受け入れられるべきは平均値 X_nであったが、その値の精度の最良推定値は各 x_iではなく X_nの不偏平均偏差である。その値は

$$S_n = \frac{s_n}{\sqrt{n}}(= \frac{\sigma_n}{\sqrt{n-1}}) \tag{8}$$

である。このとき、実験データは $X_n \pm S_n$であると解釈できる。

しかしながら、私たちが欲しい値は X_nそのものではなく、slit の間隔 $a = \frac{2\lambda_0 z}{X_i}$であり、その精度について論じなければならない。一般に $z = f(x)$ の関係式が成立する時、公式

$$\sigma^2(z) = |f'(X)|^2\sigma^2(x) \tag{9}$$

(X は x の平均値) が成り立つ。なぜなら、$z+\delta z$だけ偏差があれば、$f(x)$ を Taylor 展開することで $z+\delta z = f(x)+\delta x f'(x)+(\delta x)^2 f''(x)+\cdots$が成立する。よって、$|\delta z|^2 = |\delta x|^2|f'(x)|^2+\mathcal{O}(\delta x^3)$ である。よって 3 次以降は効いてこないので標準偏差は式 (9) のようになる。よって、暗線間隔について求めた平均値と不偏誤差 S_nを、slit 間隔の物理量として考えるためには、

$$X_{slit} = \frac{2\lambda_0 z}{X_n},\ S_{slit} = |\frac{2\lambda_0 z}{X_n^2}|^2 S_n \tag{10}$$

を採用すれば良い。 次に 2 回以上の実験データを総合して考える時には、重みつき平均をとらなければならず、

$$X_{n,m} = \frac{1}{S_n^{-2}+S_m^{-2}}(\frac{X_n}{S_n^2}+\frac{X_m}{S_m^2}),\ S_{n,m}^2 = \frac{S_n^2 S_m^2}{S_n^2+S_m^2} \tag{11}$$

を用いなければならない。なお、表中の物理量の単位はすべて (mm) とする。

x stage	1st1 次	1st2 次	1st3 次	X_n	S_n	X_{slit}	S_{slit}
18.30mm	2.3mm	4.5mm	6.6mm	2.25mm	0.0289mm	0.873mm	0.0112mm
18.35mm	2.3mm	4.5mm	7.0mm	2.29mm	0.0242mm	0.856mm	0.0090mm
18.40mm	2.0mm	4.7mm	7.1mm	2.23mm	0.0120mm	0.878mm	0.0468mm
18.45mm	2.6mm	5.0mm	7.6mm	2.54mm	0.0294mm	0.772mm	0.0089mm
18.50mm	2.6mm	5.1mm	8.2mm	2.62mm	0.0547mm	0.748mm	0.0156mm
18.55mm	2.7mm	6.0mm	9.0mm	2.90mm	0.1000mm	0.678mm	0.0234mm
18.60mm	3.1mm	6.3mm	9.2mm	3.11mm	0.0242mm	0.633mm	0.0049mm
18.65mm	3.3mm	6.7mm	10.0mm	3.32mm	0.0147mm	0.590mm	0.0026mm
18.70mm	3.6mm	7.4mm	10.8mm	3.63mm	0.0333mm	0.541mm	0.0050mm
18.75mm	4.8mm	8.0mm	12.1mm	4.28mm	0.2613mm	0.459mm	0.0281mm
18.80mm	4.6mm	9.0mm	13.8mm	4.57mm	0.0333mm	0.430mm	0.0031mm
18.85mm	5.1mm	10.1mm	15.6mm	5.11mm	0.0441mm	0.384mm	0.0033mm
18.90mm	5.8mm	12.0mm	17.8mm	5.91mm	0.0588mm	0.332mm	0.0033mm
18.95mm	6.8mm	14.2mm	20.8mm	6.94mm	0.0868mm	0.283mm	0.0035mm
19.00mm	8.6mm	16.8mm	25.4mm	8.48mm	0.0588mm	0.231mm	0.0016mm
19.05mm	11.0mm	21.7mm	31.5mm	10.78mm	0.1481mm	0.182mm	0.0025mm
19.10mm	15.3mm	29.8mm	***	15.10mm	0.2000mm	0.130mm	0.0017mm
19.15mm	25.3mm	***	***	25.30mm	*****	0.070mm	*****

表 1: 1 回目:寺口による実験結果のデータ

式 (11) を用いて 2 つのデータを結合すれば、以下の値を得る。

この結果を図に表すと、下のグラフのようになる。こうして得られた slit 幅 $a_{(mm)}$(前節の式 (6) は MKSA 単位系で書いたが、以下では実際の測定に使いやすいように (mm) 単位で書く) の値は、当然 slit の目盛の値 x_{mm} の一次関数で表されるものと期待できる。最小二乗法を用いると、$a = Ax + B$に従うものとして、(n は data 数でここでは $n = 18$)

$$A = \frac{n(\sum_i x_i y_i) - (\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{n(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i)^2} = -1.002868937\cdots = -1.00,\quad B = \frac{(\sum_i y_i)(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i y_i)(\sum_i x_i)}{n(\sum_i x_i^2) - (\sum_i x_i)^2} = 19.2847764\cdots =$$

を得る。よって、このとき $a = 0$、つまり slit が閉じると考えられるのは、目盛が 19.23 となったときである。このことは私たちの実験で

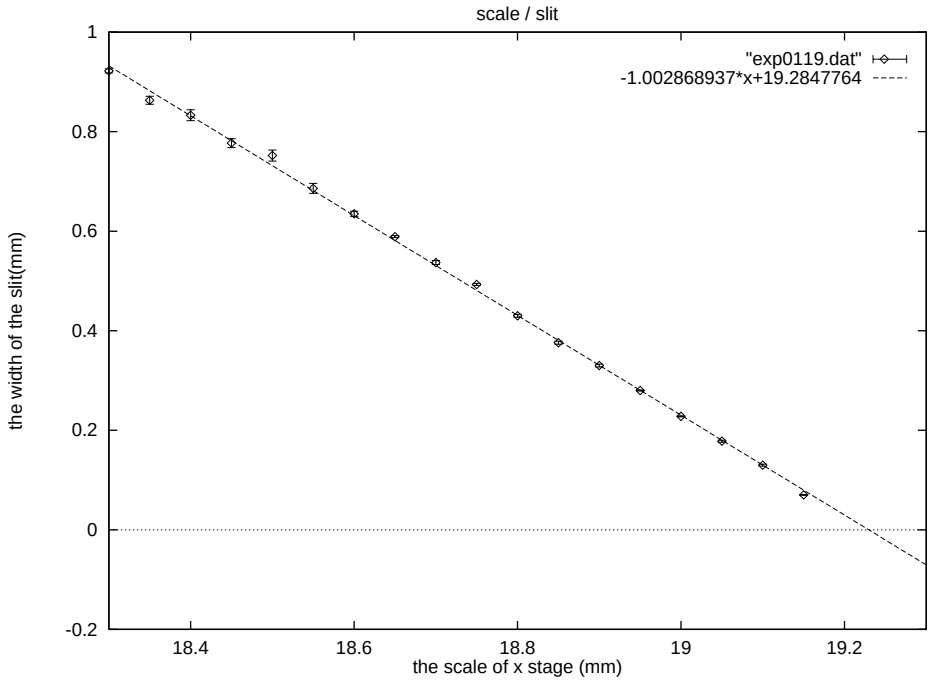
$$(scale) = 19.24mm \tag{13}$$

x stage	1st1 次	1st2 次	1st3 次	X_n	S_n	X_{slit}	S_{slit}
18.30mm	2.1mm	4.2mm	6.4mm	2.11mm	0.0111mm	0.931mm	0.0049mm
18.35mm	2.1mm	4.5mm	6.7mm	2.19mm	0.0475mm	0.895mm	0.0194mm
18.40mm	2.3mm	4.8mm	7.2mm	2.37mm	0.0333mm	0.830mm	0.0117mm
18.45mm	2.2mm	4.9mm	7.4mm	2.37mm	0.0862mm	0.828mm	0.0301mm
18.50mm	2.5mm	5.2mm	8.1mm	2.60mm	0.0577mm	0.756mm	0.0168mm
18.55mm	2.9mm	5.8mm	8.3mm	2.86mm	0.0444mm	0.688mm	0.0107mm
18.60mm	2.8mm	6.1mm	9.2mm	2.97mm	0.0862mm	0.661mm	0.0192mm
18.65mm	3.4mm	6.7mm	9.9mm	3.35mm	0.0289mm	0.587mm	0.0051mm
18.70mm	3.9mm	7.5mm	11.0mm	3.77mm	0.0682mm	0.521mm	0.0094mm
18.75mm	4.0mm	7.9mm	12.0mm	3.98mm	0.0167mm	0.493mm	0.0021mm
18.80mm	4.7mm	9.1mm	13.2mm	4.55mm	0.0866mm	0.432mm	0.0082mm
18.85mm	5.5mm	11.0mm	15.9mm	5.43mm	0.0667mm	0.362mm	0.0044mm
18.90mm	6.4mm	12.0mm	17.8mm	6.11mm	0.1457mm	0.322mm	0.0076mm
18.95mm	7.0mm	14.2mm	20.9mm	7.02mm	0.0401mm	0.280mm	0.0016mm
19.00mm	8.4mm	17.5mm	25.5mm	8.55mm	0.1041mm	0.223mm	0.0027mm
19.05mm	11.0mm	22.0mm	33.1mm	11.01mm	0.0111mm	0.178mm	0.0002mm
19.10mm	15.3mm	29.8mm	***	15.10mm	0.2000mm	0.130mm	0.0017mm
19.15mm	25.3mm	***	***	25.30mm	*****	0.070mm	*****

表 2: 2 回目:束による実験結果のデータ

x stage	18.30mm	18.35mm	18.40mm	18.45mm	18.50mm
slit	0.922 ± 0.004mm	0.863 ± 0.008 mm	0.833 ± 0.011 mm	0.777 ± 0.009 mm	0.752 ± 0.011 mm
x stage	18.55mm	18.60mm	18.65mm	18.70mm	18.75mm
slit	0.686 ± 0.010mm	0.635 ± 0.005 mm	0.589 ± 0.002 mm	0.537 ± 0.004 mm	0.493 ± 0.002 mm
x stage	18.80mm	18.85mm	18.90mm	18.95mm	19.00mm
slit	0.430 ± 0.003mm	0.376 ± 0.003 mm	0.330 ± 0.003 mm	0.280 ± 0.001 mm	0.228 ± 0.001 mm
xstage	19.05mm	19.10mm	19.15mm		
slit	0.178 ± 0.002mm	0.130 ± 0.0017mm	0.070 ± *** mm		

表 3: 2 回の実験の結果を結合させて得られた、slit 幅の値



となったときに干渉光が見えなくなったこととよく合致しているといえる。

また、最小二乗法による係数 A や Bの最良推定値は、

$$S_n(A) = \frac{n\sigma_n(a)}{\sqrt{(n-2)(n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)}}, \quad S_n(B) = \frac{n\sigma_n(a)\sqrt{\sigma x_i}}{\sqrt{n(n-2)(n\sigma x_i^2 - (\sigma x_i)^2)}} \tag{14}$$

で得られるから、この値を計算すれば、

$$A = -1.003 \pm 0.008, \quad B = 19.285 \pm 0.154 \tag{15}$$

をえる。

3 reduced χ^2 について

まず、n 個の変数 $\{x_i\}$ が正規分布 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ に従う時、

$$\chi 2 = \sum_{i=1}^{n} = \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \tag{16}$$

とすれば、これはχ^2分布に従う、つまり (z=χ^2として)

$$f(z) = \frac{z^{\frac{n}{2}-1}\exp(\frac{-z}{2})}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \tag{17}$$

である (このことは、両者の積率母関数が一致して $(1-2\theta)^{-\frac{n}{2}}$ となることを見ることで証明できる)。今、点は 18 個あるが、直線との偏差に関していえば、自由度は 18-2=16 個である。今や、各点における、最小二乗法による直線との偏差と、それぞれのデータの分散が分かっているので、χの値を求めることができる。そして、ここで問題になっている reduced χ^2は、

$$(reduced\ \ \chi^2) = \frac{\chi^2}{n} \tag{18}$$

として定義される物理量である。また、各点における parameter は、これをもちいて、ここでの reduced χ^2の値は、$\frac{\chi^2}{16}$=3.47 となってしまった、また、() で括った、大幅にずれているものを取り除いて考えると (従ってこんどは 15 点)、$\frac{\chi^2}{13}$=1.91 となってしまう。

xstage(mm)	18.30	18.35	18.40	18.45	18.50	18.55	18.60	18.65	18.70
fit した直線 (mm)	0.935	0.885	0.835	0.785	0.734	0.684	0.634	0.584	0.534
中央値 (mm)	0.922	0.863	0.833	0.777	0.752	0.686	0.635	0.589	0.537
標準偏差	0.00633	0.01154	0.01605	0.01206	0.01143	0.01376	0.00670	0.00328	0.00624
$\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}$	4.218	3.634	0.016	0.440	2.480	0.021	0.022	2.324	0.231
xstage(mm)	18.75	18.80	18.85	18.90	18.95	19.00	19.05	19.10	19.15
fit した直線 (mm)	0.484	0.434	0.383	0.333	0.283	0.233	0.183	0.133	0.083
中央値 (mm)	0.493	0.430	0.376	0.330	0.280	0.229	0.178	0.130	0.070
標準偏差	0.00296	0.00410	0.00264	0.00427	0.00205	0.00194	0.00221	0.00240	*****
$\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}$	(9.244)	(7.030)	0.494	2.142	4.251	(13.127)	3.100	1.562	***

4 考察について

今回の測定実験の反省点として、以下のことがあげられる。

- まず、私たちは暗線を読みとる際に目分量で光のないところの真中と思われるところに印をつけた。このことによる誤差は a 値の小さい領域で干渉縞の間隔が大きくなったときに顕著に現れると思われ、とくに 19.00mm 以降のデータでは読みとりに不正確なところがあった。
- 暗線をペンで紙に写しとるとき、(写した紙は log note の P36 に掲載) ペンを近付けたことによって干渉縞に歪みが生じたため、不正確さが生じている。