

2015 年度課題研究 P3

# 電子散乱による原子核の形状因子の 決定

2016 年 4 月 16 日

京都大学 理学部

足利沙希子 稲葉健斗 岡崎祐太 岸本洋 竹内佑甫 松田英史 松本翔汰

## 概要

散乱実験は原子核・素粒子物理において粒子間相互作用についてだけでなく、原子核及びその構成要素の内部構造を明らかにする手法として重要であり、数多くの研究がなされてきた。原子核の形状因子  $F(\mathbf{q})$  は電子散乱実験で得られる微分断面積と Mott 散乱の断面積の比

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} |F(\mathbf{q})|^2$$

として決定され、これを Fourier 変換することで原子核の電荷分布の情報を引き出すことができる。

今回我々は電子ビームを標的に照射し、様々な角度に散乱される電子の個数を測定することで形状因子を測る実験を行った。複数の標的を用いることにより、形状因子すなわち電荷分布の質量数依存性についても評価した。

実験は 2016 年 1 月 31 日、2 月 7 日に京都大学熊取原子炉実験所 KURRI-LINAC において 40MeV まで加速されたパルス幅 10ns、パルスの繰り返し 100Hz の電子ビームを使用して実施した。標的として C, Al, Cu, Au の 4 つを選び、それぞれの断面積を測定した。測定では周囲を鉛で覆うことにより標的以外の方向からの放射線を遮蔽した 30mm 四方のプラスチックシンチレータ 2 枚を直線上に配置し、両方のシンチレータが応答したものを標的に散乱された電子と見なして計数した。シンチレータの位置を変えて  $60^\circ \sim 120^\circ$  の散乱角で測定を行うことにより、各角度で微分断面積を求めた。

本レポートでは実験結果により決定された原子核の形状因子について報告する。

# 目次

第 1 章	目的	5
第 2 章	原理	5
2.1	表記・物理定数	5
2.2	微分断面積	7
2.3	運動学	8
2.4	散乱理論	11
2.4.1	断面積と $S$ 行列	12
2.4.2	fermion の Feynman 則	15
2.4.3	QED の Feynman 則	23
2.4.4	電子- $\mu$ 粒子散乱	24
2.4.5	電子-原子核散乱	28
2.5	形状因子	30
第 3 章	実験	35
3.1	実験設備	35
3.2	セットアップ	37
3.3	検出器	37
3.3.1	使用した検出器	37
3.3.2	ノイズの遮蔽	37
3.3.3	検出器の配置	39
3.4	回路	41
3.5	PMT の設定	42
3.6	TDC の較正	43
3.7	標的について	45
3.7.1	標的の種類を選定	45
3.7.2	標的の取り付け	45
3.8	PARTIKLE	46
3.8.1	主な部品	47
3.8.2	デバイスの精度	48
3.9	実験手順	50
第 4 章	解析	50
4.1	散乱粒子数	50
4.1.1	測定データ	50
4.1.2	解析手法	51
4.1.3	誤差の評価	55
4.1.4	解析結果	55

4.2	ビームの解析 . . . . .	55
4.2.1	ビームの電荷の計算 . . . . .	55
4.2.2	ビームサイズの評価 . . . . .	58
4.3	微分散乱断面積・形状因子 . . . . .	59
第 5 章	結果の考察と反省	62
5.1	標的がないのに存在するピーク . . . . .	62
5.2	実験と理論とのずれ . . . . .	64
第 6 章	結論と今後の展望	66

## 第 1 章 目的

今回の実験の目的は以下の通りである．

- 過去の実験手法を学び，実験計画を立てて準備・実行し，結果を発表する一連の作業を通じて”研究”というものを体験する．
- 実験装置を作成する上で必要な機械，電子工作の技術を習得する．
- CAMAC モジュールを用いた DAQ の手法を学ぶ．
- 加速器を用いた実験方法に関する知見を得る．
- データ解析アプリケーション ROOT を用いたデータ処理に習熟する．
- 相対論的なエネルギーでの電子散乱が古典的な Rutherford 散乱ではなく，スピンによる効果を反映させた Mott 散乱に従うことを確認する．
- 断面積の理論計算との比較から原子核内部で核子がどのように分布しているかを解き明かし，更に異なる核種の形状因子を求めることで，原子核の構造と質量数の関係性を探る．

## 第 2 章 原理

### 2.1 表記・物理定数

本レポートで用いる表記及び物理定数を以下に掲げる．

- 自然単位系

$$c = \hbar = 1$$

$$[L] = [T] = [M^{-1}]$$

- Minkowski 計量

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

- Pauli 行列

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} \mathbf{1}_2 + i\epsilon^{ijk} \sigma_k$$

- Dirac の  $\gamma$  行列

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}_4$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

- chiral 演算子

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_5^\dagger$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

- 物理定数

定数	記号	値
光速	$c$	$2.99792458 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$
Planck 定数	$h$	$6.6260755(40) \times 10^{-34} \text{Js}$
換算 Planck 定数	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.05457266(63) \times 10^{-34} \text{Js}$ $= 6.5821220(20) \times 10^{-22} \text{MeVs}$
	$\hbar c$	$197.327053(59) \text{MeVfm}$
原子質量単位	$u = \frac{M_{12}c}{12}$	$931.49432(28) \text{MeV}/c^2$
電子質量	$m_e$	$0.51099906(15) \text{MeV}/c^2$
素電荷	$e$	$1.60217733(49) \times 10^{-19} \text{As}$
真空の誘電率	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$8.854187817 \times 10^{-12} \text{As/Vm}$
真空の透磁率	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{Vs/Am}$
微細構造定数	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$	$\frac{1}{137.0359895(61)}$
古典電子半径	$r_e = \frac{\alpha\hbar c}{m_e c^2}$	$2.81794092(38) \times 10^{-15} \text{m}$
Avogadro 数	$N_A$	$6.0221367(36) \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$

- 種々の物質 \*1

物質	原子量	密度 [g/cm <sup>3</sup> ]
${}^{12}_{6}\text{C}$	12.011(1)	2.25
${}^{27}_{13}\text{Al}$	26.981539(5)	2.69
${}^{47}_{22}\text{Ti}$	47.867(1)	4.54
${}^{63}_{29}\text{Cu}$	63.546(3)	8.93
${}^{197}_{79}\text{Au}$	196.96654(3)	19.3

\*1 今回の実験では後で見ると、標的粒子の反跳が無視できるため、散乱電子の運動エネルギーが同位体同士ではほぼ変わらず、同位体を区別することができなかったため、質量数及び原子量は同位体の天然存在比で重み付けして評価している。

## 2.2 微分断面積

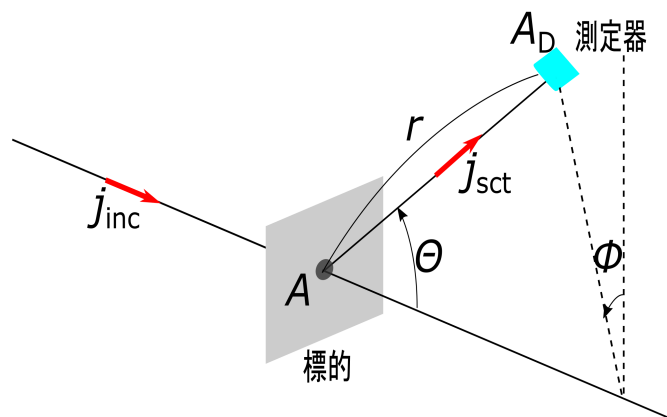


図 2.1 微分断面積

上図のように，一定速度の入射粒子ビームを標的に当て，位置  $(r, \theta, \phi)$  のところに面積  $A_D$  の測定器を置いて反応を検出する場合，単位時間あたりに微小立体角  $\Delta\Omega = \frac{A_D}{r^2}$  に散乱される粒子数  $d\dot{N}$  は，散乱粒子のフラックス  $j_{\text{sct}}$  を用いて，

$$d\dot{N} = j_{\text{sct}} r^2 \Delta\Omega \quad (2.1)$$

と書け，またこれは，入射粒子のフラックス  $j_{\text{inc}}$  及び  $\Delta\Omega$  に比例しているから，

$$d\dot{N} = j_{\text{inc}} \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega \quad (2.2)$$

と書いた時の係数  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  を微分断面積という．以上 2 式より，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_{\text{sct}} r^2}{j_{\text{inc}}} \quad (2.3)$$

この式から， $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  は面積の次元を持ち，入射ビームに垂直な面積  $d\sigma$  の仮想的な領域に入射粒子が入った時に立体角  $d\Omega$  方向への散乱が起こると見なせる．

これを標的粒子 1 つあたりに直すと，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_{\text{sct}} r^2}{j_{\text{inc}} n_{\text{trg}} A} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} n_{\text{trg}} & : \text{標的の面密度} \\ A & : \text{入射ビーム束の断面積} \end{cases}$$

と表せ，更にフラックスは，

$$j_{\text{inc}} = \frac{N_{\text{inc}}}{A \Delta t} \quad (2.5)$$

$$j_{\text{sct}} = \frac{N_{\text{sct}}}{r^2 \Delta\Omega \Delta t} \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{\text{inc}} : \text{総入射粒子数} \\ N_{\text{sct}} : \text{検出された総散乱粒子数} \\ \Delta t : \text{測定時間} \end{array} \right.$$

で表されるので、これらの実験値を用いて微分断面積は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N_{\text{sct}}}{N_{\text{inc}} n_{\text{trg}} \Delta\Omega} \quad (2.7)$$

と書ける。なお、 $n_{\text{trg}}, N_{\text{inc}}$  は、

$$n_{\text{trg}} = \frac{\rho \Delta x}{M} N_A \quad (2.8)$$

$$N_{\text{inc}} = \frac{I t_p f}{e} \Delta t \quad (2.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho : \text{標的の質量密度} \\ \Delta x : \text{標的の厚さ} \\ M : \text{標的の原子量} \\ I : \text{ビーム電流} \\ t_p : \text{パルス幅} \\ f : \text{パルスの繰り返し} \end{array} \right.$$

のように計算される。

### 2.3 運動学

実験では散乱粒子数と散乱角の関係を見るために様々な角度に検出器を移動させ、それぞれの角度における散乱粒子数の測定を行った。しかし、一般に散乱理論では基準系として重心系を選ぶのが慣例であるため、今回我々が測定した物理量を実験室系での値から重心系での値に変換する必要がある。以下ではこの基準系の変換に伴う物理量の変換について議論する。また、今回観測しようとしている散乱過程以外の反応によって生成された粒子が検出器で観測された場合に、全検出数から求める散乱粒子数を運動学的に抽出する方法についても考えることにする。その際、物理量は実験室系に対しては大文字、重心系に対しては小文字を使うこととし、衝突後の物理量には'を付ける。粒子  $i$  の全エネルギー、運動量、運動エネルギーをそれぞれ  $E_i(\varepsilon_i), P_i(p_i), K_i(k_i)$  で表すことにする。

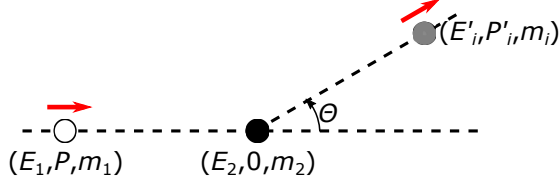


図 2.2 実験室系での弾性衝突

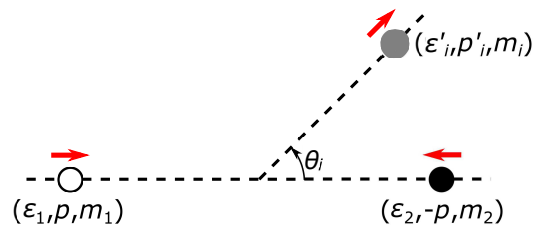


図 2.3 重心系での弾性衝突



図 (2.2) のように、実験室系で静止している標的粒子 2 に入射粒子 1 が衝突し、その後粒子  $i = 1, 2$  が角度  $\Theta$  方向に置かれた測定器により検出された場合を考える。ここで弾性散乱 ( $K_1 + K_2 (= 0) = K'_1 + K'_2$ )、質量不変 ( $m'_1 = m_1, m'_2 = m_2$ ) を仮定し、入射粒子の運動方向を  $z$  軸にとり、重心系へ Lorentz 変換させると図 (2.3) のようになる。

まず衝突前の状況について、実験室系から重心系への Lorentz 変換は、

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(E_1 - \beta P) \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(-\beta E_1 + P) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ 0 \\ 0 \\ -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E_2 \\ 0 \\ 0 \\ -\beta\gamma E_2 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

となり、重心系では全運動量はゼロだから、

$$\begin{aligned} \gamma(-\beta E_1 + P) - \beta\gamma E_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta &= \frac{P}{E_1 + E_2} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_1 + E_2}{\sqrt{(E_1 + E_2)^2 - P^2}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

よって、

$$p = \beta\gamma E_2 = \frac{PE_2}{\sqrt{(E_1 + E_2)^2 - P^2}} \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_1 = \gamma(E_1 - \beta P) = \frac{E_1(E_1 + E_2) - P^2}{\sqrt{(E_1 + E_2)^2 - P^2}} \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_2 = \gamma E_2 = \frac{E_2(E_1 + E_2)}{\sqrt{(E_1 + E_2)^2 - P^2}} \quad (2.15)$$

次に衝突後の状況について、重心系から実験室系への Lorentz 変換は、質量不変な弾性散乱の場合、粒子  $i$  に対して、

$$\begin{pmatrix} E'_i \\ P'_i \sin \Theta \cos \Phi \\ P'_i \sin \Theta \sin \Phi \\ P'_i \cos \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ p \sin \theta_i \cos \varphi_i \\ p \sin \theta_i \sin \varphi_i \\ p \cos \theta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\varepsilon_i + \beta p \cos \theta_i) \\ p \sin \theta_i \cos \varphi_i \\ p \sin \theta_i \sin \varphi_i \\ \gamma(\beta \varepsilon_i + p \cos \theta_i) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow \tan \Theta = \frac{p \sin \theta_i}{\gamma(\beta \varepsilon_i + p \cos \theta_i)} \quad (2.17)$$

となる。ここで、

$$\tilde{\beta} \equiv \frac{p}{\varepsilon_1} \quad \eta \equiv \frac{\beta}{\tilde{\beta}} = \frac{E_1}{E_2} - \frac{P^2}{E_2(E_1 + E_2)}$$

と置くと,  $\Theta$  と  $\theta_1$  の関係は,

$$\tan \Theta = \frac{\sin \theta_1}{\gamma(\eta + \cos \theta_1)} \quad (2.18)$$

$$\cos \Theta = \frac{\gamma(\eta + \cos \theta_1)}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_1 + \gamma^2(\eta + \cos \theta_1)^2}} \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow \cos \theta_1 = \frac{-\gamma^2 \eta \sin^2 \Theta + \cos \Theta \sqrt{\gamma^2(1 - \eta^2 \sin^2 \Theta) - (\gamma^2 - 1) \cos^2 \Theta}}{\gamma^2 - (\gamma^2 - 1) \cos^2 \Theta} \quad (2.20)$$

$$\frac{d\Omega_{\text{cm}}}{d\Omega_{\text{lab}}} = \frac{d \cos \theta_1}{d \cos \Theta} = \frac{\{1 - \cos^2 \theta_1 + \gamma^2(\eta + \cos \theta_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}{\gamma(1 + \eta \cos \theta_1)} \quad (2.21)$$

となるので, これを実験室系での角度  $\Theta$  で書き直すと,

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_{\text{cm}}}{d\Omega_{\text{lab}}} = & \frac{2(\gamma^2 - 1) \cos \Theta}{\{\gamma^2 - (\gamma^2 - 1) \cos^2 \Theta\}^2} \left\{ -\gamma^2 \eta \sin^2 \Theta + \cos \Theta \sqrt{\gamma^2(1 - \eta^2 \sin^2 \Theta) - (\gamma^2 - 1) \cos^2 \Theta} \right\} \\ & + \frac{1}{\gamma^2 - (\gamma^2 - 1) \cos^2 \Theta} \left\{ 2\gamma^2 \eta \cos \Theta + \sqrt{\gamma^2(1 - \eta^2 \sin^2 \Theta) - (\gamma^2 - 1) \cos^2 \Theta} \right. \\ & \left. + \cos^2 \Theta \frac{\gamma^2 \eta^2 - (\gamma^2 - 1)}{\sqrt{\gamma^2(1 - \eta^2 \sin^2 \Theta) - (\gamma^2 - 1) \cos^2 \Theta}} \right\} \quad (2.22) \end{aligned}$$

と表せ, 同様にして  $\Theta$  と  $\theta_2$  の関係は,

$$\tan \Theta = \frac{\sin \theta_2}{\gamma(1 + \cos \theta_2)} \quad (2.23)$$

$$\cos \Theta = \frac{\gamma(1 + \cos \theta_2)}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_2 + \gamma^2(1 + \cos \theta_2)^2}} \quad (2.24)$$

$$\Rightarrow \cos \theta_2 = \frac{\cos^2 \Theta - \gamma^2 \sin^2 \Theta}{\gamma^2 - (\gamma^2 - 1) \cos^2 \Theta} \quad (2.25)$$

$$\frac{d\Omega_{\text{cm}}}{d\Omega_{\text{lab}}} = \frac{d \cos \theta_2}{d \cos \Theta} = \frac{\{1 - \cos^2 \theta_2 + \gamma^2(1 + \cos \theta_2)^2\}^{\frac{3}{2}}}{\gamma(1 + \cos \theta_2)} = \frac{4\gamma^2 \cos \Theta}{\{\gamma^2 - (\gamma^2 - 1) \cos^2 \Theta\}^2} \quad (2.26)$$

と表せ, これらにより,

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} d\Omega_{\text{lab}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{cm}} d\Omega_{\text{cm}} \quad (2.27)$$

で実験室系と重心系の微分断面積の変換ができる.

衝突後の粒子 1 の運動エネルギーは,

$$E'_1 = \gamma(\varepsilon_1 + \beta p \cos \theta_1) = E_1 - \frac{E_2 P^2}{(E_1 + E_2)^2 - P^2} (1 - \cos \theta_1) \quad (2.28)$$

これに,  $E'_1 = K'_1 + m_1$ ,  $E_1 = K_1 + m_1$ ,  $E_2 = K_2 (= 0) + m_2$ ,  $P^2 = E_1^2 - m_1^2 = K_1^2 + 2m_1 K_1$  を代入すると,

$$K'_1 = \left\{ 1 - \frac{m_2(2m_1 + K_1)}{(m_1 + m_2)^2 + 2m_2 K_1} (1 - \cos \theta_1) \right\} K_1 \quad (2.29)$$

と書け，粒子 2 の運動エネルギーについても同様に， $E'_2 = K'_2 + m_2$  を用いて，

$$E'_2 = \gamma(\varepsilon_2 + \beta p \cos \theta_2) = E_2 + \frac{E_2 P^2}{(E_1 + E_2)^2 - P^2} (1 + \cos \theta_2) \quad (2.30)$$

$$K'_2 = \frac{m_2(2m_1 + K_1)}{(m_1 + m_2)^2 + 2m_2 K_1} (1 + \cos \theta_2) K_1 \quad (2.31)$$

と書ける．入射電子の運動エネルギー  $K_1$  と標的の重さ (原子量  $M$ ) を変えた時の散乱粒子の運動エネルギー  $K'_1$  の振る舞いを以下に示す．

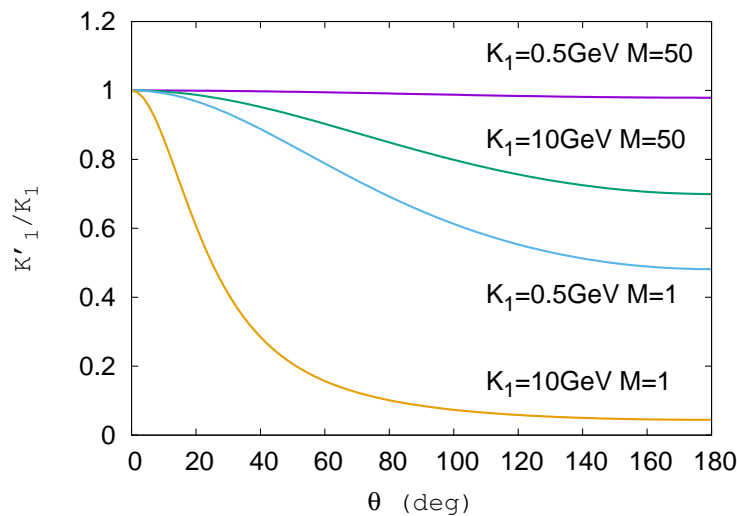


図 2.4  $\frac{K'_1}{K_1}$  の散乱角依存性

この図から，より高い入射エネルギーの電子を，より軽い原子核で散乱させれば，より大きな反跳エネルギーが標的に移行することが読み取れる．これは古典的な衝突の法則と一致する．

また， $m_2 \rightarrow \infty$  の極限では，実験室系と重心系が同一になり，粒子 2 の反跳がなくなることが分かる．すなわち，今回我々が行った電子-原子核散乱のような  $m_e(0.511\text{MeV}) \ll m_Z(10^2 \sim 10^3\text{GeV})$  の場合には原子核の反跳は無視できる．

## 2.4 散乱理論

今回の我々の実験テーマは，原子核がどのくらい大きいか，どのような形をしているか，を解明することであり，原子核のような小さな物体を研究するには電子散乱が有効である．なぜなら，電子は我々が知る限りでは内部構造を持たない点状の粒子で，且つ原子核と電子の間の相互作用は電磁相互作用，つまり仮想光子の交換によって起こるものであり，量子電磁気学 (QED) によって正確に計算できるからである．この仮想光子の de Broglie 波長が原子核の空間的な広がりよりも小さくなるようなエネルギーの電子ビームを用意できれば，形状因子についての情報が得られ，したがって我々は原子核の内部を探る「電子顕微鏡」を手に入れたことになるのである．以下で断面積の計算に用いる形式について概説した後，その形式に則って原子核の Coulomb ポテンシャルによる電子散乱の断面積を導出する．

### 2.4.1 断面積と $S$ 行列

断面積を計算するためには、始状態に対応する粒子の波束を用意して、この始状態を相互作用場の時間発展演算子  $\exp(-iH_{\text{int}}t)$  で十分に時間発展させた後、期待する終状態に対応する粒子の波束との重なりを調べなければならない。こうすることでその終状態が得られる確率振幅を求めることができ、最終的に断面積が導かれる。ここでは、波束は運動量空間に鋭いピークを持っていて振幅は波束の運動量のみ依存し、波束の形状には依らないものとする。

状態  $|\phi\rangle$  の波束は、

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \phi(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle \quad (2.32)$$

のように Fourier 変換される。ここで  $|\mathbf{k}\rangle$  は運動量  $\mathbf{k}$  の 1 粒子状態を表し、自由粒子の場合、

$$|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle \quad (2.33)$$

と書ける。規格化条件は、

$$\langle\phi|\phi\rangle = 1 \quad \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\phi(\mathbf{k})|^2 = 1 \quad (2.34)$$

である。

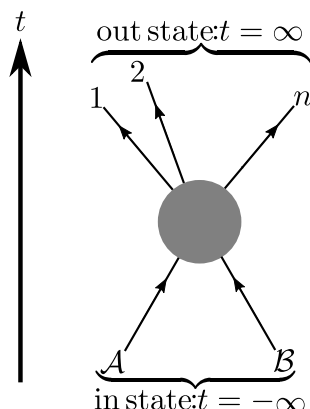


図 2.5 波束の時間発展

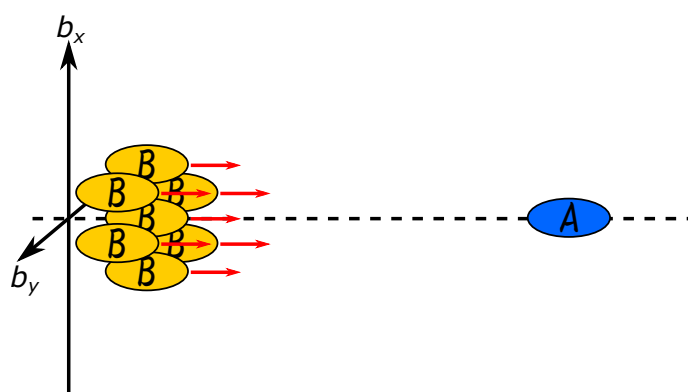


図 2.6 始状態の波束

図 (2.5), (2.6) のように、波束  $A$  に波束  $B$  が衝突し、その後波束  $f = 1, 2, \dots, n$  が生成される過程を考える。求める確率は、

$$\mathcal{P} = |\langle\phi_1\phi_2\cdots|\phi_A\phi_B\rangle|^2 \quad (2.35)$$

与えられる。各波束は空間に局在しており、それぞれ独立に構成されるものとし、衝突時刻よりも十分過去、未来における相互作用のない始状態、終状態をそれぞれ in 状態、out 状態と呼ぶことにすると、in 状態は、入射波束の衝突パラメータ  $\mathbf{b}$  だけの空間並進を考慮に入れて、

$$|\phi_A\phi_B\rangle_{\text{in}} = \int \frac{d^3\mathbf{k}_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}_B}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\mathbf{k}_A)\phi(\mathbf{k}_B)}{\sqrt{2E_A 2E_B}} e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{k}_B} |\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle_{\text{in}} \quad (2.36)$$

と書け，out 状態は，

$$\text{out} \langle \phi_1 \phi_2 \cdots | = \left\{ \prod_f \int \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{\phi_f(\mathbf{p}_f)}{\sqrt{2E_f}} \right\} \text{out} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \quad (2.37)$$

と書けるから，in 状態から out 状態への遷移振幅は，

$$\begin{aligned} \text{out} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle_{\text{in}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots |}_t \underbrace{| \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle}_{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \mathcal{T} \left( \exp \left[ -i \int_{-t}^t dt' H_{\text{int}}(t') \right] \right) | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle \end{aligned} \quad (2.38)$$

のように，unitary 演算子の連続極限を用いて表すことができ，この演算子を  $S$  行列と呼ぶ．

$$\text{out} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle_{\text{in}} \equiv \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | S | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle \quad (2.39)$$

$S$  行列から相互作用しない振幅を取り除くために， $T$  行列を

$$S \equiv 1 + iT \quad (2.40)$$

と定義する．更に，相互作用前後での 4 元運動量保存を反映させるため，

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | iT | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( k_A + k_B - \sum_f p_f \right) \cdot i\mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow \{p_f\}) \quad (2.41)$$

で不変行列要素  $\mathcal{M}$  を定める．但し，全ての 4 元運動量は on mass-shell である．

$$p^0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_f^2} \quad k^0 = E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_i^2} \quad (2.42)$$

次に，断面積  $\sigma$  を  $\mathcal{M}$  で表すことを考える．始状態  $|\phi_A \phi_B\rangle$  が反応を経て  $n$  粒子終状態になり，それらが運動量空間で  $d^3 \mathbf{p}_1 \cdots d^3 \mathbf{p}_n$  の領域に入る確率  $d\mathcal{P}$  は，

$$d\mathcal{P}(AB \rightarrow 12 \cdots n) = \left\{ \prod_f \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right\} |\text{out} \langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n | \phi_A \phi_B \rangle_{\text{in}}|^2 \quad (2.43)$$

で与えられる．単一の標的粒子  $A$  に多数の入射粒子  $B$  を様々な衝突パラメータ  $\mathbf{b}$  で射出する時，散乱回数  $N$  は，入射粒子  $B$  の数密度を  $n_B$  として，

$$N = \sum_{\substack{\text{all incident} \\ \text{particles } i}} \mathcal{P}_i = \int d^2 \mathbf{b} n_B \mathcal{P}(\mathbf{b}) \quad (2.44)$$

と表せるので，標的粒子 1 つあたりの断面積は，

$$\sigma = \frac{N}{n_B} = \int d^2 \mathbf{b} \mathcal{P}(\mathbf{b}) \quad (2.45)$$

式 (2.36), (2.43) より，

$$\begin{aligned} \sigma &= \left\{ \prod_f \int \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right\} \int d^2 \mathbf{b} \left\{ \prod_{i=A,B} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}'_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i^*(\mathbf{k}'_i)}{\sqrt{2E_i}} \right\} \\ &\quad \times e^{i\mathbf{b} \cdot (\mathbf{k}'_B - \mathbf{k}_B)} (\text{out} \langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\mathbf{k}_i\} \rangle_{\text{in}}) (\text{out} \langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\mathbf{k}'_i\} \rangle_{\text{in}})^* \end{aligned} \quad (2.46)$$

で,

$$\langle \text{out}(\{\mathbf{p}_f\} | \{\mathbf{k}_i\})_{\text{in}} \rangle = i\mathcal{M}(\{k_i\} \rightarrow \{p_f\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum_i k_i - \sum_f p_f \right) \quad (2.47)$$

$$\langle \text{out}(\{\mathbf{p}_f\} | \{\mathbf{k}'_i\})_{\text{in}} \rangle^* = -i\mathcal{M}^*(\{k'_i\} \rightarrow \{p_f\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum_i k'_i - \sum_f p_f \right) \quad (2.48)$$

を代入すれば,

$$\begin{aligned} & \int d^2\mathbf{b} \int \frac{d^3\mathbf{k}'_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\text{vect}\mathbf{k}'_B}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A^*(\mathbf{k}'_A)\phi_B^*(\mathbf{k}'_B)}{\sqrt{2E'_A 2E'_B}} e^{i\mathbf{b}\cdot(\mathbf{k}'_B - \mathbf{k}'_A)} \langle \text{out}(\{\mathbf{p}_f\} | \mathbf{k}'_A \mathbf{k}'_B)_{\text{in}} \rangle^* \\ &= -i \int d^3\mathbf{k}'_A \int d^3\mathbf{k}'_B \frac{\phi_A^*(\mathbf{k}'_A)\phi_B^*(\mathbf{k}'_B)}{\sqrt{2E'_A 2E'_B}} \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_B - \mathbf{k}'_A) \mathcal{M}^*(k'_A, k'_B \rightarrow \{p_f\}) \delta^{(4)} \left( k'_A + k'_B - \sum_f p_f \right) \\ &= -i \int d^3\mathbf{k}'_A \int dk'_B \frac{\phi_A^*(\mathbf{k}'_A)\phi_B^*(\mathbf{k}'_B)}{\sqrt{2E'_A 2E'_B}} \mathcal{M}^*(k'_A, k'_B \rightarrow \{p_f\}) \delta \left( E'_A + E'_B - \sum_f E_f \right) \\ & \quad \times \delta^{(2)} \left( \underbrace{\mathbf{k}'_A + \mathbf{k}'_B - \sum_f \mathbf{p}_f}_{(\mathbf{k}'_A - \mathbf{k}'_A)} \right) \delta \left( k'_A + k'_B - \sum_f p_f \right) \Big|_{\mathbf{k}'_B = \mathbf{k}'_A} \\ &= -i \int dk'_A \frac{\phi_A^*(\mathbf{k}'_A)\phi_B^*(\mathbf{k}'_B)}{\sqrt{2E'_A 2E'_B}} \mathcal{M}^*(k'_A, k'_B \rightarrow \{p_f\}) \delta \left( \sqrt{k'^2_A + m_A^2} + \sqrt{k'^2_B + m_B^2} - \sum_f E_f \right) \Big|_{\substack{\mathbf{k}'_A = \mathbf{k}'_B \\ k'_B = \sum_f p_f^z - k'_A}} \\ &= -i \int dk'_A \frac{\phi_A^*(\mathbf{k}'_A)\phi_B^*(\mathbf{k}'_B)}{\sqrt{2E'_A 2E'_B}} \mathcal{M}^*(k'_A, k'_B \rightarrow \{p_f\}) \delta \left( \sqrt{k'^2_A + \mathbf{k}'_A{}^2 + m_A^2} + \sqrt{\left( \sum_f p_f^z - k'_A \right)^2 + \mathbf{k}'_B{}^2 + m_B^2} - \sum_f E_f \right) \\ &= -i \int dk'_A \frac{\phi_A^*(\mathbf{k}'_A)\phi_B^*(\mathbf{k}'_B)}{\sqrt{2E'_A 2E'_B}} \mathcal{M}^*(k'_A, k'_B \rightarrow \{p_f\}) \delta \left( \sqrt{k'^2_A - k'^2_A + E_A^2} + \sqrt{\left( k'_A - \sum_f p_f^z \right)^2 - k'^2_B + E_B^2} - \sum_f E_f \right) \\ &= -i \int dk'_A \frac{\phi_A^*(\mathbf{k}'_A)\phi_B^*(\mathbf{k}'_B)}{\sqrt{2E'_A 2E'_B}} \mathcal{M}^*(k'_A, k'_B \rightarrow \{p_f\}) \frac{1}{\left| \frac{k'_A}{E_A} - \frac{k'_B}{E_B} \right|} \delta(k'_A - k'_B) \\ &\equiv -i \frac{\phi_A^*(\mathbf{k}'_A)\phi_B^*(\mathbf{k}'_B)}{\sqrt{2E'_A 2E'_B}} \mathcal{M}^*(k'_A, k'_B \rightarrow \{p_f\}) \frac{1}{|v_A - v_B|} \end{aligned} \quad (2.49)$$

より, 始状態の波束  $A, B$  が運動量空間でそれぞれ  $\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B$  に鋭いピークを持っているとして, 規格化条件

(2.34) を用いると、断面積  $\sigma$  は、

$$\sigma = \left\{ \prod_f \int \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right\} \frac{|\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_f\})|^2}{4E_A E_B |v_A - v_B|} \times \int \frac{d^3 \mathbf{k}_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_B}{(2\pi)^3} |\phi_A(\mathbf{k}_A)|^2 |\phi_B(\mathbf{k}_B)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( k_A + k_B - \sum_f p_f \right) \quad (2.50)$$

$$= \left\{ \prod_f \int \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right\} \frac{|\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_f\})|^2}{4E_A E_B |v_A - v_B|} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_A + p_B - \sum_f p_f \right) \quad (2.51)$$

のように、波束の形に依るものは全て消え、Lorentz 不変な

$$\left\{ \int d\Pi_n = \left\{ \prod_f \int \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right\} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum_i p_i - \sum_f p_f \right) : n \text{ 体不変位相空間} \right. \\ \left. |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow \{p_f\})|^2 : \text{不変反応率} \right.$$

と、Lorentz 変換性を示す

$$\frac{1}{E_A E_B |v_A - v_B|} = \frac{1}{|E_B p_A^z - E_A p_B^z|} = \frac{1}{|\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_A^\mu p_B^\nu|}$$

なる部分で構成される。

特に終状態が 2 粒子である場合、基準系として重心系を採ると、 $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 \Rightarrow E_f = \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_f^2}$  だから、重心系での全エネルギーを  $E_{\text{cm}} (= E_A + E_B = E_1 + E_2)$  として、2 体位相空間の積分は、

$$\int d\Pi_2 = \int \frac{d|\mathbf{p}_1| p_1^2 d\Omega}{(2\pi)^3 2E_1 2E_2} (2\pi) \delta(E_{\text{cm}} - E_1 - E_2) \\ = \int d\Omega \frac{p_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left| \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} + \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} \right|^{-1} \\ = \int d\Omega \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\text{cm}}} \quad (2.52)$$

の形に書き換えられ、したがって 2 体-2 体反応の微分断面積は、

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{cm}} = \frac{1}{4E_A E_B |v_A - v_B|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{\text{cm}}} |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p_1, p_2)|^2 \quad (2.53)$$

となる。

#### 2.4.2 fermion の Feynman 則

断面積を不変行列要素  $\mathcal{M}$  で表す公式が得られたので、ここでは  $\mathcal{M}$  を Feynman 図を用いて計算する方法について議論する。今回我々が行った実験は、原子核の Coulomb ポテンシャルによる電子 (Dirac 粒子) の散乱であるので、まずは自由 Dirac 場の量子化について簡単にまとめることから始める。

自由 Dirac 場の Lagrangian 密度は、

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (2.54)$$

で表され，座標変数  $\psi_\alpha(x)$  ( $\alpha$  は 4 成分スピノル添字) に共役な運動量変数  $\pi^\alpha(x)$  は，

$$\pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Dirac}}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = i\bar{\psi}^\beta (\gamma^0)_\beta{}^\alpha = i\psi^{*\alpha} \quad (2.55)$$

となるから，スピノル場を fermion の場として量子化するために，同時刻反交換関係

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(\mathbf{x}), \pi^\beta(\mathbf{y})\} &= i\delta_\alpha^\beta \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \stackrel{(2.55)}{\implies} \{\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi^{\dagger\beta}(\mathbf{y})\} = \delta_\alpha^\beta \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \{\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi^\beta(\mathbf{y})\} &= 0 = \{\psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}), \psi^{\dagger\beta}(\mathbf{y})\} \end{aligned} \quad (2.56)$$

を課す．Hamiltonian は，

$$H_{\text{Dirac}} = \int d^3\mathbf{x} (\pi\dot{\psi} - \mathcal{L}_{\text{Dirac}}) = \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi \quad (2.57)$$

より，Heisenberg 方程式から，

$$\begin{aligned} i\dot{\psi}(x) &= [\psi(x), H_{\text{Dirac}}] \\ &= \int d^3\mathbf{y} \{\psi(x), \psi^\dagger(y)\} \Big|_{x^0=y^0} \gamma^0 (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi(y) \\ &\therefore (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

が導かれ， $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$  から従う Euler-Lagrange 方程式と一致し，Dirac 方程式と呼ばれる．Dirac 方程式の平面波解を  $\psi_\alpha(x) = u_\alpha(p)e^{ip\cdot x}$  と置くと，4 成分スピノル  $u_\alpha(p)$  は，

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(p) = 0 \quad (2.59)$$

を満たさなければならない．これがゼロでない解を持つには，係数行列の行列式がゼロ，すなわち

$$0 = \det(\gamma^\mu p_\mu - m) \implies 0 = (p^2 - m^2)^2 \quad (2.60)$$

$$\therefore p^0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (2.61)$$

であることが必要で，また，この係数行列の階数を調べると 2 になる (スピン自由度に対応) ので，この方程式には  $4 - 2 = 2$  個の独立な解があり，この 2 つを区別するために添字  $s$  を導入し，正エネルギー解を  $u^s(p)$ ，負エネルギー解を  $v^s(p)$  ( $(\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0$ ) と記すと，これら 4 つが解の完全系を成し，Dirac 方程式を満たす場  $\psi(x)$  は，

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s (a_{\mathbf{p}}^s u^s(p) e^{-ip\cdot x} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip\cdot x}) \quad (2.62)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s (b_{\mathbf{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ip\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip\cdot x}) \quad (2.63)$$

と展開でき，係数  $a_{\mathbf{p}}^{s(\dagger)}$ ,  $b_{\mathbf{p}}^{s(\dagger)}$  は演算子で，同時刻反交換関係 (2.56) より，

$$\{a_{\mathbf{p}}^s, a_{\mathbf{p}'}^{s'\dagger}\} = \{b_{\mathbf{p}}^s, b_{\mathbf{p}'}^{s'\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{ss'} \quad (\text{all other anticommutators}) = 0 \quad (2.64)$$

となる．スピノル  $u^s(p)$ ,  $v^s(p)$  の規格化条件を

$$\bar{u}^s(p) u^{s'}(p) = 2m \delta^{ss'} \quad \bar{v}^s(p) v^{s'}(p) = -2m \delta^{ss'} \quad (2.65)$$



と定めると、これらのスピノルは直交性

$$\bar{u}^s(p)v^{s'}(p) = 0 = \bar{v}^s(p)u^{s'}(p) \quad \bar{u}^s(p)\gamma^\mu u^{s'}(p) = 2p^\mu \delta^{ss'} = \bar{v}^s(p)\gamma^\mu v^{s'}(p) \quad (2.66)$$

と完全性

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \gamma^\mu p_\mu + m \quad \sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \gamma^\mu p_\mu - m \quad (2.67)$$

を示す．Hamiltonian(2.57) に場の演算子 (2.62) , (2.63) を代入すれば、

$$\begin{aligned} H_{\text{Dirac}} &= \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}2E_{\mathbf{p}'}}} \sum_{s,s'} \left( b_{\mathbf{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} \right) \\ &\quad \times \left\{ \underbrace{a_{\mathbf{p}'}^{s'} (\gamma^i p'_i + m) u^{s'}(p')}_{\gamma^0 E_{\mathbf{p}'} u^{s'}(p')} e^{-ip' \cdot x} + \underbrace{b_{\mathbf{p}'}^{s'\dagger} (-\gamma^i p'_i + m) v^{s'}(p')}_{-\gamma^0 E_{\mathbf{p}'} v^{s'}(p')} e^{ip' \cdot x} \right\} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \left\{ -b_{\mathbf{p}}^s b_{\mathbf{p}}^{s'\dagger} \underbrace{v^{s\dagger}(p)v^{s'}(p)}_{2E_{\mathbf{p}}\delta^{ss'}} + a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^{s'} \underbrace{u^{s\dagger}(p)u^{s'}(p)}_{2E_{\mathbf{p}}\delta^{ss'}} \right\} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s E_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s \right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

となる．更に、Dirac 場の Lorentz 不変なベクトル  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  は、大域的 U(1) 変換

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\chi}\psi(x) \quad |\chi| \ll 1 \quad (1 + i\chi)\psi(x) = \psi(x) + \chi\Delta\psi(x) \quad (2.69)$$

に対する Noether カレント

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Dirac}} &\rightarrow \bar{\psi} e^{-i\chi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{i\chi} \psi \\ &= \bar{\psi} (1 - i\chi) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) (1 + i\chi) \psi \\ &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Dirac}}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \Delta\psi = -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= -(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \\ &= -(im\bar{\psi})\psi - \bar{\psi}(-im\psi) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

で、これに対応する Noether チャージは、

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3\mathbf{x} j^0(x) \\ &= - \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger(x)\psi(x) \\ &= - \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}2E_{\mathbf{p}'}}} \sum_{s,s'} \left( a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} u^{s\dagger}(p) e^{ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^s v^{s\dagger}(p) e^{-ip \cdot x} \right) \\ &\quad \times \left( a_{\mathbf{p}'}^{s'} u^{s'}(p') e^{-ip' \cdot x} + b_{\mathbf{p}'}^{s'\dagger} v^{s'}(p') e^{ip' \cdot x} \right) \\ &= - \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_{s,s'} \left\{ a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^{s'} \underbrace{u^{s\dagger}(p)u^{s'}(p)}_{2E_{\mathbf{p}}\delta^{ss'}} + b_{\mathbf{p}}^s b_{\mathbf{p}}^{s'\dagger} \underbrace{v^{s\dagger}(p)v^{s'}(p)}_{2E_{\mathbf{p}}\delta^{ss'}} \right\} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s \left( -a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s \right) \end{aligned} \quad (2.73)$$

となる．但し，演算子の交換に伴い生じる無限大定数は無視している．以上より， $a_{\mathbf{p}}^{s(\dagger)}$  はエネルギー  $E_{\mathbf{p}}$ ，チャージ-1 の fermion を消滅（生成）させ， $b_{\mathbf{p}}^{s(\dagger)}$  はエネルギー  $E_{\mathbf{p}}$ ，チャージ +1 の antifermion を消滅（生成）させる演算子と解釈できる．

これで Feynman 図を計算する準備ができたので，Dirac 場の伝播関数へと話を進める．自由 Dirac 場の展開式 (2.62)，(2.63) より，同時刻でなくても任意の時空点での 4 次元反交換関係が求められる．相互作用がない時，場の演算子の交換関係は c 数になるので，真空期待値を計算すると，

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}} 2E_{\mathbf{p}'}}} \sum_{s, s'} \left( a_{\mathbf{p}}^s u_{\alpha}^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v_{\alpha}^s(p) e^{ip \cdot x} \right) \\
&\quad \times \left( b_{\mathbf{p}'}^{s'} \bar{v}_{\beta}^{s'}(p') e^{-ip' \cdot x} + a_{\mathbf{p}'}^{s'\dagger} \bar{u}_{\beta}^{s'}(p') e^{ip' \cdot x} \right) | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \underbrace{\sum_s u_{\alpha}^s(p) \bar{u}_{\beta}^s(p)}_{(\gamma^{\mu} p_{\mu} + m)_{\alpha\beta}} e^{-ip \cdot (x-y)} \\
&= (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu}(x) + m)_{\alpha\beta} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} \tag{2.74}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \bar{\psi}_{\beta}(y) \psi_{\alpha}(x) | 0 \rangle &= \langle 0 | \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}} 2E_{\mathbf{p}'}}} \sum_{s, s'} \left( b_{\mathbf{p}}^s \bar{v}_{\beta}^s(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \bar{u}_{\beta}^s(p) e^{ip \cdot x} \right) \\
&\quad \times \left( a_{\mathbf{p}'}^{s'} u_{\alpha}^{s'}(p') e^{-ip' \cdot x} + b_{\mathbf{p}'}^{s'\dagger} u_{\alpha}^{s'}(p') e^{ip' \cdot x} \right) | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \underbrace{\sum_s v_{\alpha}^s(p) \bar{v}_{\beta}^s(p)}_{(\gamma^{\mu} p_{\mu} - m)_{\alpha\beta}} e^{-ip \cdot (y-x)} \\
&= - (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu}(x) + m)_{\alpha\beta} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (y-x)} \tag{2.75}
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
S_{R\alpha\beta}(x-y) &\equiv \vartheta(x^0 - y^0) \langle 0 | \{ \psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(y) \} | 0 \rangle \\
&= (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu}(x) + m)_{\alpha\beta} \vartheta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left\{ e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{-ip \cdot (y-x)} \right\} \tag{2.76}
\end{aligned}$$

で定義される  $S_R(\vartheta(x))$  は Heaviside の階段関数は，

$$\begin{aligned}
(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu}(x) - m) S_R(x-y) &= - (\partial^2(x) + m^2) \vartheta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left\{ e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{-ip \cdot (y-x)} \right\} \\
&= - \{ \partial^2(x) \vartheta(x^0 - y^0) \} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left\{ e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{-ip \cdot (y-x)} \right\} \\
&\quad - 2 \{ \partial_{\mu}(x) \vartheta(x^0 - y^0) \} \partial^{\mu}(x) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left\{ e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{-ip \cdot (y-x)} \right\} \\
&\quad - \vartheta(x^0 - y^0) (\partial^2(x) + m^2) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left\{ e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{-ip \cdot (y-x)} \right\} \\
&\stackrel{\text{I.B.P}}{=} -\delta(x^0 - y^0) \left[ -i \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left\{ e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{-ip \cdot (y-x)} \right\} \right] \\
&= i\delta^{(4)}(x-y) \cdot \mathbf{1}_4 \tag{2.77}
\end{aligned}$$

より,  $S_R$  が Dirac 場の遅延 Green 関数であることが分かる. また,  $S_R$  の Fourier 変換は形式的に,

$$S_R(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{S}_R(p) e^{-ip \cdot (x-y)}$$

$$\underbrace{(i\gamma^\mu \partial_\mu(x) - m) S_R(x-y)}_{i\delta^{(4)}(x-y) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)}} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\gamma^\mu p_\mu - m) \tilde{S}_R(p) e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (2.78)$$

$$\therefore \tilde{S}_R(p) = i \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu - m} = i \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2} \quad (2.79)$$

$$\therefore S_R(x-y) = - \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (2.80)$$

のようになり,  $p_0$  に関する積分を複素  $p_0$  面における実軸に沿った積分として考えると,  $p_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \pm E_{\mathbf{p}}$  に極が存在し, 積分 (2.80) が具体的にどのような関数に帰着するかは, 複素  $p_0$  面において積分路が極を迂回する方法によって決まる.  $S_R$  の定義式 (2.76) より, 遅延 Green 関数は,

$$S_R(x-y) \begin{cases} \neq 0 & \text{for } x^0 > y^0 \\ = 0 & \text{for } x^0 < y^0 \end{cases} \quad (2.81)$$

なる境界条件を満たさなければならないので, 図 (2.7) のような積分路を選ばなければならない. これは, 「波は源から未来に向かって伝播する」という境界条件であるが, これでは始状態では正エネルギーを持っていた粒子が, 遠い未来においても必ず有限の確率で負エネルギー状態に遷移し得るとい破滅的な結果を導いてしまう. 物理的に正しいのは, 図 (2.8) のような積分路を採って, 「正エネルギーの波は未来に, 負エネルギーの波は過去に向かって伝播する」という境界条件を選ぶことである. エネルギー保存則から, 過去に向かう負エネルギーを過去から向かって来る正エネルギーと解釈し, 負エネルギーへの遷移確率をなくしてしまうことで, Dirac 理論における空孔解釈と整合性が取れるのである. この Green 関数は Feynman 伝播関数と呼ばれ, 極を迂回するのと等価になるよう  $p_0$  積分の極を無限小だけ実軸からずらせば ( $p_0 = \pm E_{\mathbf{p}} \mp i\epsilon$ ), Feynman 伝播関数  $S_F$  は,

$$S_F(x-y) = - \lim_{\epsilon' \searrow 0} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p_0^2 - E_{\mathbf{p}}^2 + i\epsilon'} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

$$= - \lim_{\epsilon \searrow 0} (i\gamma^\mu \partial_\mu(x) + m) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}$$

$$\times \int \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left( \frac{1}{p_0 - E_{\mathbf{p}} + i\epsilon} - \frac{1}{p_0 + E_{\mathbf{p}} - i\epsilon} \right) e^{-ip_0(x^0 - y^0)} \quad (2.82)$$

として計算すればよく,

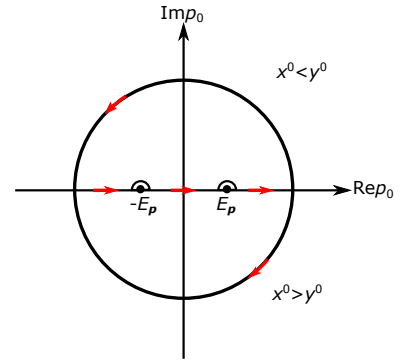


図 2.7 遅延 Green 関数の積分路

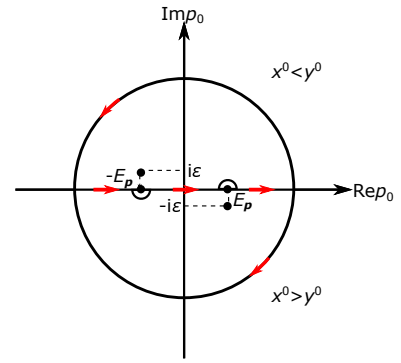


図 2.8 Feynman 伝播関数の積分路

(i)  $x^0 > y^0$  の場合

$p_0$  を複素数に拡張して,  $p_0 = p_0^r + ip_0^i$  ( $p_0^r, p_0^i \in \mathbf{R}$ ) と書くと,

$$e^{-ip_0(x^0 - y^0)} = e^{-ip_0^r(x^0 - y^0)} e^{ip_0^i(x^0 - y^0)} \xrightarrow{p_0^i \rightarrow -\infty} 0$$

だから積分路として下半平面を選ぶと, Jordan の補助定理より半円周の積分が落とせる. この積分路の内部に含まれる特異点は  $p_0 = E\mathbf{p} - i\epsilon$  で, これは 1 位の極であるから留数定理より,

$$\begin{aligned} S_F(x - y) \stackrel{x^0 > y^0}{=} (i\gamma^\mu \partial_\mu(x) + m) \lim_{\epsilon \searrow 0} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{1}{2(E\mathbf{p} - i\epsilon)} e^{-(ip_0 + \epsilon)(x^0 - y^0)} \\ = (i\gamma^\mu \partial_\mu(x) + m) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E\mathbf{p}} e^{-ip\cdot(x-y)} \end{aligned} \quad (2.83)$$

(ii)  $x^0 < y^0$  の場合

積分路を上半平面に採れば同様にして,

$$S_F(x - y) \stackrel{x^0 < y^0}{=} (i\gamma^\mu \partial_\mu(x) + m) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E\mathbf{p}} e^{-ip\cdot(y-x)} \quad (2.84)$$

となり, まとめると Feynman 伝播関数は,

$$S_F(x - y) = \begin{cases} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle & \text{for } x^0 > y^0 \text{ (close contour below)} \\ -\langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle & \text{for } x^0 < y^0 \text{ (close contour above)} \end{cases} \quad (2.85)$$

$$= \vartheta(x^0 - y^0) \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle - \vartheta(y^0 - x^0) \langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle \quad (2.86)$$

$$\equiv \langle 0 | \mathcal{T} \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \quad (2.87)$$

で定義される時間順序積  $\mathcal{T}$  (場の演算子を時間経過の順に右から左へ並び替える) を用いて表される. 但し,  $\mathcal{T}$  を作用させた際に演算子の交換を伴うものには, fermion の反交換性を反映して, その回数だけ  $-1$  が掛かるように定義している.

次に, 一般に  $n$  個の場の  $\mathcal{T}$  積の真空期待値 ( $n$  点相関関数) について考える. 場の演算子を正エネルギーの項と負エネルギーの項に,

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x) \quad \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) \quad (2.88)$$

のように分けると,  $\psi^+, \bar{\psi}^+$  が消滅演算子 ( $a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}$ ),  $\psi^-, \bar{\psi}^-$  が生成演算子 ( $b_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}^\dagger$ ) を持つので,

$$\psi^+(x)|0\rangle = 0 = \bar{\psi}^+(x)|0\rangle \quad \langle 0|\psi^-(x) = 0 = \langle 0|\bar{\psi}^-(x) \quad (2.89)$$

であり,  $x^0 > y^0$  の場合,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \psi(x) \bar{\psi}(y) \stackrel{x^0 > y^0}{=} \psi^+(x) \bar{\psi}^+(y) + \psi^+(x) \bar{\psi}^-(y) + \psi^-(x) \bar{\psi}^+(y) + \psi^-(x) \bar{\psi}^-(y) \\ = \psi^+(x) \bar{\psi}^+(y) - \bar{\psi}^-(y) \psi^+(x) + \psi^-(x) \bar{\psi}^+(y) + \psi^-(x) \bar{\psi}^-(y) + \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} \end{aligned} \quad (2.90)$$

と書け, 反交換子以外の全ての項は正規積  $\mathcal{N}$  (生成演算子を左, 消滅演算子を右へ並び替える) を作用させても演算子の交換は起こらず, 真空期待値がゼロになる.  $x^0 < y^0$  の場合も同様にして正規積に並び替えれば,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \psi(x) \bar{\psi}(y) \stackrel{x^0 < y^0}{=} -\bar{\psi}^+(y) \psi^+(x) - \bar{\psi}^+(y) \psi^-(x) - \bar{\psi}^-(y) \psi^+(x) - \bar{\psi}^-(y) \psi^-(x) \\ = -\bar{\psi}^+(y) \psi^+(x) + \psi^-(x) \bar{\psi}^+(y) - \bar{\psi}^-(y) \psi^+(x) - \bar{\psi}^-(y) \psi^-(x) - \{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} \end{aligned} \quad (2.91)$$

となり,

$$\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)} \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} & \text{for } x^0 > y^0 \\ -\{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} & \text{for } x^0 < y^0 \end{array} \right\} = S_F(x-y) \quad (2.92)$$

$$\overbrace{\psi(x)\psi(y)} = 0 \overbrace{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)} \quad (2.93)$$

で縮約を定義すると,  $\mathcal{T}$  積と  $\mathcal{N}$  積の関係は,

$$\mathcal{T}[\psi(x)\bar{\psi}(y)] = \mathcal{N}[\psi(x)\bar{\psi}(y)] + \overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)} \quad (2.94)$$

のように表され,  $i \geq 2$  についても,

$$\mathcal{T}[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) \dots \psi(x_{2i-1})\bar{\psi}(x_{2i})] = \mathcal{N}[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) \dots \psi(x_{2i-1})\bar{\psi}(x_{2i}) + \text{all possible contractions}] \quad (2.95)$$

と書けることが帰納的に示され, Wick の定理と呼ばれる.

in 状態から out 状態への遷移振幅の式 (2.38) において Wick の定理を用いて  $\mathcal{T}$  積を  $\mathcal{N}$  積に書き換え, 縮約の取れていない場については始状態又は終状態の粒子と縮約を取るようにした時, fermion, antifermion それぞれでこれらは,

$$\begin{aligned} \overbrace{\psi(x) | \mathbf{p}, s \rangle}_{\text{fermion}} &= \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} \sum_{s'} a_{\mathbf{p}'}^{s'} u^{s'}(p') e^{-ip' \cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} |0\rangle \\ &= u^s(p) e^{-ip \cdot x} |0\rangle \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}, s | \overbrace{\bar{\psi}(x)}_{\text{fermion}} &= \langle 0 | a_{\mathbf{p}}^s \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} \sum_{s'} a_{\mathbf{p}'}^{s\dagger} \bar{u}^{s'}(p') e^{ip' \cdot x} \\ &= \langle 0 | \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \overbrace{\bar{\psi}(x) | \mathbf{k}, s \rangle}_{\text{antifermion}} &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s'} b_{\mathbf{p}}^{s'} \bar{v}^{s'}(p) e^{-ip \cdot x} \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} b_{\mathbf{k}}^{s\dagger} |0\rangle \\ &= \bar{v}^s(k) e^{-ik \cdot x} |0\rangle \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}, s | \overbrace{\psi(x)}_{\text{antifermion}} &= \langle 0 | b_{\mathbf{k}}^s \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s'} b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^{s'}(p) e^{ip \cdot x} \\ &= \langle 0 | v^s(k) e^{ik \cdot x} \end{aligned} \quad (2.99)$$

となるが,  $S$  行列の摂動計算をこのように Wick の縮約に分解していちいち式変形するのではなく, 代わりに反応過程を模式的に表した図形を考えることによって一気に終わらせてしまうことができる便利な方法がある. このような図形は Feynman 図と呼ばれ, Feynman 図の各構成要素に数式を対応させて不変行列要素  $\mathcal{M}$  を与える規則を Feynman 則という. 以下に fermion の Feynman 則<sup>\*2</sup>を示す.

<sup>\*2</sup> ここでは Wick の縮約と Feynman 図を対応させるために, 図が座標表示と運動量表示の混成になっているが, 空間座標は積分のダミー変数でしかなく, 頂点の交換の場合の数と摂動展開係数が常に相殺されるようになっている.

1. 内線には伝播関数を付与

$$\overbrace{\psi(x)\psi(y)} = \text{---}\underset{y}{\bullet} \xrightarrow{p} \underset{x}{\bullet} \text{---} = i \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

2. 頂点には結合定数を付与

$$-ig = \begin{array}{c} \diagup \text{---} \\ \bullet \\ \diagdown \text{---} \end{array} \text{---}$$

3. 外線にはスピノルを付与

$$\begin{array}{ll} \overbrace{\psi(x) |p, s\rangle}_{\text{fermion}} = \begin{array}{c} \diagup \text{---} \\ \bullet \\ \diagdown \text{---} \end{array} \xrightarrow{p} \text{---} = u^s(p) & \overbrace{\langle p, s | \psi(x)}_{\text{fermion}} = \text{---} \xrightarrow{p} \bullet \begin{array}{c} \diagup \text{---} \\ \diagdown \text{---} \end{array} = \bar{u}^s(p) \\ \\ \overbrace{\bar{\psi}(x) |k, s\rangle}_{\text{antifermion}} = \begin{array}{c} \diagup \text{---} \\ \bullet \\ \diagdown \text{---} \end{array} \xrightarrow{k} \text{---} = \bar{v}^s(k) & \overbrace{\langle k, s | \psi(x)}_{\text{antifermion}} = \text{---} \xrightarrow{k} \bullet \begin{array}{c} \diagup \text{---} \\ \diagdown \text{---} \end{array} = v^s(k) \end{array}$$

4. 各頂点で 4 元運動量保存を要請して内線の運動量を固定

5. 固定されない仮想 4 元運動量  $q$  に対し積分  $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$  を実行

6. fermion 線の矢印をたどる順序で Feynman 図の要素を読み取り, 右から左へ因子を並べる

7. Feynman 図に対称性がある場合はその対称因子で割って重複計数回避

### 2.4.3 QED の Feynman 則

QED の Lagrangian 密度は ,

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.100)$$

$$= \underbrace{\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi}_{\text{自由 Dirac 場}} - \underbrace{\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}_{\text{自由 Maxwell 場}} + \underbrace{e j^\mu A_\mu}_{\text{電磁カレント相互作用場}} \quad (2.101)$$

で表され , Hamiltonian は ,

$$\begin{aligned} H_{\text{QED}} &= \int d^3\mathbf{x} \left\{ \bar{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi + \frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - e j^\mu A_\mu \right\} \\ &= H_{\text{Dirac}} + H_{\text{em}} + \underbrace{H_{\text{int}}}_{e \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu} \end{aligned} \quad (2.102)$$

となる . 電磁場テンソル  $F_{\mu\nu}$  は  $A_\mu$  に対する Euler-Lagrange 方程式とその反対称性から Maxwell 方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e j^\nu \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \left( \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right) \quad (2.103)$$

を満たし , 更に Lorentz 共変性を保つために Lorentz ゲージ<sup>\*3</sup>

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \quad (2.104)$$

を拘束条件に Lagrange の未定乗数として  $\xi$  を導入すると , Maxwell 方程式 (2.103) は ,

$$\left\{ g_{\mu\nu} \partial^2 - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right\} A^\nu = e j_\mu \quad (2.105)$$

となるから , Maxwell 場の Feynman 伝播関数を

$$\left\{ g_{\mu\nu} \partial^2 - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right\} D_{\text{F}}^{\nu\rho}(x-y) \equiv i\delta_\mu^\rho \delta^{(4)}(x-y) \quad (2.106)$$

で定義すると ,  $D_{\text{F}}^{\nu\rho}$  の Fourier 成分  $\tilde{D}_{\text{F}}^{\nu\rho}$  は , Lorentz 共変性を加味すれば ,

$$\begin{aligned} \left\{ -g_{\mu\nu} q^2 + \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) q_\mu q_\nu \right\} \tilde{D}_{\text{F}}^{\nu\rho}(q) &= i\delta_\mu^\rho \\ \implies \tilde{D}_{\text{F}}^{\nu\rho}(q) &= -\frac{i}{q^2 + i\epsilon} \left\{ g^{\nu\rho} - (1 - \xi) \frac{q^\nu q^\rho}{q^2 + i\epsilon} \right\} \end{aligned} \quad (2.107)$$

と書けるが , 今考えているような全ての外部粒子が on mass-shell の散乱過程では , Ward-高橋恒等式より Maxwell 場と保存カレントとの結合において第二項は  $q^\rho j_\rho = 0$  となって消えるので , 以下  $\xi = 1$  の Feynman ゲージ<sup>\*4</sup>の場合に話を限ると , 今回用いるべき QED の Feynman 則<sup>\*5</sup>としては , 以下を fermion の Feynman 則に付加するだけでよい .

<sup>\*3</sup> この条件を課してもなお ,  $A_\mu$  のゲージ自由度は残る .

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad \partial^2 \Lambda = 0$$

<sup>\*4</sup>  $\xi \neq 1$  では式 (2.107) の第二項により光子の伝播関数は二重極を持つ .  $\xi = 0$  は Landau ゲージと呼ばれ , 理論的に美しい .

<sup>\*5</sup> ここでは光子の外線を省略している .

- QED 結合定数 <sup>a</sup>

$$-ie\gamma^\mu = \begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} \text{---} \text{wavy line} \text{---} \mu$$

- 光子伝播関数

$$\overbrace{A_\mu(x)A_\nu(y)} = \begin{array}{c} y \\ \nearrow \\ \text{wavy line} \\ \searrow \\ x \\ \vec{q} \end{array} = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$$

<sup>a</sup> ここでは荷電 lepton を想定している．電荷  $Q$  を持つ Dirac 粒子の場合は， $-e \rightarrow Q$  としなければならない．

#### 2.4.4 電子- $\mu$ 粒子散乱

ここでは最も単純な QED の散乱過程として電子- $\mu$  粒子散乱  $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$  の断面積を計算する．Feynman 則を用いれば直ちに，

$$i\mathcal{M}(e^-(p_B)\mu^-(p_A) \rightarrow e^-(p_1)\mu^-(p_2)) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) = \begin{array}{c} e^- \quad p_1 \\ \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \\ e^- \quad p_B \end{array} \text{---} \text{wavy line} \text{---} \begin{array}{c} p_2 \\ \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \\ p_A \\ \mu^- \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | (-i) \int d^4x e\psi\gamma^\mu\psi A_\mu (-i) \int d^4y e\psi\gamma^\nu\psi A_\nu | \mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B \rangle \\ &= \int d^4x \int d^4y \bar{u}^{s'}(p_1) e^{ip_1 \cdot y} (-ie\gamma^\nu) u^s(p_B) e^{-ip_B \cdot y} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iq \cdot (x-y)} \bar{u}^{r'}(p_2) e^{ip_2 \cdot x} (-ie\gamma^\mu) u^r(p_A) e^{-ip_A \cdot x} \\ &\therefore i\mathcal{M} = i \left(\frac{e}{q}\right)^2 \bar{u}^{s'}(p_1) \gamma^\mu u^s(p_B) \bar{u}^{r'}(p_2) \gamma_\mu u^r(p_A) \end{aligned} \quad (2.108)$$

で不変行列要素が与えられる．微分断面積を求めるには， $|\mathcal{M}|^2$  を計算しなければならないが，双線型スピノルの複素共役は，

$$\begin{aligned} (\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p))^* &= (u^\dagger(p')\gamma^0\gamma^\mu u(p))^\dagger \\ &= u^\dagger(p)(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 u(p') \\ &= u^\dagger(p)\gamma^0\gamma^\mu u(p') \\ &= \bar{u}(p)\gamma^\mu u(p') \end{aligned}$$



となるから,

$$|\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{e}{q}\right)^4 \left(\bar{u}^{s'}(p_1)\gamma^\mu u^s(p_B)\bar{u}^s(p_B)\gamma^\nu u^{s'}(p_1)\right) \left(\bar{u}^{r'}(p_2)\gamma_\mu u^r(p_A)\bar{u}^r(p_A)\gamma_\nu u^{r'}(p_2)\right) \quad (2.109)$$

実際の実験では, 始状態のスピンを揃えたり終状態のスピンを観測したりしないので, 測定される断面積は, 始状態のスピン  $(s, r)$  で平均を取り, 終状態のスピン  $(s', r')$  で和を取ったものになる.

$$|\mathcal{M}|_{\text{exp}}^2 = \frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_r \sum_{s'} \sum_{r'} |\mathcal{M}(s, r \rightarrow s', r')|^2$$

ここで, スピノルの完全性 (2.67) を用いると,

$$\begin{aligned} \sum_{s, s'} \bar{u}_\alpha^{s'}(p_1)(\gamma^\mu)^{\alpha\beta} u_\beta^s(p_B)\bar{u}_\gamma^s(p_B)(\gamma^\nu)^{\gamma\delta} u_\delta^{s'}(p_1) &= (\gamma^\rho p_{1\rho} + m_e)_{\delta\alpha} (\gamma^\mu)^{\alpha\beta} (\gamma^\sigma p_{B\sigma} + m_e)_{\beta\gamma} (\gamma^\nu)^{\gamma\delta} \\ &= \text{tr}[(\gamma^\rho p_{1\rho} + m_e)\gamma^\mu(\gamma^\sigma p_{B\sigma} + m_e)\gamma^\nu] \\ &= 4[p_1^\mu p_B^\nu + p_1^\nu p_B^\mu - g^{\mu\nu}(p_1 \cdot p_B - m_e^2)] \end{aligned}$$

$$\therefore \left( \begin{array}{l} \text{tr}(\gamma^\mu) = 0 \\ \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \text{tr}(\gamma^\mu\{\mathbf{2}g^{\nu\rho} - \gamma^\rho\gamma^\nu\}) = 8g^{\mu\nu} - \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) \\ \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = 0 \\ \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = \text{tr}(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma) \\ = \text{tr}(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu\mathbf{2}g^{\mu\rho}\gamma^\sigma + \gamma^\nu\gamma^\rho\mathbf{2}g^{\mu\sigma} - \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu) \\ = g^{\mu\nu}\text{tr}(\gamma^\rho\gamma^\sigma) - g^{\mu\rho}\text{tr}(\gamma^\nu\gamma^\sigma) + g^{\mu\sigma}\text{tr}(\gamma^\nu\gamma^\rho) \\ = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \text{tr}(2g^{\mu\nu} \cdot \mathbf{1}_4 - \gamma^\nu\gamma^\mu) \\ = 8g^{\mu\nu} - \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) \\ = 4g^{\mu\nu} \end{array}$$

より,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|_{\text{exp}}^2 &= 4 \left(\frac{e}{q}\right)^4 [p_1^\mu p_B^\nu + p_1^\nu p_B^\mu - g^{\mu\nu}(p_1 \cdot p_B - m_e^2)] [p_{2\mu} p_{A\nu} + p_{2\nu} p_{A\mu} - g_{\mu\nu}(p_2 \cdot p_A - m_\mu^2)] \\ &= 8 \left(\frac{e}{q}\right)^4 [(p_1 \cdot p_2)(p_A \cdot p_B) + (p_1 \cdot p_A)(p_2 \cdot p_B) - (p_1 \cdot p_B)m_\mu^2 - (p_2 \cdot p_A)m_e^2 + 2m_e^2 m_\mu^2] \quad (2.110) \end{aligned}$$

と書ける. 基準系として重心系を選ぶと, 下図のように 4 元運動量が各粒子に割り当てられる.

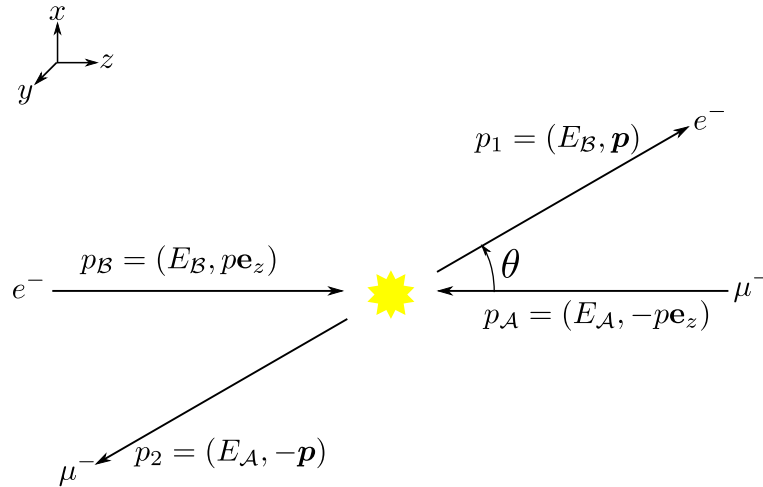


図 2.9 重心系での電子- $\mu$  粒子散乱

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^2 &= E_A^2 - m_\mu^2 = E_B^2 - m_e^2 & \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_z &= |\mathbf{p}| \cos \theta \\
E_{\text{cm}} &= E_A + E_B & q^2 &= (p_B - p_1)^2 = -4\mathbf{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
p_1 \cdot p_2 &= p_A \cdot p_B = E_A E_B + \mathbf{p}^2 & p_1 \cdot p_A &= p_2 \cdot p_B = E_A E_B + \mathbf{p}^2 \cos \theta \\
p_1 \cdot p_B &= E_B^2 - \mathbf{p}^2 \cos \theta & p_2 \cdot p_A &= E_A^2 - \mathbf{p}^2 \cos \theta
\end{aligned}$$

これらを式 (2.53), (2.110) に代入し,  $\mu$  粒子の静止系 ( $E_A = m_\mu$ ) で  $\mu$  粒子の反跳を無視 ( $m_\mu \rightarrow \infty$ ) \*6すれば,

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{4E_A E_B |v_A - v_B|} \frac{|\mathbf{p}|}{(2\pi)^2 4(E_A + E_B)} 8 \left(\frac{e}{q}\right)^4 [(E_A E_B + \mathbf{p}^2)^2 \\
&\quad + (E_A E_B + \mathbf{p}^2 \cos \theta)^2 - (E_B^2 - \mathbf{p}^2 \cos \theta) m_\mu^2 - (E_A^2 - \mathbf{p}^2 \cos \theta) m_e^2 + 2m_e^2 m_\mu^2] \\
&\xrightarrow{m_\mu \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2}{8\mathbf{p}^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} [E_B^2 + \mathbf{p}^2 \cos \theta + m_e^2] \\
&= \left( \frac{\alpha}{2|\mathbf{p}| \tilde{\beta} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \left( 1 - \tilde{\beta}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \tag{2.111}
\end{aligned}$$

のように, 相対論的な電子の Coulomb 散乱の断面積を与える Mott の公式が導かれる.

式 (2.111) の最初の因子は Rutherford 散乱の断面積としてよく知られているもので, 最後の因子はスピンの効果を考慮したために出てきたものである. この因子は,  $\tilde{\beta} \rightarrow 1$  の極限では  $180^\circ$  散乱が完全に抑制されることを示している. これは, 相対論的極限ではスピンの運動量方向への射影 (helicity) が保存量だからである. まずは, ベクトル型の相互作用では chirality (chiral 演算子  $\gamma_5$  の固有値) が保存されることを見る. Dirac スピノル  $\psi$  の, chirality  $\pm 1$  の成分への分解は,

$$j_L^\mu \equiv \bar{\psi} \gamma^\mu \underbrace{\frac{1 - \gamma_5}{2} \psi}_{\psi_L} \quad j_R^\mu \equiv \bar{\psi} \gamma^\mu \underbrace{\frac{1 + \gamma_5}{2} \psi}_{\psi_R} \quad -j^\mu = j_L^\mu + j_R^\mu \tag{2.112}$$

$$\gamma_5 \psi_L = -\psi_L \quad \gamma_5 \psi_R = \psi_R \tag{2.113}$$

で行われ, 添字 L, R はそれぞれ左手型成分, 右手型成分と呼ばれる.

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_L &= \left( \frac{1 + \gamma_5}{2} \bar{\psi} \right)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \\
&= \bar{\psi}^\dagger \gamma^0 \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \\
&= \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} \cdot \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \\
&= 0 = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R \tag{2.114}
\end{aligned}$$

なので,

$$j_L^\mu = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L \quad j_R^\mu = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R \tag{2.115}$$

\*6  $e^- \mu^-$  散乱では通常  $m_e \rightarrow 0$  とするが, ここでそうしないのは電子-原子核散乱の断面積が  $m_\mu \rightarrow m_Z, -e \rightarrow Ze$  の置き換えで記述できるからである.

のように，L 型は L 型と，R 型は R 型とのみ結合することが理解できる．Dirac 場の軸性ベクトルカレント  $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$  は，chiral 変換

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\chi\gamma_5}\psi(x) \stackrel{|\chi|\ll 1}{\approx} (1 - i\chi\gamma_5)\psi(x) = \psi(x) + \chi\Delta\psi(x) \quad (2.116)$$

に対する Noether カレント

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Dirac}} &\rightarrow \bar{\psi}e^{-i\chi\gamma_5}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\chi\gamma_5}\psi \\ &= \bar{\psi}(1 - i\chi\gamma_5)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(1 + i\chi\gamma_5)\psi \\ &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} - 2\chi\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi \quad \mathcal{J} \equiv -2\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$j_5^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{Dirac}}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\Delta\psi - \mathcal{J} = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x) \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_5^\mu &= (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\gamma_5\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi \\ &= (im\bar{\psi})\gamma_5\psi - \bar{\psi}\gamma_5(-im\psi) \quad \because \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \\ &= 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi \end{aligned} \quad (2.119)$$

で， $m = 0$  であれば保存される．また，Dirac 方程式 (2.58) に左から  $\gamma_5$  を掛けて，

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\gamma_5\psi = 0$$

これと Dirac 方程式との和と差から，

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L = m\psi_R \quad i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R = m\psi_L \quad (2.120)$$

が得られ，質量  $m$  が L 型と R 型の状態を混ぜていると言える．次に， $\gamma_5$  を

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= \frac{-\gamma^0\gamma_5\gamma^i p_i}{E} - \frac{\gamma^0\gamma_5 E\gamma^0}{E} + \frac{\gamma^0\gamma_5\gamma^i p_i}{E} \\ &= \frac{\Sigma^i p_i}{E} - \frac{\gamma^0\gamma_5}{E}\gamma^\mu p_\mu \end{aligned}$$

$$\Sigma^i \equiv -\gamma^0\gamma_5\gamma^i = -\begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$$

と書き換えると，自由粒子の場合  $\gamma^\mu p_\mu = \pm m$  だから，

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= \frac{\Sigma^i p_i}{E} \mp \frac{m}{E}\gamma^0\gamma_5 \\ &= \pm \frac{\Sigma^i p_i}{|E|} + O\left(\frac{m}{E}\right) \\ &\xrightarrow{m \rightarrow 0} \pm \underbrace{\frac{\Sigma^i p_i}{|\mathbf{p}|}}_h \end{aligned} \quad (2.121)$$

この  $h$  を helicity といい、スピンの運動量方向への射影を表す。helicity が正・負の状態はそれぞれ右・左巻きと呼ばれる。上式より massless の自由粒子、すなわち相対論的極限においては chirality と helicity が符号を除いて一致する。図 (2.10) に  $180^\circ$  散乱の様子を示す。入射電子の運動量方向を  $z$  軸に選ぶと、helicity 保存のためにはスピンの  $z$  軸への射影は向きを変えなければならない。しかし標的が非偏極である場合、角運動量保存のためこれは不可能である。軌道角運動量の向きは運動方向に垂直なので、スピンの  $z$  成分を変える能力はない。したがって  $\tilde{\beta} \rightarrow 1$  では  $180^\circ$  散乱は全く起こらない。もちろん、標的が偏極している場合には全スピンが保存する条件の下でスピンの  $z$  軸への射影は変化する可能性があり、 $180^\circ$  散乱は起こりうる。

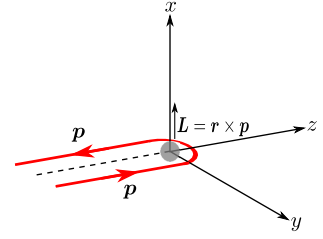


図 2.10  $180^\circ$  散乱の運動学

#### 2.4.5 電子-原子核散乱

原子核の Coulomb 場による電子の散乱断面積は、摂動の最低次でなら、電磁場を量子化せずに古典的なポテンシャル  $A_\mu(x)$  のままで計算できる。空間に局在した古典電磁ポテンシャルによる電子散乱の  $T$  行列要素は 1 次摂動で、

$$\begin{aligned} \langle p_1 | iT | p_B \rangle &= -i \langle p_1 | \int d^4x e^{ip_1 x} \psi \gamma^\mu \psi A_\mu | p_B \rangle \\ &= -ie \bar{u}^{s'}(p_1) \gamma^\mu u^s(p_B) \int d^4x A_\mu(x) e^{-i(p_B - p_1) \cdot x} \\ &= -ie \bar{u}^{s'}(p_1) \gamma^\mu u^s(p_B) \tilde{A}_\mu(q) \end{aligned} \quad (2.122)$$

と表せ、 $A_\mu(x)$  に時間依存性がない\*7 場合、このポテンシャルの Fourier 変換の際にエネルギー保存の  $\delta$  関数が含まれるので、

$$\langle p_1 | iT | p_B \rangle \equiv i\mathcal{M} \cdot (2\pi) \delta(E_1 - E_B) \quad (2.123)$$

で不変行列要素を定義すると、Feynman 図による計算は、

$$= i\mathcal{M}(p_B \rightarrow p_1) = -ie \bar{u}^{s'}(p_1) \gamma^\mu u^s(p_B) \tilde{A}_\mu(q)$$

となる。非偏極電子散乱の微分断面積を得るために、始状態、終状態のスピンでそれぞれ平均、和を取ると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_s \sum_{s'} |\mathcal{M}(p_B \rightarrow p_1)|^2 &= \frac{e^2}{2} \sum_{s,s'} \bar{u}^{s'}(p_1) \gamma^\mu u^s(p_B) \bar{u}^s(p_B) \gamma^\nu u^{s'}(p_1) \tilde{A}_\mu(q) \tilde{A}_\nu^*(q) \\ &= 2e^2 [p_1^\mu p_B^\nu + p_1^\nu p_B^\mu - g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_B - m_e^2)] \tilde{A}_\mu(q) \tilde{A}_\nu^*(q) \end{aligned}$$

Coulomb ポテンシャル

$$A^\mu(x) = (\phi(x), \mathbf{0})$$

\*7 静電場を考えているので、原子核は固定標的と見なされている。つまり、反跳が無視されるから 3 元運動量は保存されず、式 (2.123) の形になっている。

に対し,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 &= 2e^2 (E_B^2 + \mathbf{p}^2 \cos \theta + m_e^2) |\tilde{\phi}(\mathbf{q})|^2 \\ &= 4e^2 E_B^2 \left(1 - \tilde{\beta}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) |\tilde{\phi}(\mathbf{q})|^2 \end{aligned} \quad (2.124)$$

で, 断面積  $\sigma$  は §2.4.1 より  $\mathcal{M}$  を用いて,

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \int d^2 \mathbf{b} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_B}{(2\pi)^3} \frac{\phi_B(\mathbf{k}_B)}{\sqrt{2E_B}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}'_B}{(2\pi)^3} \frac{\phi_B^*(\mathbf{k}'_B)}{\sqrt{2E'_B}} e^{i\mathbf{b} \cdot (\mathbf{k}'_B - \mathbf{k}_B)} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^2 \delta(E_B - E_1) \delta(E'_B - E_1) \\ &\quad \int \frac{dp_1}{(2\pi)^3} \frac{p_1^2}{2E_1} d\Omega \int \frac{d^3 \mathbf{k}_B}{(2\pi)^3} \frac{\phi_B(\mathbf{k}_B)}{\sqrt{2E_B}} |\mathcal{M}|^2 (2\pi) \delta(E_B - E_1) \int d^3 \mathbf{k}'_B \frac{\phi_B^*(\mathbf{k}'_B)}{\sqrt{2E'_B}} \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_B - \mathbf{k}_B) \underbrace{\delta\left(\sqrt{\mathbf{k}'_B{}^2 + m_B^2} - E_1\right)}_{\delta\left(\sqrt{k_B'^2 + k_B'^2 + m_B^2} - E_1\right)} \\ &= \delta\left(\sqrt{k_B'^2 - k_B^2 + E_B^2} - E_1\right) \\ &= \left|\frac{k_B^z}{E_B}\right|^{-1} \delta(k_B'^z - k_B^z) \\ &= \int \frac{dp}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{2E_B} d\Omega \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_B \tilde{\beta}} (2\pi) \delta(E_B - \sqrt{p^2 - m_e^2}) \\ &\quad \therefore \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{p^2}{E_B^2 \tilde{\beta}} \left|\frac{\mathbf{p}}{E_B}\right|^{-1} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{16\pi^2} |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (2.125)$$

と書ける.

さて, 静電ポテンシャル  $\phi(\mathbf{r})$  から Coulomb ポテンシャル  $V_{\text{Coulomb}}(\mathbf{r}) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|}$  に比例する部分を取り出してみると,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\mathbf{q}) &= \tilde{V}_{\text{Coulomb}}(\mathbf{q}) \cdot F(\mathbf{q}) \\ &= \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{r} \frac{e^{-\kappa r}}{r} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} F(\mathbf{q}) \\ &= \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dr r^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta) 2\pi \frac{e^{-\kappa r}}{r} e^{-i|\mathbf{q}|r \cos \theta} F(\mathbf{q}) \\ &= \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{-i|\mathbf{q}|} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dr \left\{ e^{-(\kappa+i|\mathbf{q}|)r} - e^{-(\kappa-i|\mathbf{q}|)r} \right\} F(\mathbf{q}) \\ &= \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{-i|\mathbf{q}|} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\kappa+i|\mathbf{q}|} - \frac{1}{\kappa-i|\mathbf{q}|} \right) F(\mathbf{q}) \\ &= \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2} F(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (2.126)$$

となるから, これを式 (2.124), (2.125) に代入すると, 電子-原子核散乱の微分断面積は,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{16\pi^2} 4e^2 E_B^2 \left(1 - \tilde{\beta}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \left(\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{4\pi}{4|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 |F(\mathbf{q})|^2 \\ &= \underbrace{\left(\frac{Z\alpha}{2|\mathbf{p}| \tilde{\beta} \sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2}_{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}} \left(1 - \tilde{\beta}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) |F(\mathbf{q})|^2 \end{aligned} \quad (2.127)$$

と表せる．この  $F(\mathbf{q})$  を

$$F(\mathbf{q}) \equiv \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \tilde{\rho}(\mathbf{q}) \quad (2.128)$$

と定義すれば，Fourier 成分の積の逆 Fourier 変換は畳み込み積分の形になるので，

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\mathbf{q}) &= \widetilde{V_{\text{Coulomb}} * \rho}(\mathbf{q}) \\ \phi(\mathbf{r}) &= V_{\text{Coulomb}} * \rho(\mathbf{r}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{y} V_{\text{Coulomb}}(\mathbf{y}) \rho(\mathbf{x}) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - (\mathbf{x} + \mathbf{y})) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x} V_{\text{Coulomb}}(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \\ &= \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \end{aligned} \quad (2.129)$$

これが Poisson 方程式

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{Ze}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \quad (2.130)$$

の特解であることを思い出すと， $\rho(\mathbf{x})$  は規格化条件

$$1 = \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \quad (2.131)$$

を満たす．以上より  $F(\mathbf{q})$  は，原子核の全電荷  $Ze$  に規格化された電荷分布  $\rho(\mathbf{r})$  の Fourier 変換であることが判り，形状因子と呼ばれる．

## 2.5 形状因子

形状因子は，今回我々が調べようとしている空間的な広がりを持つ物体の電荷分布に関する情報を有している．電子と電荷分布との相互作用は，電磁場の量子である光子の交換によって行われる．この光子の換算 de Broglie 波長は，それが持ち運ぶ運動量移行  $q^\mu = (0, \mathbf{q})$  を用いて，

$$\lambda = \frac{\hbar}{|\mathbf{q}|} = \frac{\hbar}{2|\mathbf{p}|\sin\frac{\theta}{2}} \quad (2.132)$$

となる．もし  $\lambda$  が標的粒子の空間的な大きさよりも大きければ，内部構造は分解されず，標的粒子は点状に見える．つまり，原子核による散乱実験を行うと，実験から得られる断面積は  $|\mathbf{q}| \rightarrow 0$  の極限においてのみ Mott の散乱断面積と一致する<sup>\*8</sup>．反対に大きな  $|\mathbf{q}|$  の値では，仮想光子の換算波長が小さくなり空間分解能が上がることで，散乱された電子はもはや標的の電荷全体を見るのではなく，その一部だけを見るようになり，結果測定される断面積は Mott の散乱断面積よりも小さくなる．これはまさに，原子核が空間的に広がっていることの証である．

以下では球対称な系<sup>\*9</sup>の形状因子に話を限る．すると，等方性より形状因子 (2.128) は，

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}) &= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \rho(r) e^{-i|\mathbf{q}|r\cos\theta} \\ &= 4\pi \int_0^\infty dr r \rho(r) \frac{\sin(|\mathbf{q}|r)}{|\mathbf{q}|} \end{aligned} \quad (2.133)$$

<sup>\*8</sup> 後に形状因子のいくつかの例を挙げるが，それら全てで  $|\mathbf{q}| \rightarrow 0 \Rightarrow F(\mathbf{q}) \rightarrow 1$  となっている．

<sup>\*9</sup> いくつかの原子核，特にランタノイド元素（希土類元素）は回転楕円体に変形していることがわかっている．

規格化条件 (2.131) は,

$$1 = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho(r) \quad (2.134)$$

である．規格化条件 (2.134) に対応して，電荷の平均自乗半径は，

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty dr r^4 \rho(r) \quad (2.135)$$

で定義される．このように電荷分布が動径方向のみに依存する場合には，形状因子は解析的に計算可能であることが多く，ここでは，(i)  $\delta$  関数型，(ii) 指数関数型，(iii) Gauss 分布型，(iv) 一様球型，(v) Woods-Saxon 型，の 5 つの電荷分布に対する形状因子について考える．

(i)  $\delta$  関数型

$$\rho(r) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \quad F(\mathbf{q}) = 1 \quad \sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0$$

電子<sup>\*10</sup>や  $\mu$  粒子などの構造を持たない点状の粒子の電荷分布がこれにあたる． $\mu$  粒子 (106MeV)-ビームエネルギー 200MeV 電子散乱を例に挙げる．

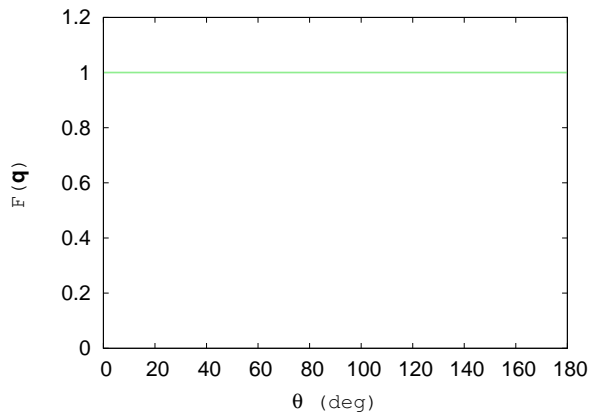


図 2.11  $\delta$  関数型電荷分布に対する形状因子

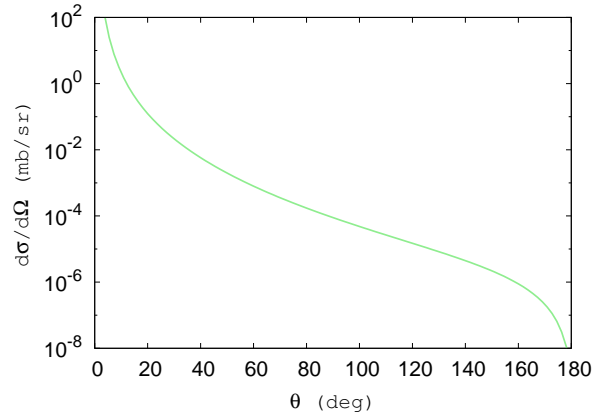


図 2.12  $\delta$  関数型電荷分布に対する断面積

(ii) 指数関数型

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi\lambda^3} \exp\left[-\frac{r}{\lambda}\right] \quad F(\mathbf{q}) = \frac{1}{(1 + |\mathbf{q}|^2\lambda^2)^2} \quad \sqrt{\langle r^2 \rangle} = 2\sqrt{3}\lambda$$

核子は点状でも，一様に帯電した球でもない，たいへん長く裾を引いた拡がりを持った物体であることがわかっている．陽子 (938MeV) <sup>\*11</sup> -ビームエネルギー 200MeV 電子散乱を例に挙げる．以下のグラフは  $\lambda = \frac{1}{4.27} \text{fm}$  として計算したものである [1]．

<sup>\*10</sup>  $e^-e^-$  散乱では同種粒子の不可弁別性による干渉効果が現れる．

<sup>\*11</sup> 陽子の電荷半径はおよそ 0.8fm で，その構造を研究するには数百 MeV～数 GeV のエネルギーが必要である．この領域ではもはや標的の反跳を無視できず，散乱における運動量移行は 3 次元ではなく 4 次元で考えなければならない．両者が近似的に等しくなるのは  $|\mathbf{q}| \rightarrow 0$  の時だけである．(図 (2.4) 参照)

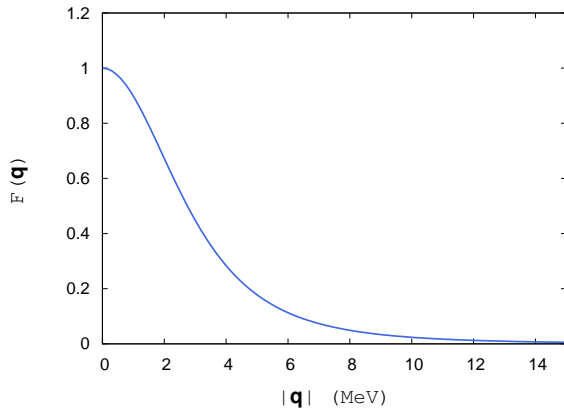


図 2.13 指数関数型電荷分布に対する形状因子

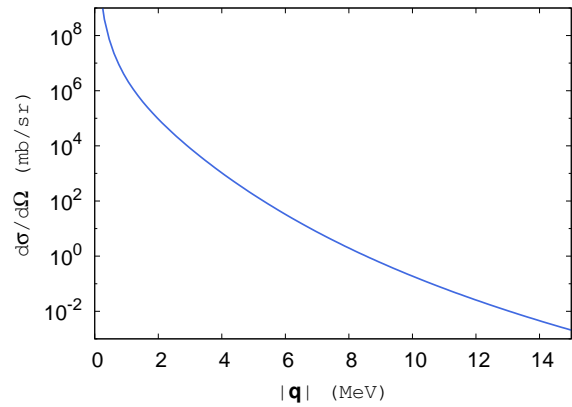


図 2.14 指数関数型電荷分布に対する断面積

(iii) Gauss 分布型

$$\rho(r) = \frac{1}{(2\pi\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{r^2}{2\lambda^2}\right] \quad F(\mathbf{q}) = \exp\left[-\frac{|\mathbf{q}|^2\lambda^2}{2}\right] \quad \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{3}\lambda$$

He や Li, Be のような軽い核では, 原子核の内部で核子密度が一定でないことがわかっている.  ${}^6_3\text{Li}$ (5.60GeV)-ビームエネルギー 200MeV 電子散乱を例に挙げる. 以下のグラフは  $\lambda = 1\text{fm}$  <sup>\*12</sup> とし て計算したものである.

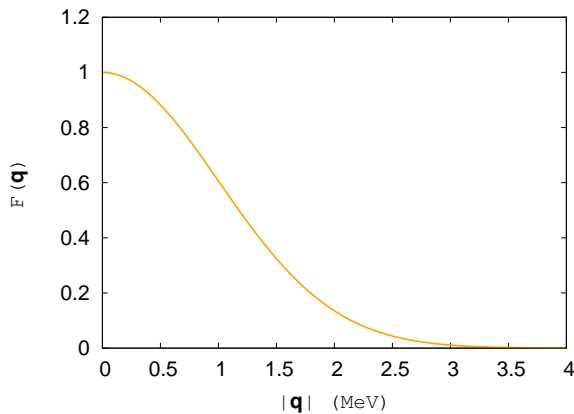


図 2.15 Gauss 分布型電荷分布に対する形状因子

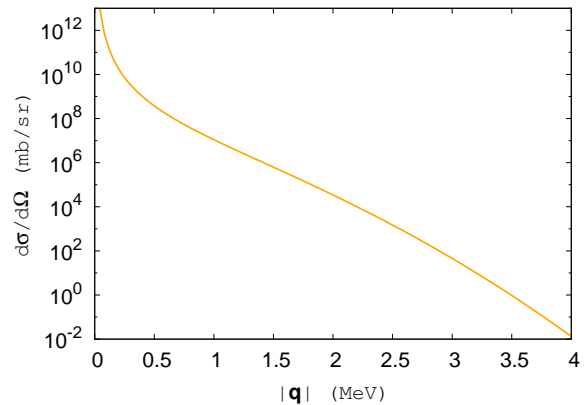


図 2.16 Gauss 分布型電荷分布に対する断面積

\*12 [7] では, Gauss 分布型を

$$\rho(r) = \frac{2}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{a_0^3(2+3\alpha)} \left(1 + \alpha \frac{r^2}{a_0^2}\right) \exp\left[-\frac{r^2}{a_0^2}\right] \quad \alpha = \frac{Z-2}{3}$$

$$F(\mathbf{q}) = \left\{1 - \frac{\alpha|\mathbf{q}|^2 a_0^2}{2(2+3\alpha)}\right\} \exp\left[-\frac{|\mathbf{q}|^2 a_0^2}{4}\right] \quad \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{11}{6}} a_0$$

で補正した結果,  $a_0 = 1.80\text{fm} \sim \sqrt{2}\lambda$  を得ている.



(iv) 一様球型

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & (0 \leq r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases} \quad F(\mathbf{q}) = \frac{3}{(|\mathbf{q}|R)^3} \{ \sin(|\mathbf{q}|R) - |\mathbf{q}|R \cos(|\mathbf{q}|R) \} \quad \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3}{5}} R$$

${}^4_2\text{He}$ (3.73GeV),  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ (37.2GeV),  ${}^{58}_{28}\text{Ni}$ (54.0GeV),  ${}^{152}_{62}\text{Sm}$ (142GeV),  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ (194GeV)-ビームエネルギー 200MeV 電子散乱を例に挙げる．以下のグラフは  $R = 1.21 \cdot A^{\frac{1}{3}} \text{ fm}^{*13}$  として計算したものである [1] .

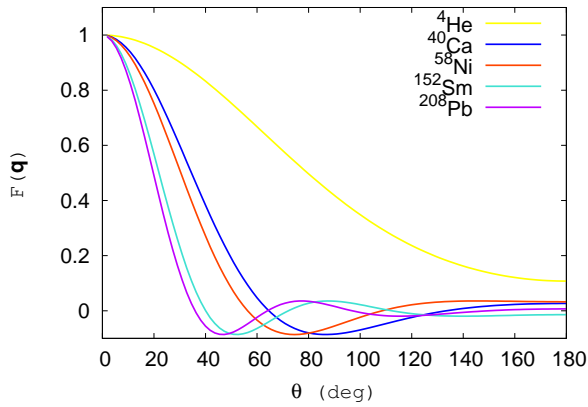


図 2.17 一様球型電荷分布に対する形状因子

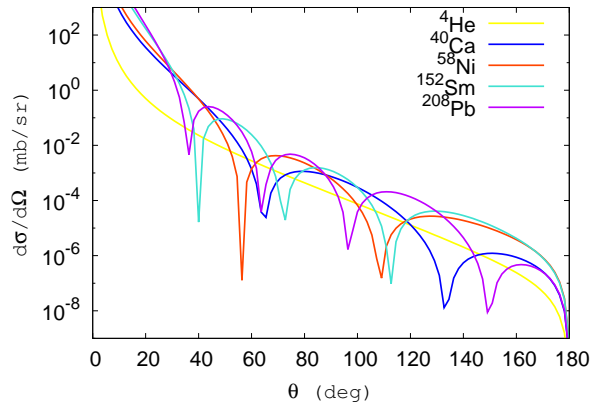


図 2.18 一様球型電荷分布に対する断面積

回折の極小値は

$$|\mathbf{q}|R = \tan(|\mathbf{q}|R) \approx 4.49, 7.73, 10.9, 14.1, \dots (\times \hbar c) \text{ MeV} \cdot \text{fm} \quad (2.136)$$

のところに現れる．原子核の半径に関する情報は形状因子の零点の位置によってばかりでなく,  $|\mathbf{q}| \rightarrow 0$  での形状因子の振る舞いからも引き出せる．式 (2.133) を  $|\mathbf{q}|$  の冪に展開すると,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}) &= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \rho(r) \sum_{n=0}^\infty (-i|\mathbf{q}|r \cos \theta)^n \\ &= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \rho(r) \left\{ 1 - \frac{1}{2}(|\mathbf{q}|r)^2 \cos^2 \theta + \dots \right\} \\ &= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho(r) - \frac{|\mathbf{q}|}{6} 4\pi \int_0^\infty dr r^4 \rho(r) + \dots \end{aligned} \quad (2.137)$$

$$= 1 - \frac{|\mathbf{q}|^2 \langle r^2 \rangle}{6} + \dots \quad (2.138)$$

と書ける．したがって,  $\langle r^2 \rangle$  を

$$\langle r^2 \rangle = -6 \left. \frac{dF(\mathbf{q})}{d|\mathbf{q}|^2} \right|_{|\mathbf{q}|^2=0} \quad (2.139)$$

のように決めるには, 形状因子  $F(\mathbf{q})$  を  $|\mathbf{q}|$  のたいへん小さな値まで測ることが必要である．

\*13 中ぐらいいし重い原子核では近似的に  $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.94 \cdot A^{\frac{1}{3}} \text{ fm}$  が成り立つ [1] .

(v) Woods-Saxon 型

1950年代半ば以降に様々な加速器によって原子核の形状因子の精密測定が数多く行われてきた。<sup>\*14</sup>その結果、原子核ははっきりとした縁を持った球体ではなく、その内部ではほぼ一定の、表面付近の比較的広い領域で緩やかに減少する、電荷密度分布をしているということが解った。すなわち、動径方向の電荷分布はよい近似で Fermi 分布関数として記述される。

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{\frac{r-\mu}{\lambda}}}$$

$^{197}_{79}\text{Au}$ (183GeV)-ビームエネルギー 200MeV 電子散乱を例に挙げる。以下のグラフは  $\mu = 1.07 \cdot A^{\frac{1}{3}} \text{ fm}$ ,  $\lambda = 0.54 \text{ fm}$  として区分求積法により計算したものである [1]。

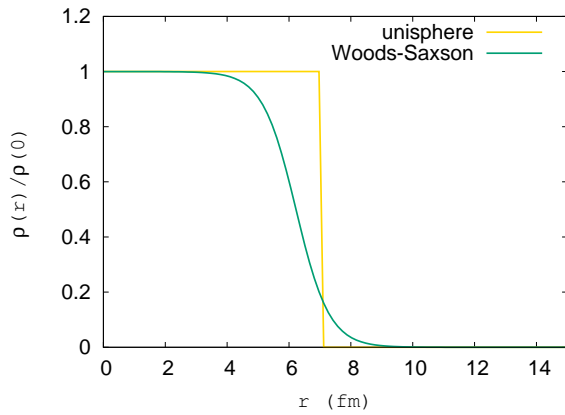


図 2.19 一様球型, Woods-Saxon 型電荷分布

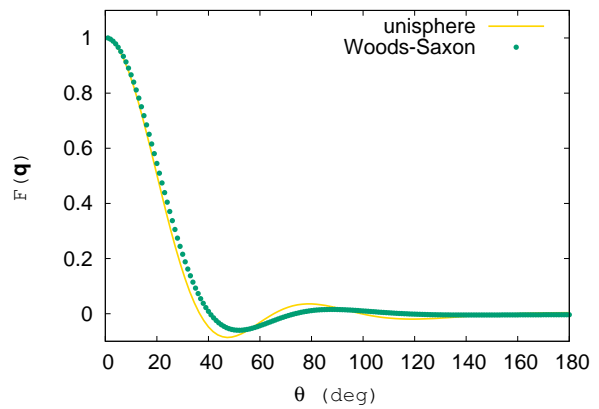


図 2.20 一様球型, Woods-Saxon 型形状因子

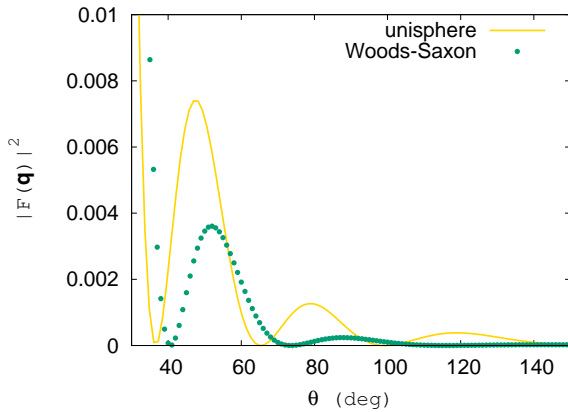


図 2.21 一様球型, Woods-Saxon 型  $|F(\mathbf{q})|^2$

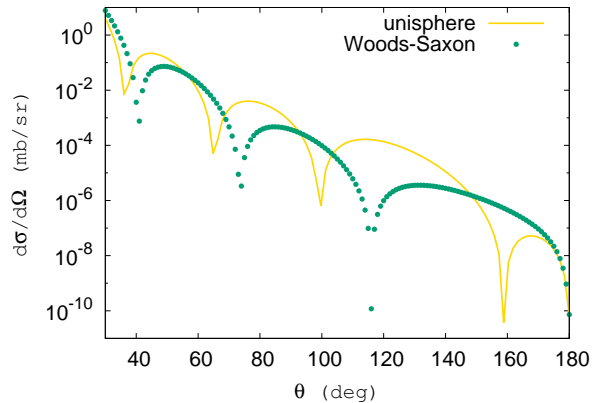


図 2.22 一様球型, Woods-Saxon 型断面積

このように一様球型と Woods-Saxon 型を比較すると、はっきりとした縁を持つ物体による散乱の方が、回折の極大・極小が顕著に現れることが見て取れる。

<sup>\*14</sup> 1961 年には R. Hofstadter(1915 ~ 1990) が「加速器による高エネルギー電子散乱の研究と核子の構造に関する発見」によりノーベル物理学賞を受賞している。

## 第3章 実験

### 3.1 実験設備

本実験は京都大学原子炉研究所 (KURRI) 中性子発生装置室の L バンド電子線形加速器を使用して実施した。施設全体図を図に示す。2本の進行波型加速管を持つライナックで加速されたパルス状の電子ビームをターゲット室に設置した標的に照射した。今回実験に使用したビームのピーク電流は数 mA であったためビームのエネルギーは 46MeV と仮定している。

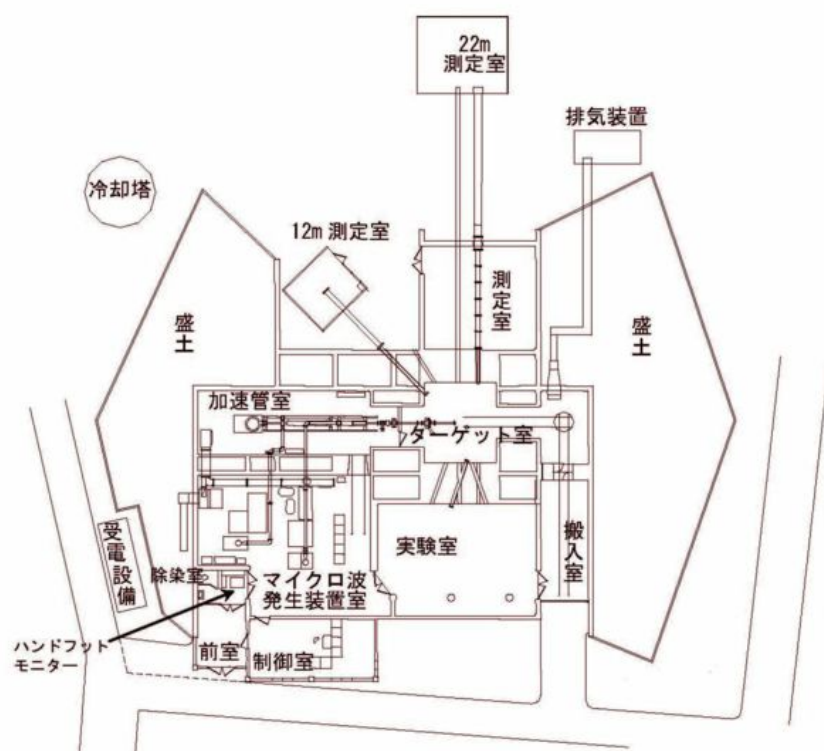


図 3.1 施設全体図

ターゲット室になるべく立ち入ることなく実験をするために、本実験では、実験室とターゲット室の間の壁の中にパイプを通してその穴を通じての遠隔操作によって測定を行った。実験室周りの位置関係を図に示す。

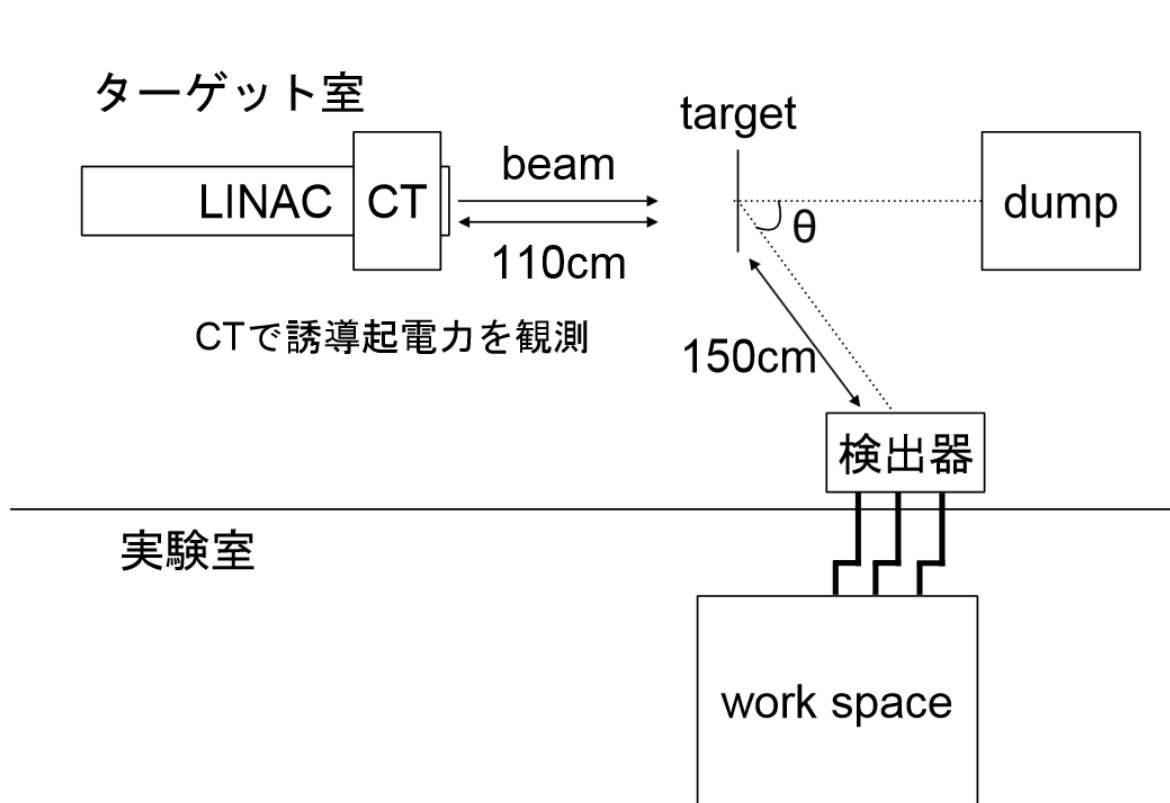


図 3.2 実験室及びその周りの位置関係

## 3.2 セットアップ

以下の装置を用いて実験を行った。

- プラスチックシンチレータ (30mm×30mm×5mm)1 枚
- プラスチックシンチレータ (30mm×30mm×30mm)1 枚
- 光電子増倍管 (PMT)2 本
- ライトガイド 2 枚
- 炭素板

プラスチックシンチレータと PMT は光学接着剤で固定されており、そのまわりはブラックシートと遮光テープで遮光されている。

以下では 5.0mm 厚さのシンチレータを接着させた PMT を PMT 1、30mm 厚さのシンチレータを接着させた PMT を PMT 2 と表記する。

## 3.3 検出器

### 3.3.1 使用した検出器

本実験では PMT と Plastic Scintillator を接着した検出器を 2 つ使用した。検出器には様々な放射線が入ってくるが、2 つの検出器を標的に対して同一直線上にならべて coincidence をとることで見たい電子のみを見ることが出来るからである。標的に向かってより前方に設置した方の Plastic Scintillator には薄い物を使用し、後方に設置した方の Plastic Scintillator には厚いものを使用した。前方の Plastic Scintillator が薄いのは側面からの放射線を検出しないためである。また、後方の Plastic Scintillator が厚いのは Plastic Scintillator 中で電子が落としたエネルギーから入ってきた粒子が電子か否かを判別するためである。

- PMT(photomultiplier): 30mm×30mm×46mm (型番号 R7600) 30mm×30mm×40mm(型番号 R8900)
- Plastic Scintillator: 30mm×30mm×30mm,30mm×30mm×0.5mm

### 3.3.2 ノイズの遮蔽

検出器を配置したビーム室は放射化していてノイズが多かったので 20cm×10cm×5cm の鉛ブロック 49 個で検出器を覆い遮蔽を行った (図 3.3)。鉛の厚さとしては一番薄い場所でも 20cm になるように組んだ。これはビーム電子並のエネルギー (40MeV 程度) の電子でも優に遮蔽できる厚さである。鉛には電子ビームが検出器に届くように幅 5cm 長さ 10cm 程度の窓が開いているがこの窓には厚さ 10mm の炭素板が取り付けられている (図 3.4)。この炭素板は X 線と予想される電子ビーム方向からやってくる低エネルギー粒子を遮蔽を減らすために配置した。

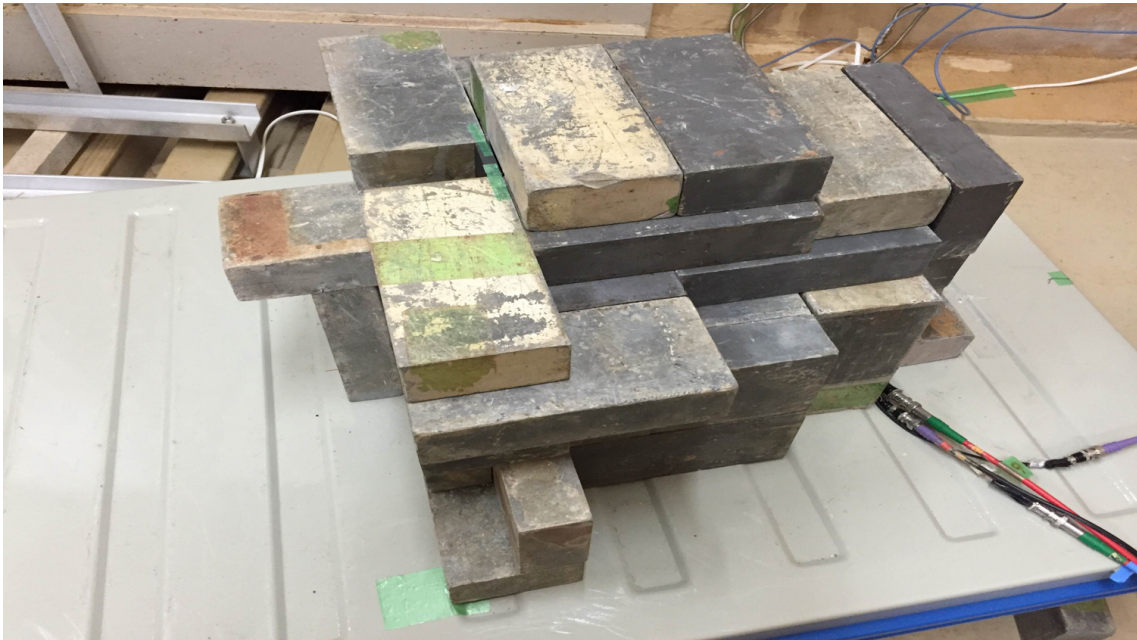


図 3.3 鉛 (遮蔽用)

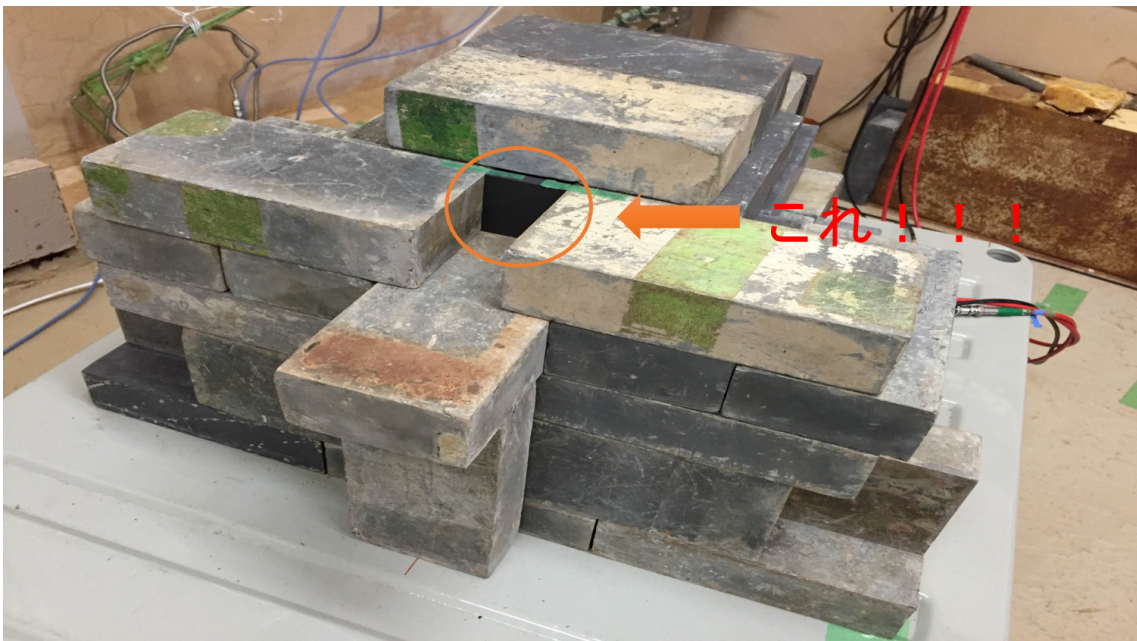


図 3.4 炭素板 (遮蔽用)

### 3.3.3 検出器の配置

2つの検出器は前述したとおり標的に対して同一直線上に配置した(図3.5)。本実験では床から120cmの高さを通る電子ビームを使用した。検出器はビームラインより低い場所に配置した(図3.6, 図3.7, 図3.8)。これは、検出器を覆う600kgもの遮蔽用の鉛を120cmの高さに置くのは危険だという安全上の理由からである。さらに、角度を変えるごとに鉛を積みなおすのは時間がかかるので台車に乗せた。散乱角 $\theta$ は空間制約上、測ることができる最大角( $94^\circ$ )と最小角( $78^\circ$ )とその中間の角度( $86^\circ$ )の3点で決定した。

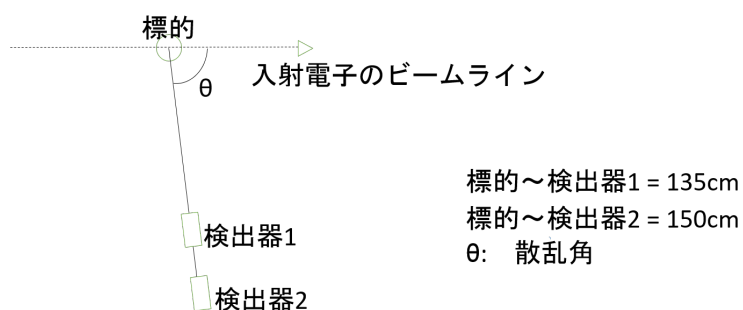


図 3.5 配置

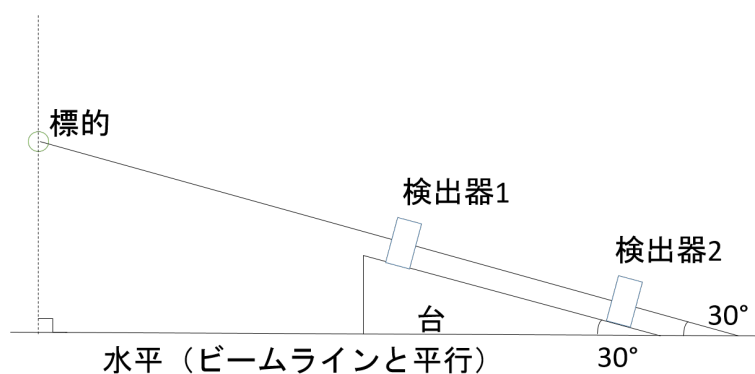


図 3.6 配置 2



図 3.7 配置 3

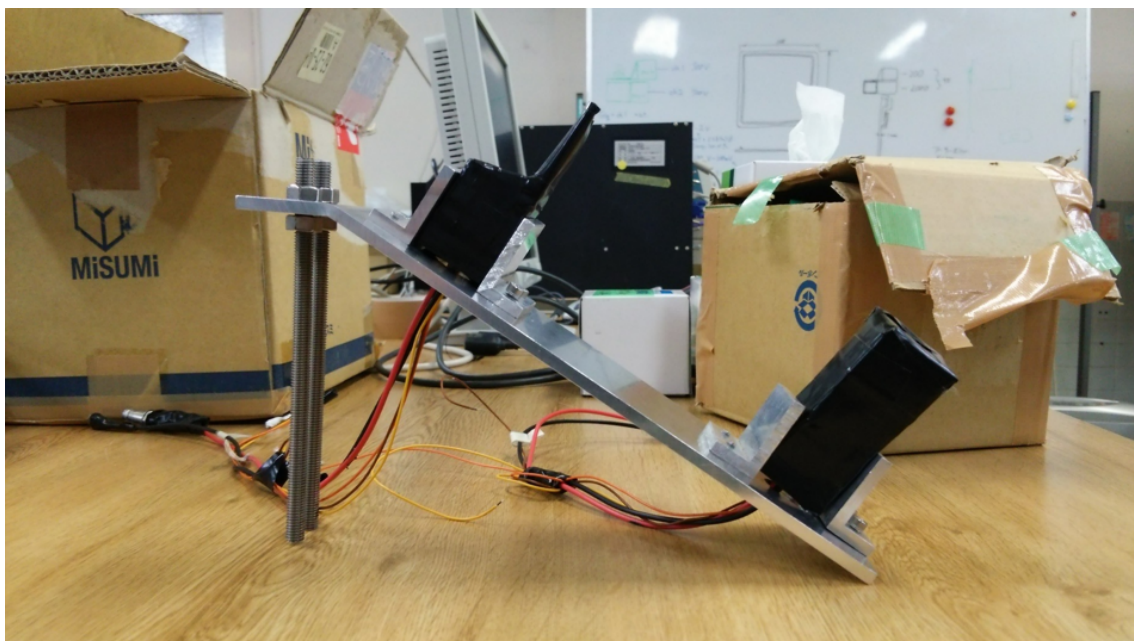


図 3.8 検出器をのせた台



### 3.4 回路

データ取得のために実験に用いた回路を図 3.9 で示す。

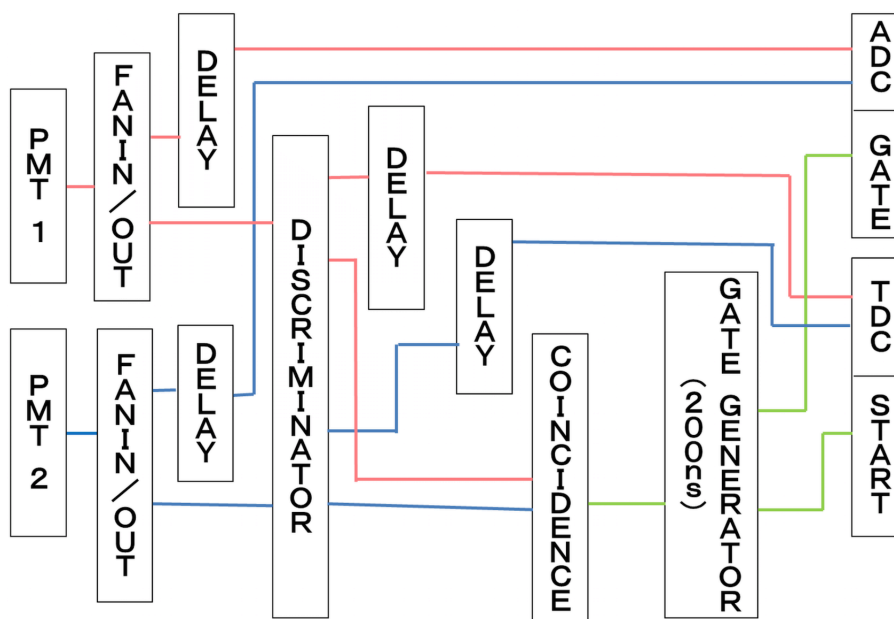


図 3.9 回路図

以下に使用したモジュールを示す。

- FAN IN/OUT(Phillips Scientific Model 740)
- DISCRIMINATOR(Phillips Scientific Model 710)
- COINCIDENCE(Technoland corporation N-TM 103)
- GATE&DELAY(Technoland corporation N-TM 307)
- CLOCK GENERATOR(Technoland corporation N-TM 203)
- VISUAL SCALER(Technoland corporation N-OR 426)
- ADC(Technoland corporation C-TS 301C)
- TDC(ツジ電子 GND-040)
- CCNET(大栄無線電機製)

以下に使用したクレートを示す。

- CAMAC 規格ハーフクレート電源 MODEL(REPIC RPC-2000)
- BIN 付 NIM 電源 (REPIC RPN-005-153)

discriminator の threshold は 30mV、信号の幅は 78ns、GATE の幅は 200ns とした。

他に Visual Scaler と clock generator を用いてデータ取得に要した時間や滞りなく実験を行っているかチェッ

クを行った。

### 3.5 PMT の設定

電圧をかけすぎると信号の形が鈍ってしまったため、信号の形が鋭いピークを表すように電圧を設定した。その結果、PMT1 の電圧を 800V、PMT2 の電圧を 600V に設定した。

### 3.6 TDC の較正

今回の実験では2つのシンチレータを通過する時間のデータを用いて散乱粒子を選別するためにTDCを用いた。

clock generator で信号をつくり、delay を変化させ、TDC の channel と実際の時間との対応関係を調べた。実際の時間はオシロスコープで測定した。

測定結果を表 3.1 に示す。較正の結果を図 3.10、3.11 に示す。

表 3.1 TDC の channel と時間の対応関係

時間 (ns)	channel (PMT1)	channel(PMT2)
51	65	86
59	220	240
75	534	552
88	784	794
96	941	953
108	1168	1178
116	1318	1337
132	1633	1652
153	2041	2032
163	2249	2244
180	2556	2557
187	2723	2713
203	3009	2995
211	3164	3148
228	3480	3461
257	4032	4008

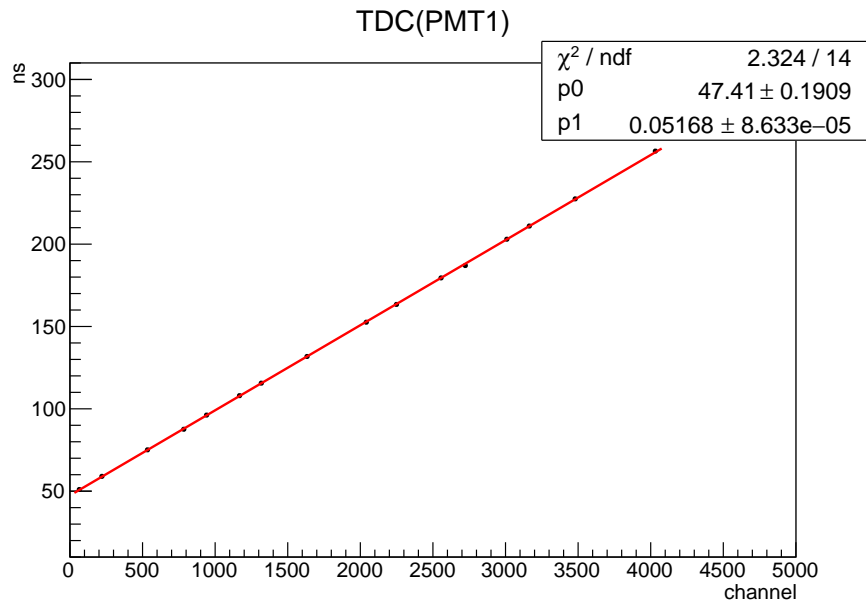


図 3.10 PMT1 の TDC の較正結果

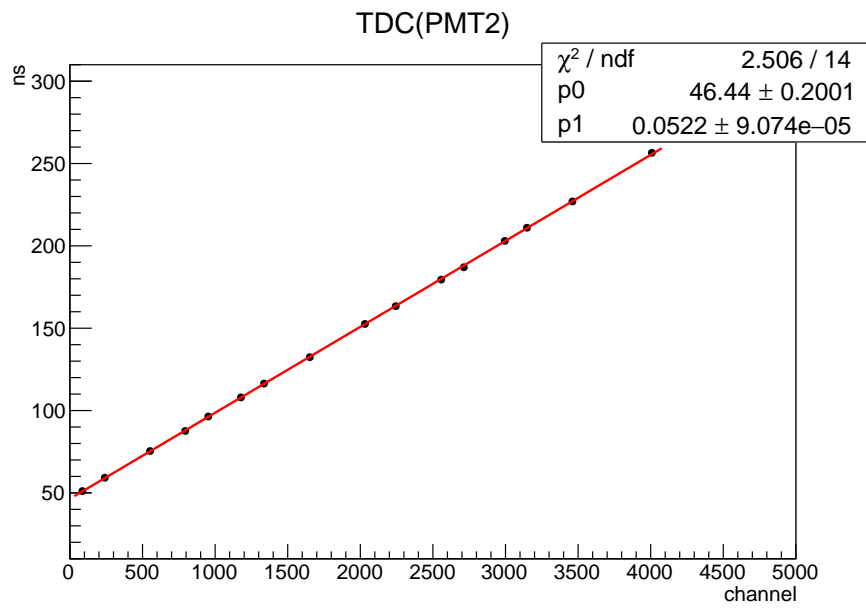


図 3.11 PMT2 の TDC の較正結果

TDC の較正結果は次の式である。

$$\text{PMT1 の時間 (ns)} = \text{channel} \times 0.0517 + 47.4$$

$$\text{PMT2 の時間 (ns)} = \text{channel} \times 0.0522 + 46.4$$

### 3.7 標的について

本実験では、電子ビームに当てる標的として C, Al, Cu, Au の 4 種類の原子核を用いた。標的の大きさは、縦と横のサイズは 50 × 50(mm) で統一してあるが、厚さは使う原子核によって単位時間当たりの散乱電子数が一定になるように変えてある。標的は直接回転台 (PARTIKLE (後述する)) につけるわけにはいかないので、標的を枠に取り付けるわけであるが、その際になるべく電子ビームが枠に当たらないように、また、当たっても散乱の影響が小さいように発泡スチロールや糸を使って取り付けるなど工夫をした。

#### 3.7.1 標的の種類を選定

今回の実験の目的は、原子核の形状因子の角度依存性及び質量数依存性を測定することにあるため、選択する核種としてはなるべく各原子核の質量数が離れているようにすることが望ましい。そこで、周期表の各周期から 1 つずつ原子核を選ぶことにし、同位体ができるだけ少なく質量数に影響が小さいものを選択し、予算内で十分買えるものを選んだ。これらの条件から選んだ核種は C, Al, Cu, Au の 4 種類となった。厚さは、標的からの単位時間当たりの散乱電子数がほぼ同じになるように選んだ。微分断面積を実験値から決定する式は核種を  $i$  とすると

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_i = k \left(\frac{N_{sct}}{\Delta t}\right)_i \left(\frac{M}{\rho\Delta x}\right)_i \quad (k = \text{const}) \quad (3.1)$$

となるが、原子量と標的の密度を代入して適当に比を取れば厚さ  $\Delta x$  を計算することができる。実際にニラコから購入し、作成した標的は次の表 3.2, 3.3 の通りである。

表 3.2 購入リスト

原子核	サイズ (mm)	値段 (円)
C	50 × 50 × 0.2	4400
C	50 × 50 × 0.6	4800
Al	100 × 100 × 0.2	1200
Cu	100 × 300 × 0.04	1800
Cu	100 × 300 × 0.01	2500
Au	50 × 50 × 0.01	28900

表 3.3 作成した標的リスト

標的	サイズ (mm)
C	50 × 50 × 0.2
C	50 × 50 × 0.6
Al	50 × 50 × 0.2
Cu	50 × 50 × 0.04
Cu	50 × 50 × 0.01
Cu	100 × 100 × 0.01
Au	50 × 50 × 0.01

C と Cu については大きさを変えたものと厚さを変えたものとの複数の標的を作成している。これは大きさの違う標的から得られたデータを比較することにより、ビームがどれだけ広がっているかを見積もりを行い、厚さの違う標的から得られたデータを比較することにより、得られた実験データに妥当性があるかを検証するためである。

#### 3.7.2 標的の取り付け

購入した標的はそのままではビームに照射することはできず、何らかの方法で枠に固定する必要がある。ビームを照射した際になるべく標的の原子核以外の部分で散乱がおきないように配慮して標的の固定を行った (図 3.12, 図 3.13)。ビームが標的付近では 10 × 10 (cm) くらいまでに広がっているというのが当初の見積

もりであったため、十分にビームが当たらないように枠のサイズは  $20 \times 20$  (cm) に決定した。また、枠の材質についてもなるべく枠での散乱を抑えるために密度の低い発泡スチロールを選び、枠と標的の固定の際には図 3.12 のように対角線を糸で結んで瞬間接着剤で接着し、固まった後に図 3.13 のようにハサミで糸と標的の重なっている部分を切るという方式を採用した。

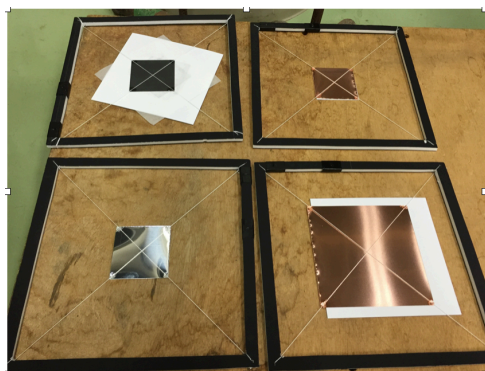


図 3.12 作成中の標的



図 3.13 完成した標的

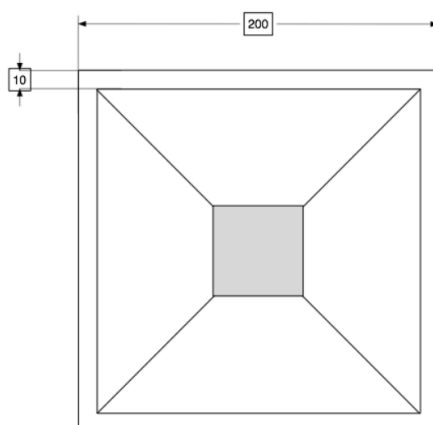


図 3.14 枠の設計図

### 3.8 PARTIKLE

実験中にターゲット室に立ち入ることなく円滑にターゲット交換を行うため、我々は PARTIKLE (Pentagonally Aligned Rotating Target in Kulli Linac Experiment) (図 3.15 参照) というデバイスを開発した。実験室側から LAN ケーブルを介した遠隔操作によって、PARTIKLE を回転させてターゲット交換を行うことができる。1 つのターゲット交換に要する時間はおおよそ 2~3 分であるが、実際に実験室に立ち入ってターゲットを人間の手によって交換し、アラインをし直すのに 15 分くらいはかかるので画期的な標的交換方法だと言える。

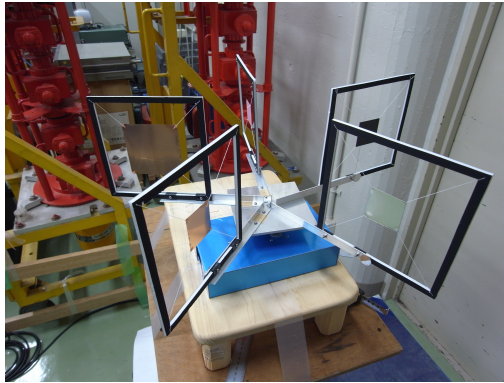


図 3.15 PARTICKE の全体図

### 3.8.1 主な部品

装置の中身は次の 2 枚の写真のようである．ターゲットの回転部分にはステッピングモーターを使い，マイコンとモータードライバ（図 3.16,3.17 参照）によって回転を制御した．

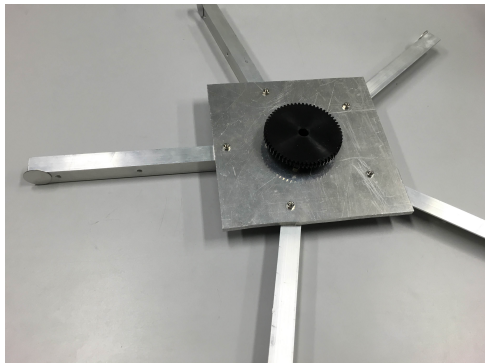


図 3.16 プロペラ部分の裏の様子

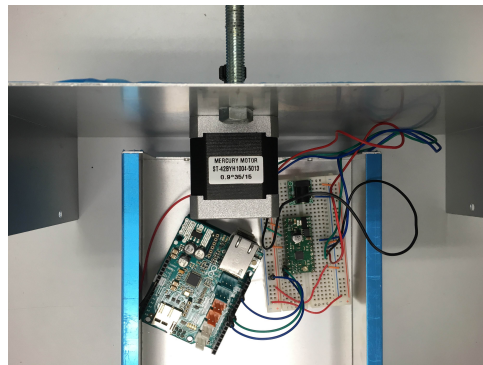


図 3.17 マイコンとモータードライバとモーター

デバイスの主な部品は次の通りである。

- プロペラ

アルミニウム製の 5 本の羽根と固定台，回転軸部分には歯車（SSY1-60，以下ワークギアと呼ぶ）が付いており，羽根の先にターゲットを固定させモーターによって回転させる．また，回転角の ALIGNMENT 用に羽根の先端部分には小さな鏡を取り付けてある．正五角形になるように羽根は配置されているが，手作りのために多少ずれてしまっている．ズレに関する評価は後述する．

- マイコン

緑色の大きなボードがマイコンで Arduino Uno と呼ばれるものである．今回の実験では遠隔操作用に LAN ケーブルが接続できる Arduino イーサネットシールド 2 も用いている．実験室側のパソコンからマイコンに指示を送ると，マイコンがモーターを動かすパルス信号を予め決められた回数だけモータードライバに対して送信するという仕組みである．モーターはパルス信号を受信し，信号の数に比例した回転角だけ回転するようになっている．配線やモーターを動かすプログラムは，いろいろな web ページを参考にしながら自作した．

- モータードライバ

マイコンから送られてくる電気パルスだけでは，電圧が不足していてモーターを動かすことができず，適正な電圧をモーターに送ることのできる IC が必要となる．A4988 というドライバを使用した．

- ステッピングモーター

内部に複数の電磁石があり，パルス信号に同期して動作する．回転角を非常に良い精度で駆動パルスの数に比例させることができるので，正確な位置決め制御を実現できる（図 3.18 参照）．今回の実験では ST-42BYH1004 というものを用いた．モーターの軸には歯車を取り付けることができ，SSY1-12A という歯車（以下，ピニオンギアと呼ぶ）を取り付け，ワークギアにかませてプロペラを回転させた．

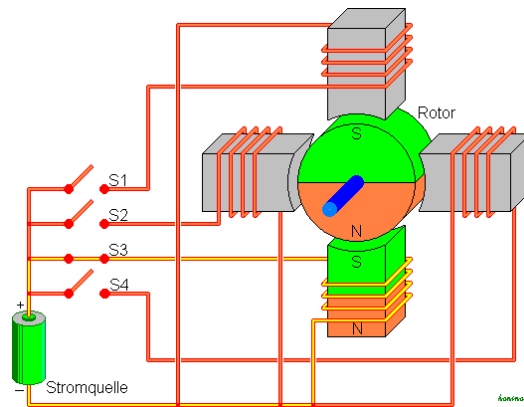


図 3.18 ステッピングモーターの駆動回路の模式図

### 3.8.2 デバイスの精度

この節では，PARTIKLE の回転精度について述べていく．遠隔操作で標的の交換を行っており，実験中は基本的にターゲット室には立ち入っていないため，PARTIKLE がどれだけの精度で標的の交換（つまり回転角の決定）を行うことができるかは非常に重要な要素となってくる．そのため，我々はデバイスの精度に関し



て2つの観点で予め実験をして見積もりを行った。1つ目はステッピングモーターの回転角についてであり、測定をして公称値との比較を行った。2つ目は5枚のプロペラ間の角度の測定である。

このモーターの公称値は、1パルスあたりの回転角が $0.9^\circ$ となっているが、モータードライバの設定（マイクロステップ）で回転角を半分にしている。また、歯数が12のピニオンギアと歯数が60のワークギアを組み合わせて使っているため、最終的に1パルスあたり $0.09^\circ$ プロペラが回転するように設定している。この回転角を確かめるために、京大の我々のゼミ室でレーザートランジットを用いた実験を行った。3.8.1のプロペラの部分でも述べたが、5枚のプロペラにはアラインメント用に小さな鏡が取り付けられており、その部分にレーザーを当てて、跳ね返ってきたレーザーが、プロペラと反対部分にある壁につけた印を照らすかどうかを観察した（図3.19参照）。まず、任意の1枚のプロペラに光を当てて、跳ね返ってきたレーザーが壁の印を照らすように位置関係を調節した。次に、プロペラを $360^\circ$ 回転させるために4000パルスの信号をマイコンから送信し、1周回転した後に跳ね返ってきたレーザーが正しく壁の印を照らしているかを見た。回転角が $360^\circ$ からずれた場合は1パルスずつ調整をして最終的に何パルスの信号を送信したかを記録した。

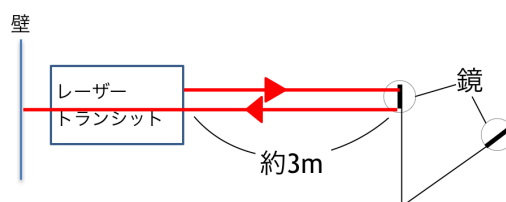


図 3.19 モーターの回転角測定

測定精度についてであるが、プロペラとトランジット（壁）の間を約3mほど離しているので、 $0.09^\circ$ （1パルス）のずれは、壁の上で $3 \tan(2 \times 0.09^\circ) \approx 0.009\text{m} = 0.9\text{cm}$ のずれとして測定され、これは十分目で認識可能なずれであり、精度に関しては十分良いと言える。測定は3回行い、その結果は次の表3.4のようである。

表 3.4 プロペラを  $360^\circ$  回転させるのに必要なパルス数

公称値（計算値）	4000
実験値	
1回目	3999
2回目	4000
3回目	4000

これより、プロペラは誤差0.03%の範囲で1パルスあたり $0.09^\circ$ 回転していることが分かり、回転の誤差は無視できるほど小さいことが分かる。

先に述べたように、このデバイスは手作りしているため、プロペラが本来意図していた正五角形からずれてしまっていた。そこでこのずれを測定するため、先と同じ方法でプロペラ間を移動するために必要なパルスの数を測定した。5枚のプロペラに1~5の番号を振り、隣の羽根に移動するまでに何パルス信号を送信する必要があるかを3回にわたって測定した。測定結果は次の表3.5である。

本実験では、表3.5の採用値を送信パルスとしてマイコンからプロペラに対して信号を送った。

以上2つの測定をしたことにより、PARTIKLEは万全を期して実験に臨むことができるようになった。

表 3.5 プロペラ間のパルス数

羽根番号	1 回目	2 回目	3 回目	採用値
1 2	798	799	798	798
2 3	757	757	757	757
3 4	820	819	819	819
4 5	823	823	823	823
5 1	803	804	803	803

### 3.9 実験手順

本実験では以下の手順で測定を行った。

1. 散乱角  $78^\circ$  の位置に検出器を設置.
2. ビームが出ていない時, ビームを出した時の CT ( Current Transformer ) のデータを記録.
3. Au,Cu,C, ターゲットなし,Al の順でターゲットを変え散乱粒子数を PMT2 の信号が 30000 回 ( C はノイズに対し散乱粒子数が少ないことが予想されたため統計を多く取るために 4500 回 ) 記録されるまで測定.
4. 散乱角  $86^\circ$  の位置に検出器を移動.
5. 2. を再度行う.
6. Al,Cu,C, ターゲットなし,Au の順でターゲットを変え散乱粒子数を  $78^\circ$  と同様に測定.
7. 散乱角  $94^\circ$  の位置に検出器を移動.
8. 2. を再度行う.
9. Au, ターゲットなし,C,Cu の順でターゲットを変え散乱粒子数を測定. 散乱角が大きくノイズに対し散乱粒子数が少ないことが予想されたため, 統計を多く取ることを目的として Au は PMT2 の信号を 30000 回を記録する測定を 3 回行った. ターゲットなし, C に関してはデータを得るのに時間を要し, 実験時間の都合上 30000 回を記録する測定を 1 回行うにとどめた.
10. ビーム強度が弱くなってきたことが確認されたためビーム強度を強めた.
11. 2. を再度行う.
12. Cu,Al の順でターゲットを変え PMT2 の信号を 30000 回記録する測定を 3 回繰り返し行った.

## 第 4 章 解析

### 4.1 散乱粒子数

#### 4.1.1 測定データ

PMT2 の ACD データは図 4.1 のようになった. 例として  $78^\circ$  Au の測定結果を挙げる.

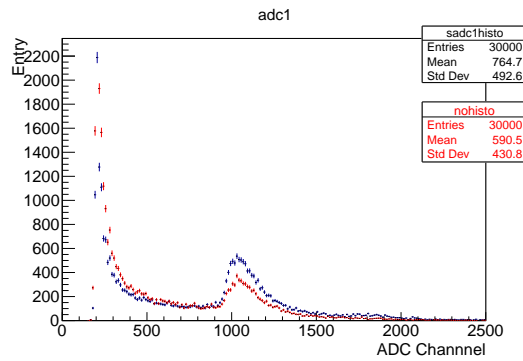


図 4.1 78° 散乱測定時の PMT2 の ADC データ 青：Au ターゲット 赤：ターゲットなし

#### 4.1.2 解析手法

各測定 of ADC, TDC データに対し以下の手順で解析を行った。

1. 2つのシンチレータを鳴らした粒子をターゲット方向からの粒子として識別する為に TDC キャリブレーションの結果を利用しデータにカットをかける。
2. PMT2 の ADC の channel 範囲 [850,1900] でエントリー数を数え上げる。
3. 測定時間で計数を規格化する。(図 4.2)
4. ターゲットがある時の計数から同角度でターゲットがない時の計数を引き、その結果をターゲット由来の散乱電子の計数  $N$  として扱う。(図 4.3)
5. 図 4.2 において ADC の channel 範囲 [850,1650], [1650,1900] に見られるピークはそれぞれ電子 1 個, 電子 2 個がほぼ同時に検出器に入ったことに対応していると考え

$$\frac{N_{\text{sct}}}{\Delta t} = [850, 1650] \text{ の計数 } N1 + [1650, 1900] \text{ の計数 } N2 \times 2 \quad (4.1)$$

として単位時間当たりの散乱粒子数  $\frac{N_{\text{sct}}}{\Delta t}$  を求める。

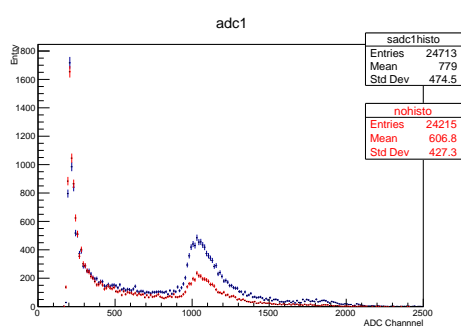


図 4.2 TDC データの条件でカットをかけ測定時間により規格化された ADC データ  
青：Au ターゲット 赤：ターゲットなし

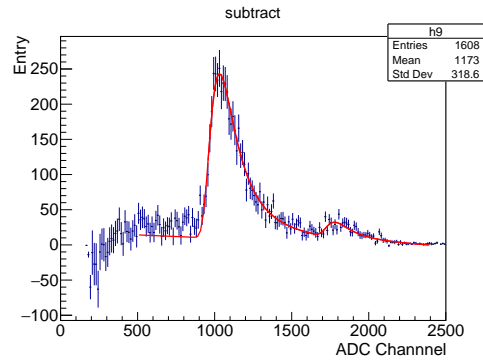


図 4.3 ADC データのターゲットの有無の差, Fit は Landau 関数  $\times 2$  + 一次関数で行った

\* TDC によるデータのカット

ターゲットが Au で散乱角度  $78^\circ$  の PMT1、2 の TDC の相関図を図 4.4 に示す。

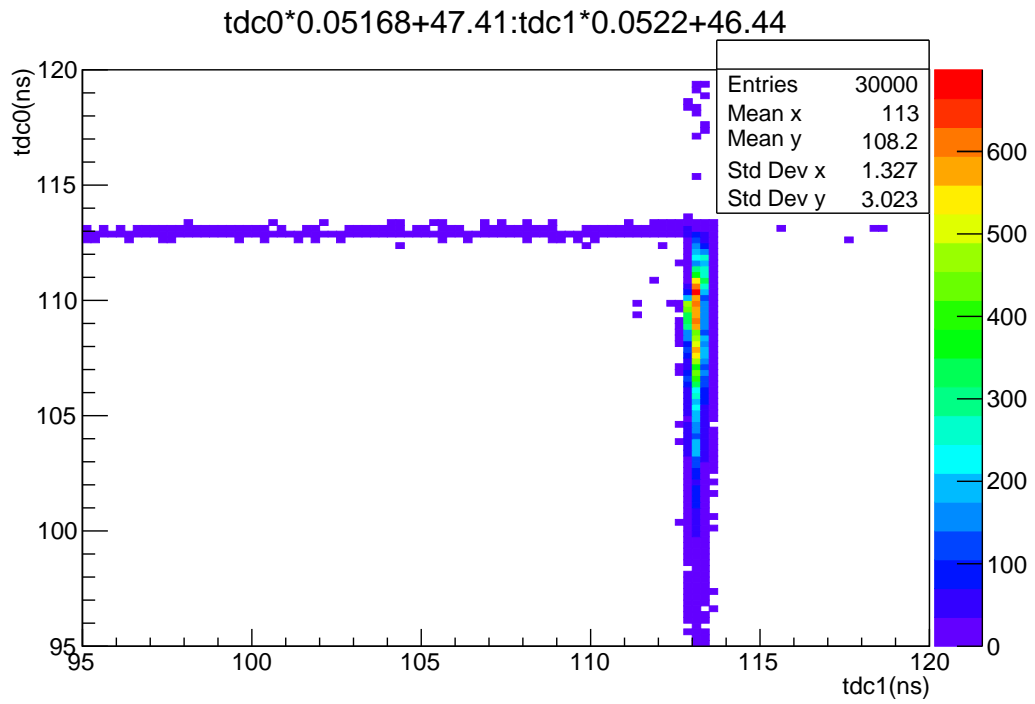


図 4.4 TDC の相関図

図 4.4 にあるようにデータ取得のトリガーは tdc1 であるので、 $112.7\text{ns} < tdc1 < 113.8\text{ns}$  のデータと時間差が  $0 \sim 14\text{ns}$  のデータのみを PMT1、2 を同時に通過したものとみなして、解析を行った。

\*数え上げ範囲選択の正当性

数え上げる channel 範囲 [850,1900] を 50channel ずつ前後にずらした際の規格化されたターゲット由来の計数とその変化  $\delta n$  の割合は以下の表の通り

散乱角	数え上げの範囲・計数変化量 $\delta n$	[850, 1900]	[800, 1900]	$\delta n$ (割合%)	[900, 1900]	$\delta n$ (割合%)	[850, 1950]	$\delta n$ (割合%)	[850, 1850]	$\delta n$ (割合%)
78°	Au	21.7	22.4	0.692 (3.2%)	20.9	-0.720 (3.3%)	22.1	0.419 (1.9%)	21.2	-0.495 (2.3%)
	Cu	18.1	18.7	0.586 (3.2%)	17.5	-0.635 (3.5%)	18.4	0.284 (1.6%)	17.8	-0.320 (1.8%)
	Al	18.3	19.0	0.664 (3.6%)	17.7	-0.692 (3.8%)	18.6	0.269 (1.5%)	18.0	-0.328 (1.8%)
	C	11.9	12.4	0.495 (4.2%)	11.4	-0.505 (4.2%)	12.0	0.130 (1.1%)	11.8	-0.160 (1.3%)
	なし	9.83	10.3	0.446 (4.5%)	9.31	-0.518 (5.3%)	9.93	0.100 (1.0%)	9.67	-0.158 (1.6%)
86°	Au	16.0	16.5	0.552 (3.5%)	15.4	-0.602 (3.8%)	16.2	0.269 (1.7%)	15.7	-0.289 (1.8%)
	Cu	12.8	13.3	0.488 (3.8%)	12.3	-0.510 (4.0%)	12.97	0.133 (1.0%)	12.6	-0.206 (1.6%)
	Al	9.35	9.71	0.365 (3.9%)	8.93	-0.415 (4.4%)	9.44	0.0857 (0.92%)	9.25	-0.100 (1.1%)
	C	7.04	7.39	0.354 (5.0%)	6.70	-0.344 (4.9%)	7.10	0.0559 (0.79%)	6.98	-0.0603 (0.86%)
	なし	6.05	6.39	0.341 (5.6%)	5.72	-0.330 (5.5%)	6.08	0.0335 (0.55%)	6.00	-0.0464 (0.77%)
94°	Au	6.71	7.01	0.303 (4.5%)	6.39	-0.311 (4.6%)	6.75	0.0446 (0.66%)	6.65	-0.0564 (0.84%)
	Cu (ビーム弱時)	5.86	6.14	0.286 (4.9%)	5.57	-0.285 (4.9%)	5.90	0.0417 (0.71%)	5.82	-0.0371 (0.63%)
	Cu (ビーム強時)	7.78	8.15	0.379 (4.9%)	7.41	-0.369 (4.7%)	7.84	0.0648 (0.83%)	7.68	-0.0989 (1.27%)
	Al	7.36	7.71	0.345 (4.7%)	7.01	-0.351 (4.8%)	7.43	0.0660 (0.90%)	7.27	-0.0880 (1.20%)
	C	4.49	4.72	0.230 (5.1%)	4.26	-0.234 (5.2%)	4.52	0.0285 (0.63%)	4.45	-0.0404 (0.90%)
	なし	3.51	3.71	0.204 (5.8%)	3.29	-0.214 (6.1%)	3.53	0.0173 (0.49%)	3.49	-0.0185 (0.53%)

図 4.5 各測定, 各 ADCchannel 範囲の規格化された計数と変化の割合

いずれの測定においても変化の割合は 5 %程度であり数え上げ範囲の選択は妥当であると言える。

[850,1650] は ADC キャリブレーションの結果, エネルギー 8 MeV 程度に対応しておりこれは 40MeV 程度の電子が PMT 2 で落とすエネルギーを Bethe-Broch の式から計算した結果と大方一致する。

[850,1650] は 16MeV 程度に対応することから電子が 2 つ同時に入ったと考えることができる。

\*94° 測定時のビーム強度変化に伴うターゲットなしの計数の補正

今回 94° 測定途中でビームを強めた後のターゲットなしのデータを取っていない。しかし Cu ターゲット時のデータを比較してみるとビーム強度が上がったことによってバックグラウンドも増えていることが考えられる。従って, バックグラウンド量はビーム強度に比例しているとしてビームを強めた後の測定の解析に使用するターゲットなしの計数  $N'_{no}$  に対し次のような補正を行った。

$$N'_{no} = N_{no} \frac{N'_{Cu}}{N_{Cu}} \quad (4.2)$$

ここで  $N_{no}$  はビーム増加前のターゲットなしの計数,  $N_{Cu}$ ,  $N'_{Cu}$  はそれぞれビーム増加前後の Cu ターゲットの [850,1900]channel における計数である。散乱角 94° の Al, ビームを強めた後の Cu の測定の解析に

は  $N'_{no}$  を用いた.

#### 4.1.3 誤差の評価

散乱粒子数  $N$  の誤差の評価に関して, 系統誤差は数え上げを行う範囲の選択による誤差  $\delta n$  を考慮し,

$$\delta N_{\text{系統誤差}} = \sqrt{\sum_i^{\text{ターゲットあり}} \delta n_i^2 + \sum_j^{\text{ターゲットなし}} \delta n_j^2} \quad (4.3)$$

として,

$$\delta N_{\text{統計誤差}} = \sqrt{N_{\text{あり}}^2 + N_{\text{なし}}^2} \quad (4.4)$$

を統計誤差とした.

#### 4.1.4 解析結果

解析の結果得た  $\frac{N_{\text{sct}}}{\Delta t}$  は以下の通り

散乱角	ターゲット	Nsct/Δt (個)	
78°	Au	11.8	±0.782
	Cu	8.29	±0.542
	Al	8.52	±0.572
	C	2.09	±0.143
86°	Au	9.92	±0.695
	Cu	6.79	±0.480
	Al	3.30	±0.238
	C	0.992	±0.076
94°	Au	3.20	±0.248
	Cu (ビーム弱時)	2.35	±0.187
	Cu (ビーム強時)	3.25	±0.247
	Al	2.83	±0.213
	C	0.986	±0.0804

図 4.6 各測定における単位時間当たりの散乱粒子数

## 4.2 ビームの解析

### 4.2.1 ビームの電荷の計算

単位時間あたりの散乱粒子数から微分断面積を計算するためには, 入射ビームの総電荷を求める必要がある. この章では CT (Current Transformer) の電流をオシロスコープで記録したビーム波形からどのようにして電荷を計算したのかについて説明していく. 以下に, ビームラインと標的 (ターゲット) の位置関係を示しておく.

まずはビームが出ている時の波形と出ていない時の波形を記録し, ビームのパルスに当たる部分がオシロ上でどのように出ているのかを確認した. ビームが出ている時の波形は各測定角度において標的を変えるごとに

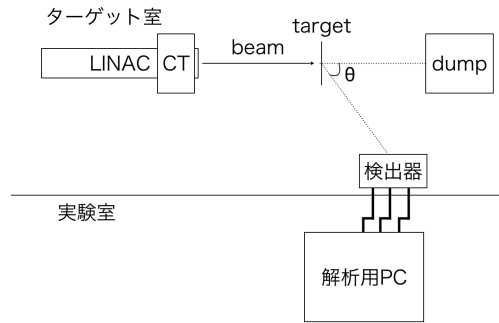


図 4.7 実験室内部の模式図

測定したが、ビームを止めた時の波形は角度を変えた時にしか測定しなかったため、今回の実験ではビームによる誤差が比較的大きいものとなってしまったが、これについては後述する。図 4.8 の丸で囲っているところがビームパルスであると考えられる。グラフの縦軸と横軸はそれぞれ電圧と時間を表しており単位は電圧は V で時間は s である。

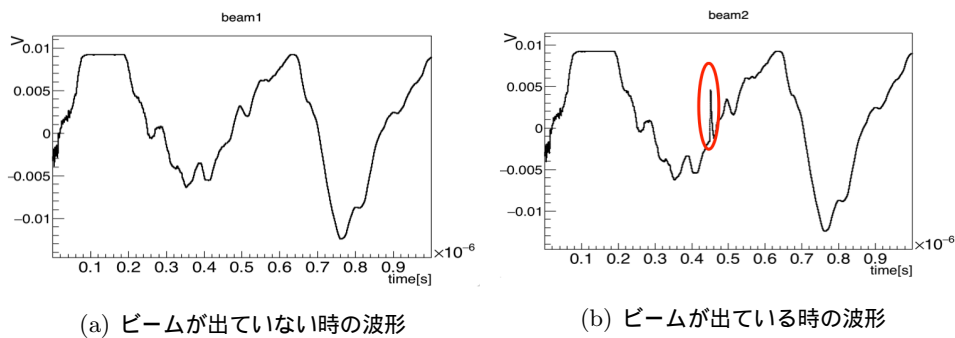


図 4.8 ビーム波形の比較

このグラフを見ると分かるようにビームの出ている出していないに関わらず、オシロの電圧はかなり上下に振動していることが分かった。そこでビームのピークを取り出して解析に使う際には、ビームの出ている波形をバックグラウンドのものだと考えて、ビームが出ている波形から引き算をする事にした。この丸で囲っている部分に先ほど述べた引き算を行って、スケールを変えて詳しく見てみたところ次の図 4.9 のようになった。本来ビームの発生装置から送られてくるビームパルスは 1 つのはずであるが、明らかに 3 つほどピークらしきものが見えてしまっている。これについての原因は現地でも考えたが、詳しいことは何も分からなかった。熊取で加速器の運転を行ってくれた高橋さんによると、今回の実験では普段運転するときには使わないような厳しい設定で運転しており、そのせいでビームが綺麗に分かれず尾ひれを引いたような形になってしまったのではないかとのことだったので、3 つのピークを全てビームのものだとして解析を行った。また、高橋さんによるとオシロで表示される電圧値 V と実際に流れている電流値 I との関係は  $I = 0.52V$  で与えられるとのことだった。

次にどのようにして解析を行ったのかについて説明していく。入射ビームの総電荷を求めるために、グラフの縦軸を電圧から電流へと変換してビームの走った時間で積分する必要がある。グラフは滑らかな曲線ではなく、プロットで描かれているので区分求積法を用いて積分の値を計算した。図 4.10 はグラフのスケール



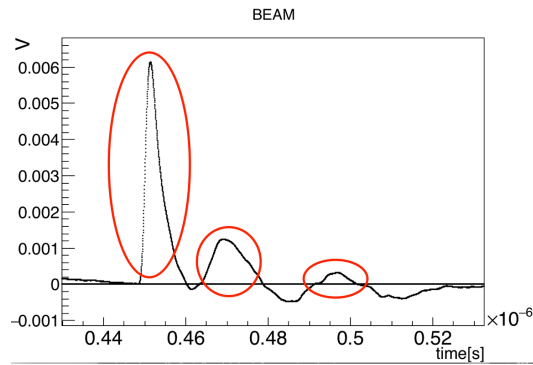


図 4.9 ビームのピーク

を拡大してプロットが見えるようにしたものである．各時間での電圧値を  $y_i$  とすると，プロットの時間幅は  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-11}$  であったので，ビーム 1 パルスあたりの電荷は，

$$Q = 0.52 \Delta t \sum y_i \quad (4.5)$$

で与えられる．

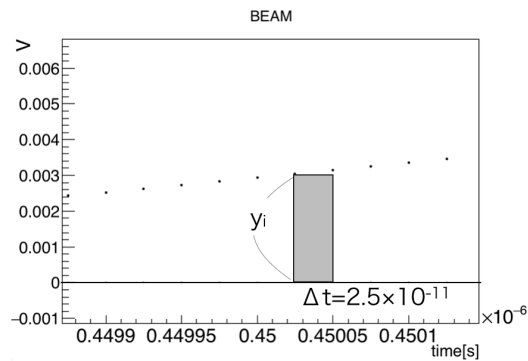
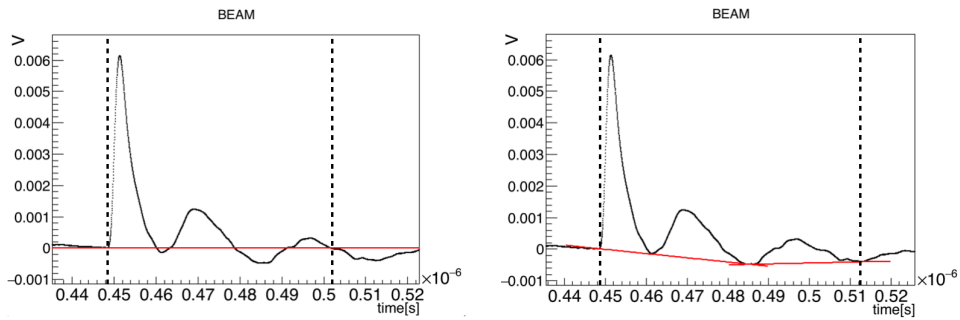


図 4.10 グラフの区分求積

先述したように，図 4.9 に見えるピーク 3 つは全てビームのものであるとしたが確定的な根拠はないため以下に示す 3 通りの方法でビームの電流値を見積もった．

- (a) 電圧値が正になっている部分を積分
- (b) 電圧値が負になっている部分も含めて積分
- (c) 外挿した直線より上の部分を積分

積分結果を次に示す（表 4.1）．断面積の計算には (b) と (c) の平均値を用いた．(b) の値が最小値となり，(c) の値が最大値であるはずなので実際の値はその間にあると思われる．また平均値の (b) や (c) からのずれを誤差として採用値に表記しておいた．



(a), (b) 赤い線は 0V

(c) 赤い線はピークの極小を結んだもの

図 4.11 グラフの 3 通りの積分 積分範囲は点線で示してある

表 4.1 1 パルスあたりの電荷量 ( $\times 10^{-11} \text{C}$ )

角度	$\theta = 78^\circ$	$\theta = 86^\circ$	$\theta = 94^\circ$ (ビーム弱)	$\theta = 94^\circ$ (ビーム強)
(a)	2.08	2.00	1.39	2.06
(b)	1.88	1.82	1.22	1.87
(c)	2.81	2.50	1.98	2.76
採用値	$2.34 \pm 0.48$	$2.16 \pm 0.34$	$1.60 \pm 0.38$	$2.32 \pm 0.45$

#### 4.2.2 ビームサイズの評価

同じ核種で大きさの異なるターゲットを用いてビームサイズの評価を行った。

ターゲットは以下に示す。

- Cu(50mm×50mm×0.04mm)
- Cu(100mm×100mm×0.04mm)

以下では Cu(100mm×100mm×0.04mm) を Cu(Large) と表記する。

散乱粒子数を解析した方法と同様にターゲットを置いていないヒストグラムとターゲットありのヒストグラムを時間で規格化した後、引き算したヒストグラムが図 4.12 である。

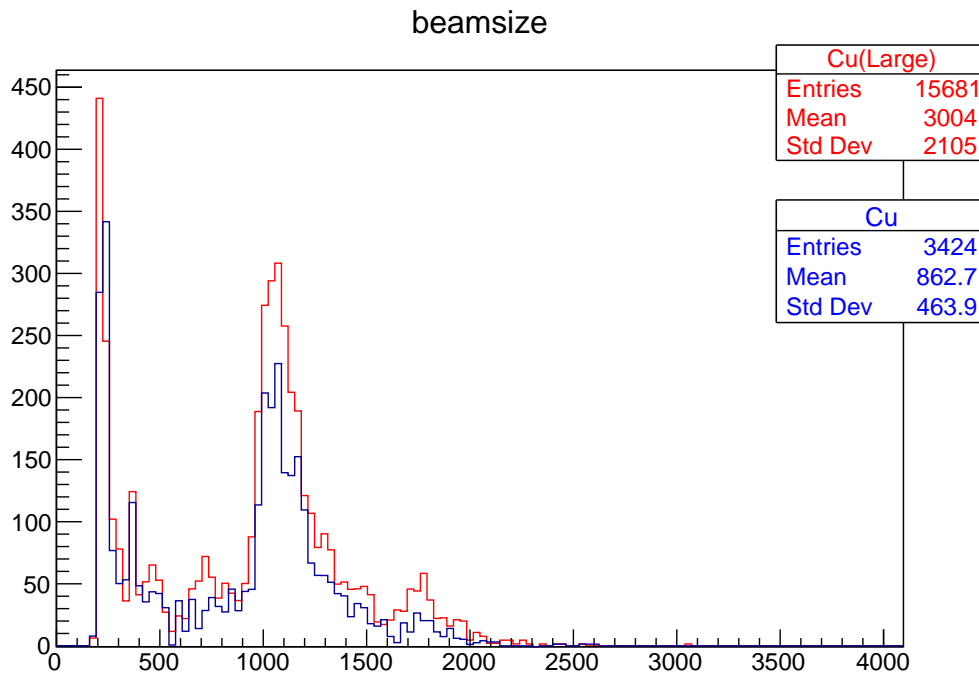


図 4.12 PMT2 の ADC のヒストグラム

散乱粒子数の結果を表 4.2 に示す。

表 4.2  $N_{sct}/\Delta t$  のターゲットによる違い

ターゲット	$N_{sct}/\Delta t$ (/s)
Cu	$6.99 \pm 0.71$
Cu(Large)	$9.91 \pm 0.98$

散乱粒子数の差が入射粒子数の差によるものと仮定し、ビームがチタン窓でガウス分布のように広がると仮定すると、ビームの 69.7 % がターゲット (50mm×50mm) にあたっているとして断面積を評価する。

### 4.3 微分散乱断面積・形状因子

前項の結果を利用し式 (2.7),(2.127) より各ターゲットの微分散断面積, 形状因子  $|F(q)|^2$  の値は表 4.13 のようになった。

	散乱角 $\theta$	微分散乱断面 積 $d\sigma/d\Omega$	形状因子 $ F(q) ^2$
Au	78±0.57	52 ±14	0.31 ±0.083
	86±0.57	47 ±11	0.44 ±0.10
	94±0.57	21 ±6.5	0.29 ±0.093
Cu	78±0.57	6.4 ±1.7	0.57 ±0.15
	86±0.57	5.7 ±1.3	0.79 ±0.18
	94±0.57(ビーム弱時)	2.6 ±0.84	0.56 ±0.18
	94±0.57(ビーム強時)	2.4 ±0.66	0.52 ±0.14
Al	78±0.57	1.8 ±0.49	1.0 ±0.27
	86±0.57	0.78 ±0.18	0.66 ±0.15
	94±0.57	0.59 ±0.16	0.77 ±0.21
C	78±0.57	0.24 ±0.064	0.92 ±0.25
	86±0.57	0.12 ±0.029	0.74 ±0.17
	94±0.57	0.17 ±0.053	1.5 ±0.48

図 4.13 実験結果より得られる微分散面積と形状因子  $|F(q)|^2$

この結果を理論から予想される曲線とともにグラフに描画すると微分散面積は図 4.14, 形状因子は図 4.17 のようになった. 図 4.17 に関しては実験値はそれぞれ定数で割ってプロットしてある.

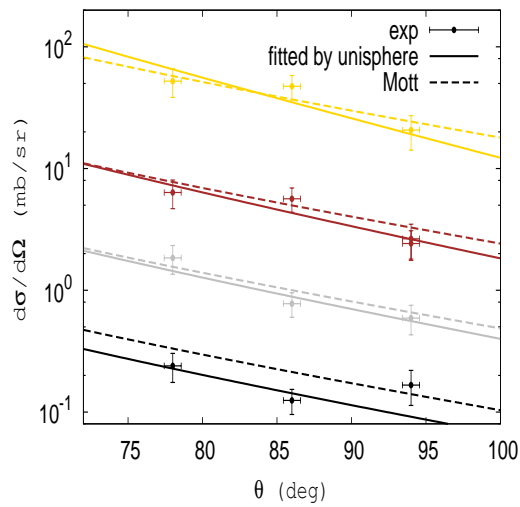


図 4.14 微分散面積の角度依存性

黄 : Au, 茶 : Cu, 灰 : Al, 黒 : C

点線は Mott 散乱の場合, 実線は一様球の電荷分布を仮定した場合

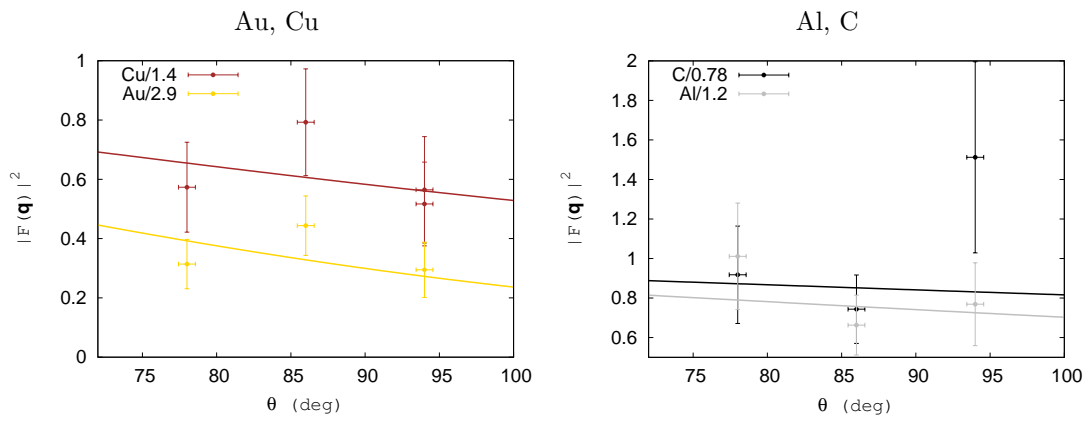


図 4.17 形状因子の角度依存性 実線は一様球の場合の理論曲線

微分断面積に関しては Mott 散乱の  $Z$  依存性，角度依存性が実験により再現されていることが確認できる。一方，形状因子に関しては電荷分布を一様急と仮定した時の理論曲線から予想される値より最大で 3 倍ほど大きな値が得られた。

## 第 5 章 結果の考察と反省

### 5.1 標的がないのに存在するピーク

解析の章の ADC の図にもあったように、標的を置いていないにもかかわらず、あたかも標的からの散乱粒子のようなピークを見ることができる (図 5.1)。

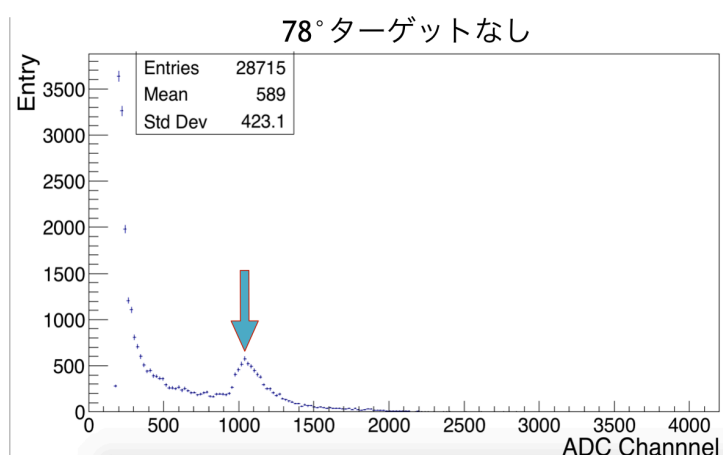


図 5.1 標的なしのピークの様子

以下、これについての原因を考察していく。現地及び、大学に戻ってからメンバーで話し合って色々原因についての案を出した結果、

- 空気による散乱
- 周囲の標的による散乱
- 炭素板でのコンプトン散乱

が挙げられた。この 3 つの原因のうち、炭素板でのコンプトン散乱については未だ定量的な見積もりができていないが、他の 2 つの原因については定量的な結果があるのでここで紹介しておく。

まず、周囲の標的による散乱である。ビームが目的の標的に当たる際に、回転台である PARTIKLE の隣のプロペラについている標的にも当たってしまって、そこから散乱された電子がカウントされているのではないかということである (図 5.2)。特にその影響は前方についている標的からの影響が大きいと思われるので、目標の標的がなく隣の標的が Cu(100mm × 100mm) の時と、C(50mm × 50mm) の時の ADC のグラフを比較して差が見えるかどうかを確認した。(図 5.3)。この図を見ても分かる通り、Cu と C との間には特に差は見られないことが分かる。よって、隣のターゲットの影響はほぼないと言ってよいことが分かる。

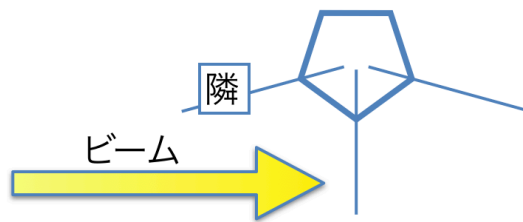


図 5.2 隣の標的との位置関係

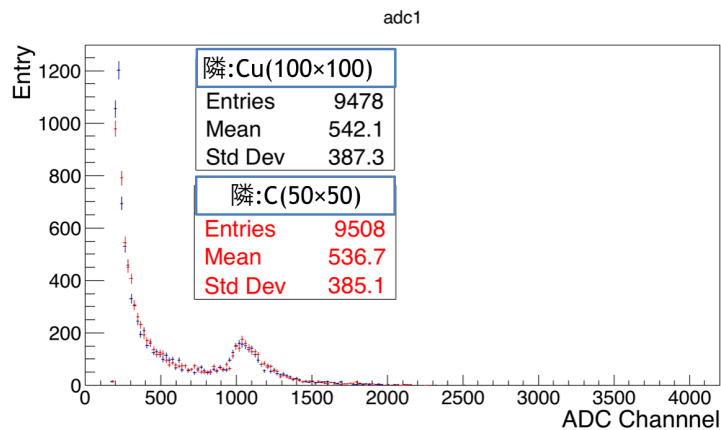


図 5.3 異なる標的による比較

次に、空気の影響について考察をしていく。ターゲットから散乱される電子を PMT は検出するわけであるが、今回の実験は真空を引いて行っていないため、空気によって散乱された電子も同様に PMT で検出されることになる。図 5.4 にビームラインと PMT の位置関係を示した。空気によって散乱される電子が PMT を通過すると考えると、幾何学的に考えて  $\Delta x = 57\text{cm}$  の範囲の空気による影響があると考えられる（図 5.4 の青い線）。空気の実効的な原子量、電荷、密度をそれぞれ  $M_{Air} = 29.0[\text{g/mol}]$ ,  $Z_{Air} = 7.76$ ,  $\rho_{Air} = 1.21 \times 10^{-3}[\text{g/cm}^3]$  として  $\Delta x = 57\text{cm}$  分の質量厚さを計算し、空気の原子核が一様球であると仮定して理論的に空気からの散乱粒子数を見積もったところ、実験で得られたデータの 1% 以下であったため空気の影響もほとんどないと言える。

以上の結果より、まだ考察をしていない炭素板からのコンプトン散乱以外の原因ではないと考えられるが、コンプトン散乱についても現地の  $\gamma$  線の線量をきちんと測定していないなどの理由で定量的に見積もることができず、ピークの原因は結局突き止めることができなかった。

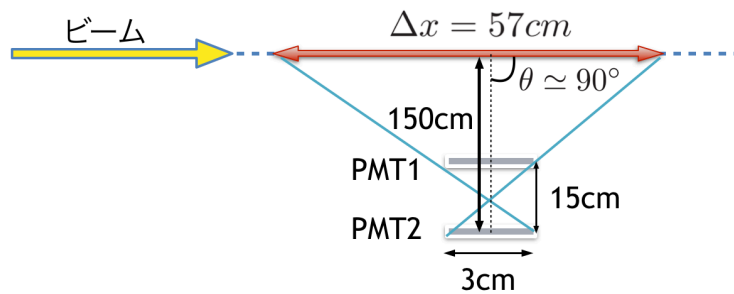


図 5.4 空気からの散乱

## 5.2 実験と理論とのずれ

次に、図 4.14 や図 4.17 にあるような実験結果と理論曲線のずれに関して、その原因を考察していく。原因の候補としては、

- 空気による散乱
- 炭素板からのコンプトン散乱
- ビームの解析の誤り
- 他の散乱過程の存在

が挙げられた。このうち、最初の 2 つに関しては断面積や形状因子を計算するにはすでに取り除かれている。というのも、散乱粒子数の計算の際には、標的があるものとなないものとの粒子数の引き算で結果を出しているため、引き算によってその影響は取り除かれるからである。よって以下ではビームの解析と他の散乱過程について考察をしていく。

まず、ビームの解析についてである。ビームの測定は、各角度において計 5 回行った。ビームを出す前に一度バックグラウンドの測定をし、残りの 4 回は標的の散乱粒子測定前にビームが出ている状態で測定をした。標的を変えるごとにビームが出ている状態での測定を行ったのだが、解析に使ったのは、バックグラウンドの測定データとその直後に測定したデータであり、残る 3 回分のデータは解析には使用していない。これには 2 つの理由がある。1 つ目はビームが時間によって変化することはないだろうと考えていたからであり、もう 1 つはビームの出ているバックグラウンドのデータを標的を変えるごとに測定していなかったからである。しかし、実際にデータを見ると引き算の結果が激しく振動していることが認められ、ビームがかなり時間変動していることがわかる (図 5.5)。



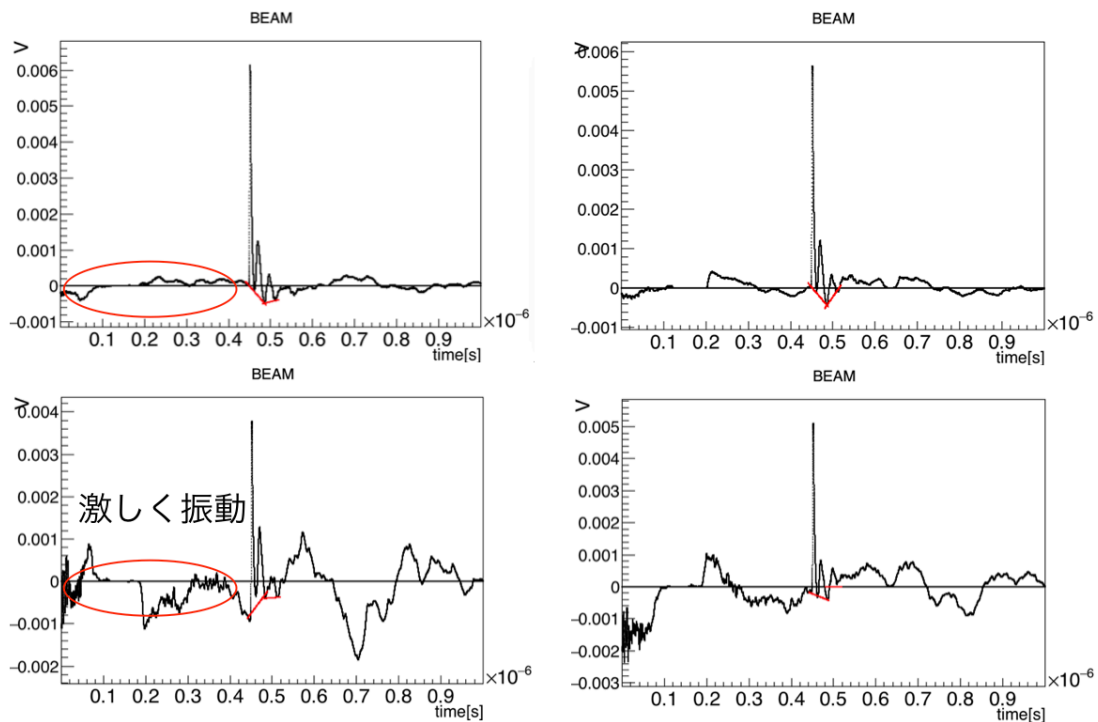


図 5.5 ビームの時間変動の様子

図 5.5 上 2 つはバックグラウンドとその直後のデータの引き算

図 5.5 下 2 つは直後以外のデータとの引き算

この結果が微分断面積と形状因子の値に大きく響いてしまったと思われるが、バックグラウンドのデータを各角度で 1 度しか測定していないために、正しいビームの値を出すことはできなかった。

次に、他の散乱過程の存在についてである。今回は全て電子が標的の原子核と弾性散乱を行ったものと考えて理論計算をしているが、実際には他の競合過程として非弾性散乱の影響もあったのではないかと考えられる。どのくらいの割合で今回の実験データに非弾性散乱の影響が入っているかの見積もりは行っていないが、他の過程が存在すると断面積は大きくなってしまおうので、その影響を除けばより理論値に近い値が得られたのではないかと我々は考えている。

## 第 6 章 結論と今後の展望

本実験では、当初の目的である形状因子を良い精度で測定することはできなかった。これは、測定角が 3 点と非常に少なかったことや、電子ビームの解析の甘さ、真空を引いていなかったこと、他の散乱過程を考慮していなかったこと、炭素板の影響を十分に見積もれなかったことが理由としてあげられる。しかし、断面積の結果が Mott 散乱を再現したことは驚くべきことであり、我々としても非常に嬉しい結果となった。また、今回の実験を通して、理論上では比較的簡単に言ってしまうようなことでもそれを実際に行って確かめるという作業は想像以上に大変であり、実験計画を立てるといふことの楽しさを学べたのは我々にとってとても教育的であった。今後は、我々自身もこの実験に対しての改善点を考えて実践していきたいと思っているが、それと同時に、後輩の P3 の方々にも是非ともこの実験を議論していただき、あわよくば追実験を行っていただけたらとも思っている。以上で本実験に対するレポートを終わる。

## 謝辞

本実験においては、多くの方々にご助力をいただきました。皆様のご厚情に深く感謝いたします。特に京都大学理学研究科物理学第二教室原子核・ハドロン物理学研究室の藤岡宏之助教には実験の立案をはじめ実験全般及び論文作成等に関し助言・御指導頂き、同研究室の成木恵准教授には実験に関する幅広い事柄に関して御指導を頂きました。心より感謝申し上げます。

京都大学理学研究科物理学第二教室原子核理論研究室の國廣悌二教授、菅沼秀夫准教授には実験に関わる理論を御教授頂くのみならず、我々の興味と知見を広げる御指導をして頂きました。深く御礼申し上げます。

電子 LINAC の運転ならびに本研究の現地での実験遂行にあたりましては京都大学原子炉実験所の高橋俊晴准教授、阿部尚也氏に朝晩問わず多大な御助力を頂きました。深く感謝申し上げます。

TA の原子核・ハドロン物理学研究室博士課程の金子雅紀さん、高エネルギー物理学研究室修士課程の赤塚駿一さんには実験や実験器具の製作に関して助言、御助力を頂きました。本当にありがとうございました。また、実験器具の製作にあたり京都大学理学研究科研究機器開発支援室の早田恵美氏、田村裕士氏、道下人支氏より多大なる御助力を頂きました。心より御礼申し上げます。

## 付録

### PARTIKLE の配線図

実験で使用した Arduino とモータードライバとステッピングモーターの配線図を以下に示す。

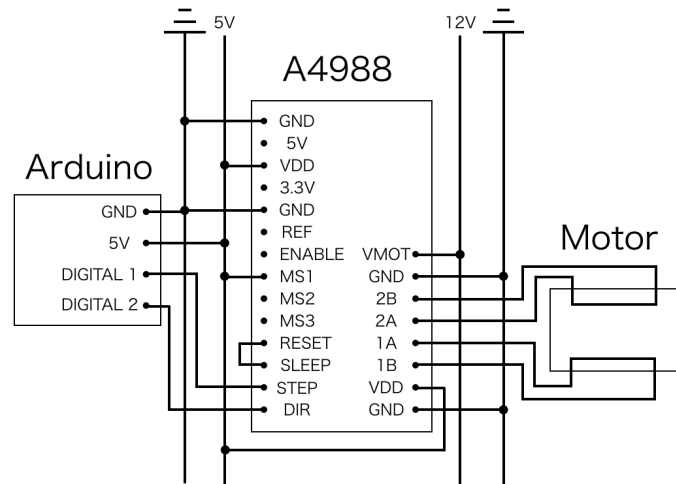


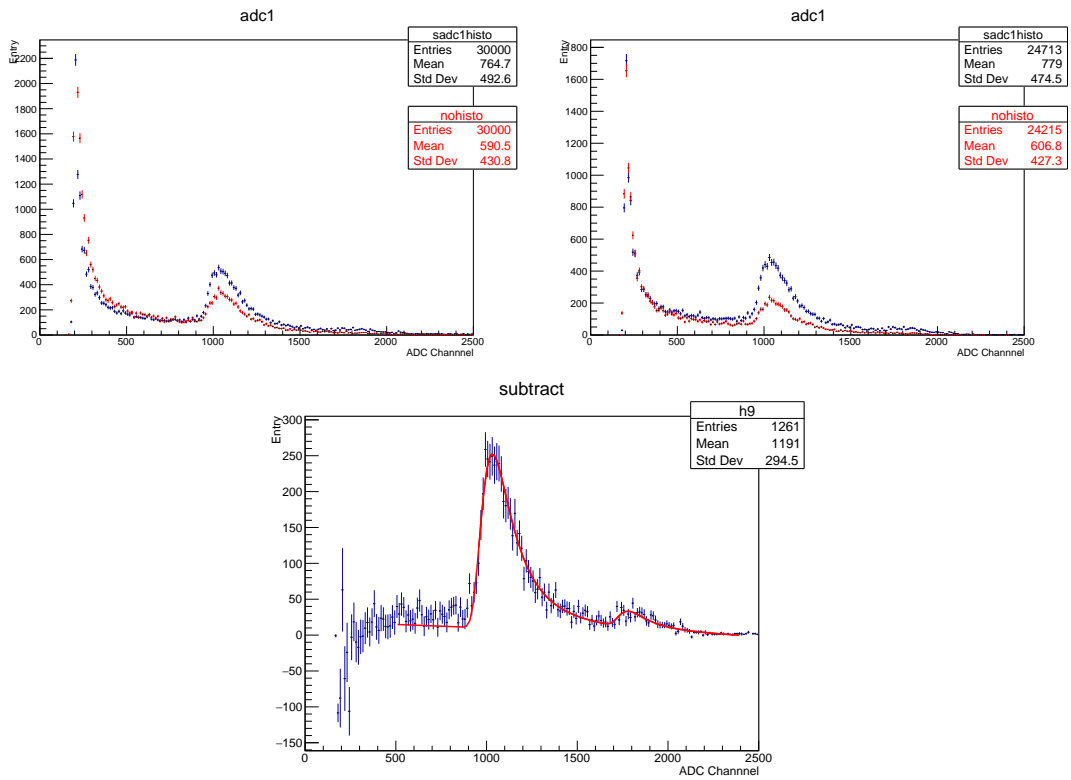
図 6.1 PARTIKLE の配線図

### PMT2 の測定データ

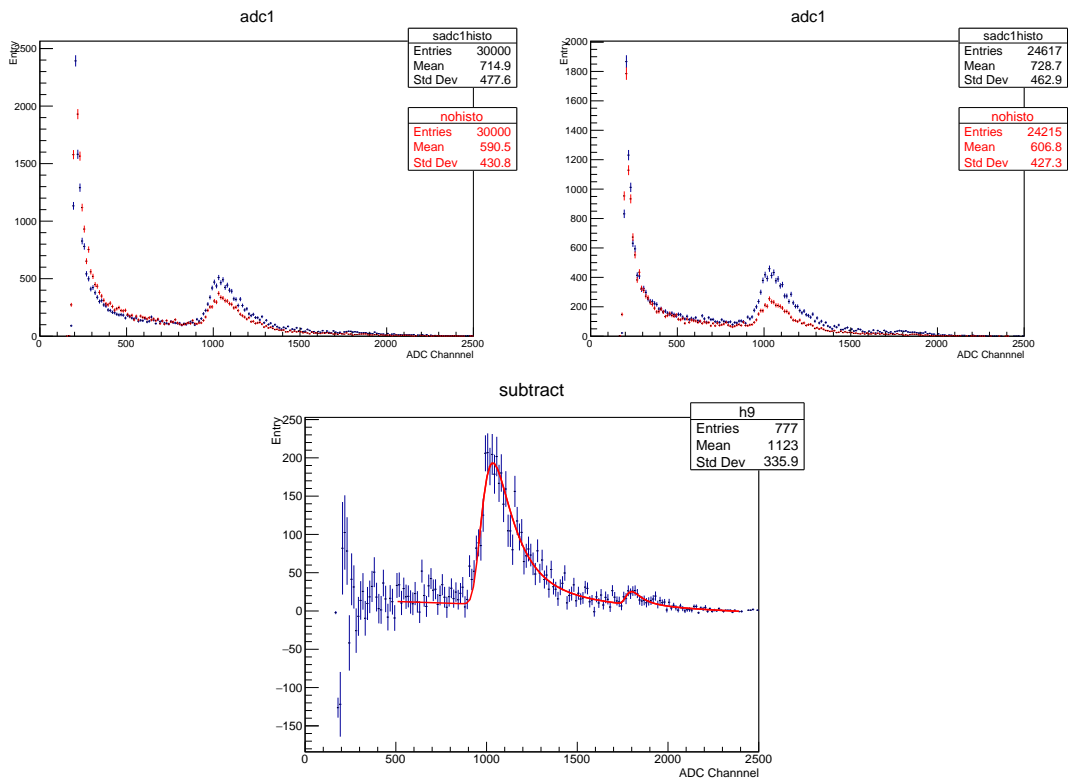
各測定の ADC データは以下の通りで各測定ごとに左から順に

- 解析前の PMT2 の ADC データ (青：ターゲットあり 赤：ターゲットなし)
- TDC のデータによるカットをかけ測定時間で規格化されたデータで、 $94^\circ$  の Cu(ビーム強), Al に関してはターゲットなしのデータに対する補正も行っている。(青：ターゲットあり 赤：ターゲットなし)
- ターゲットあり・なしで差を取ったデータ。Fit は landau 関数 2 つと一次関数で行った。

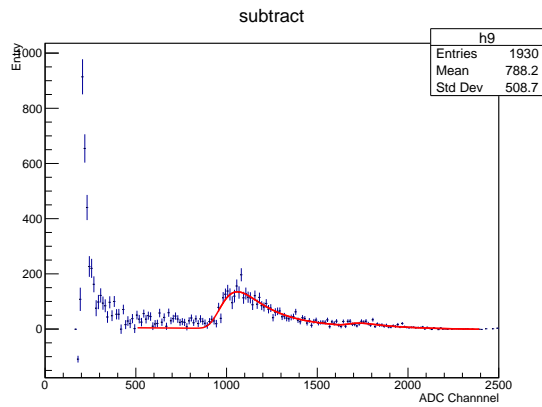
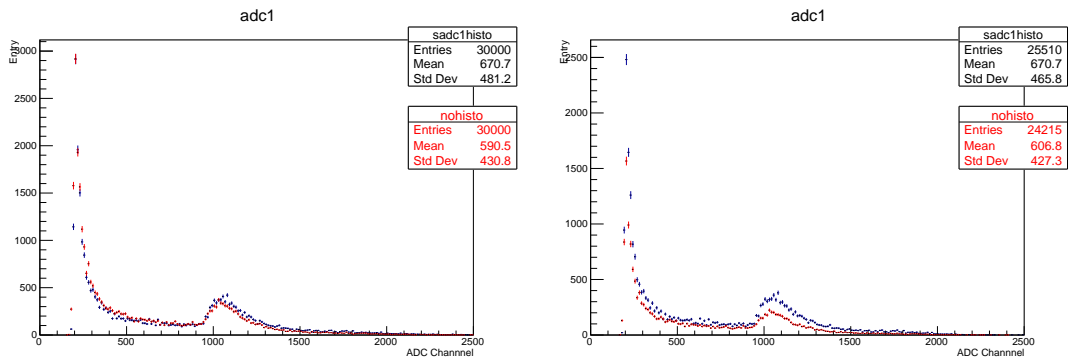
である。



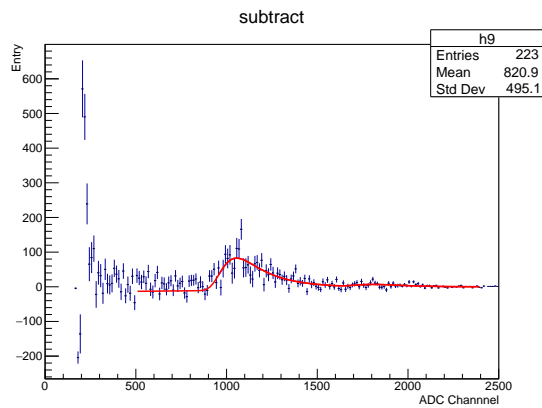
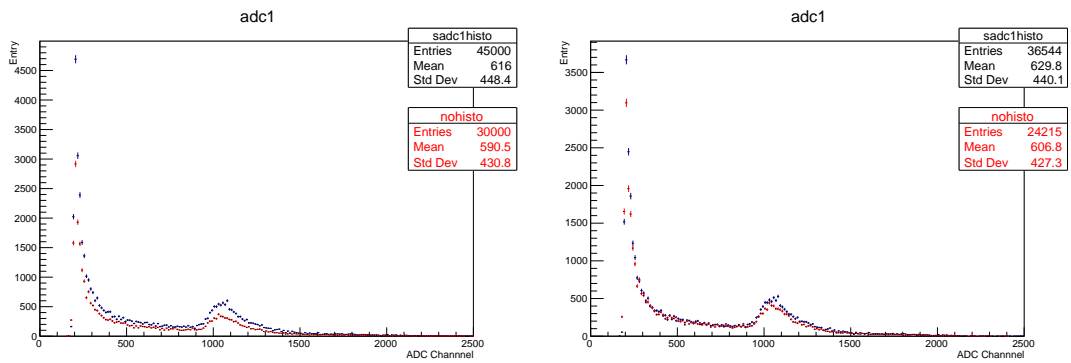
☒ 6.2 78° Au



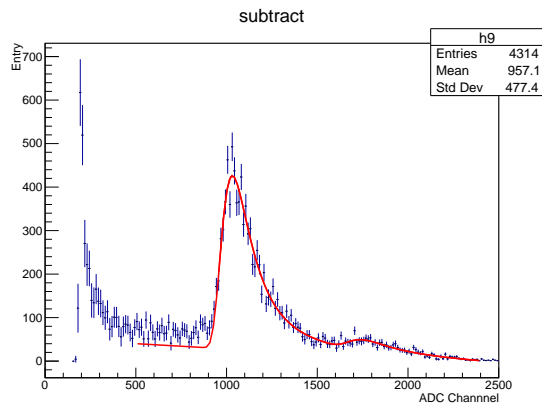
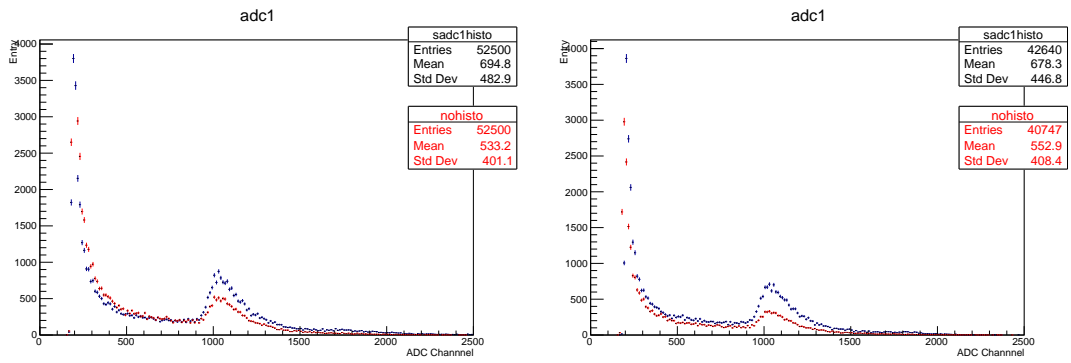
☒ 6.3 78° Cu



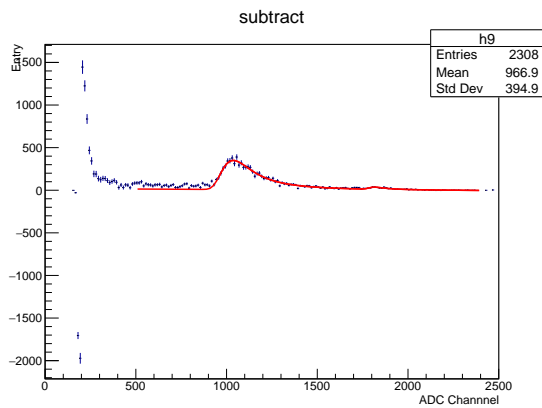
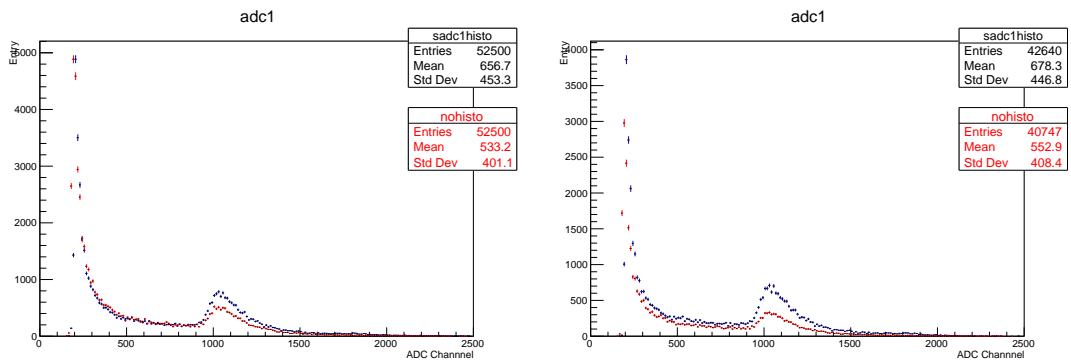
☒ 6.4 78 ° Al



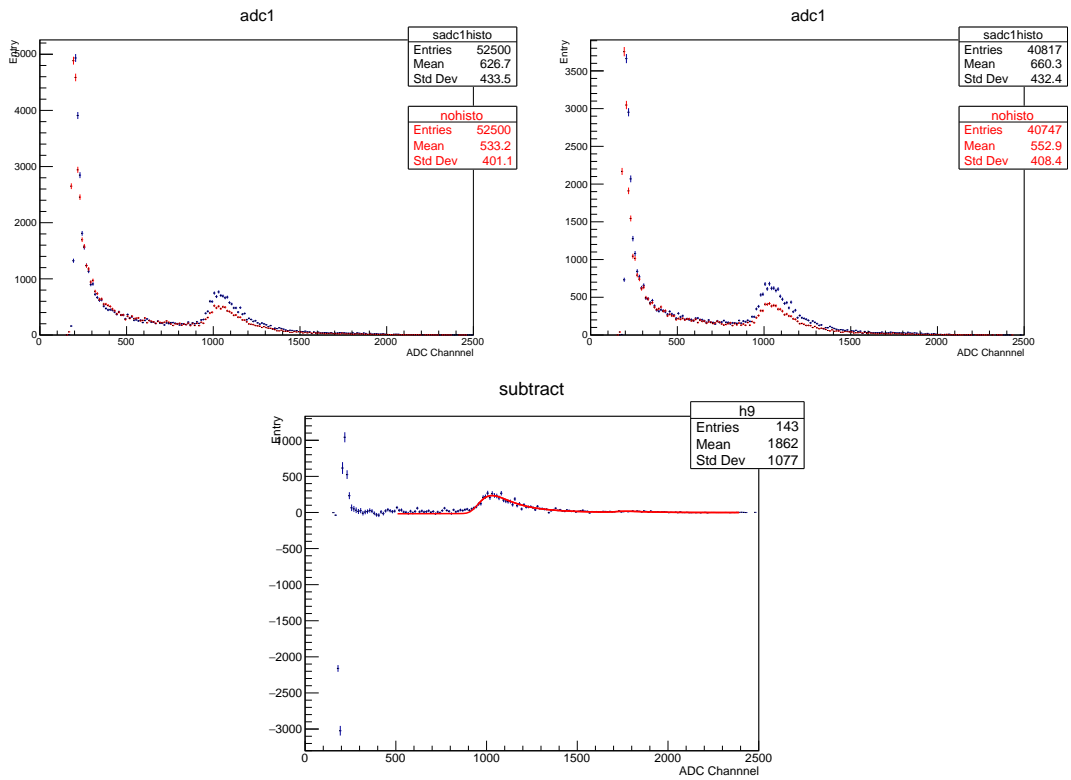
☒ 6.5 78 ° C



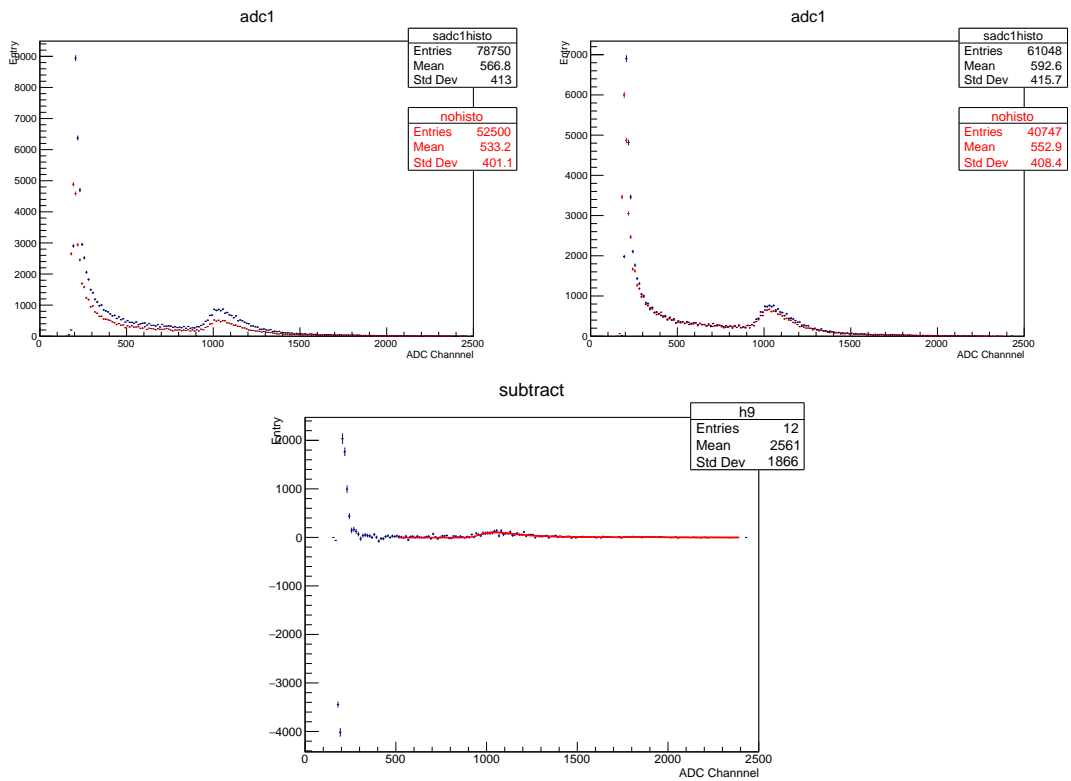
☒ 6.6 86° Au



☒ 6.7 86° Cu



☒ 6.8 78° Au



☒ 6.9 86° C



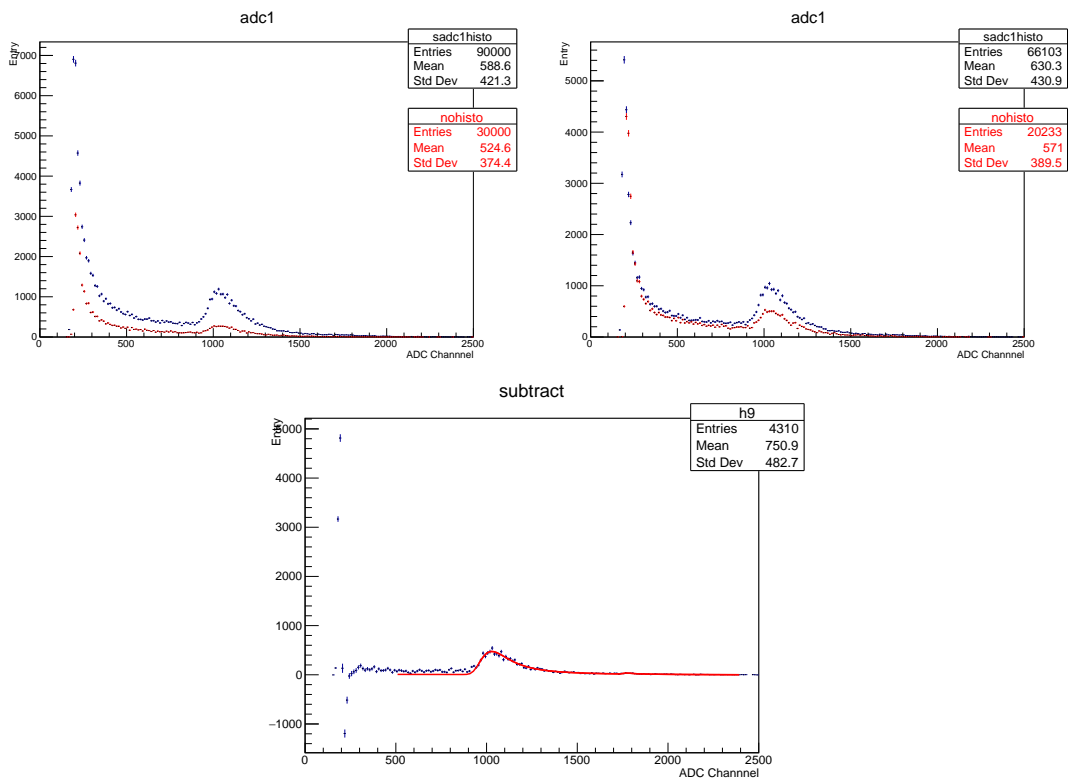


図 6.10  $94^\circ \text{Au}$

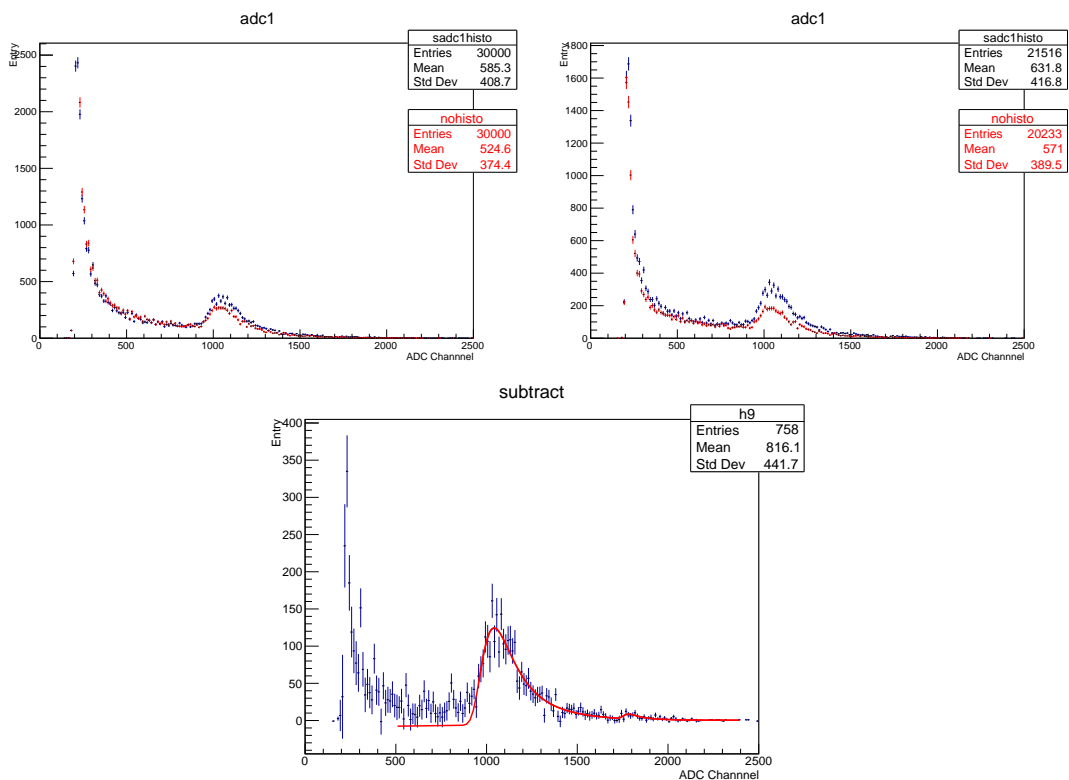


図 6.11  $94^\circ \text{Cu}$  (ビーム強度弱時)

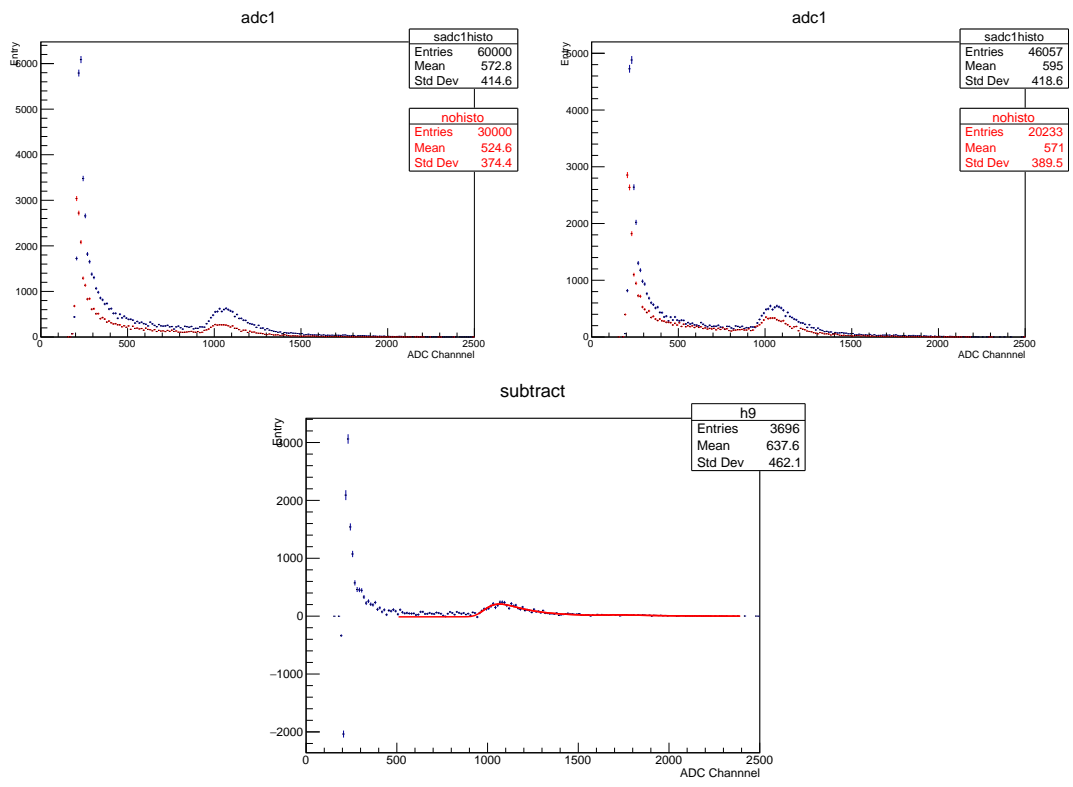


図 6.12  $94^\circ \text{Cu}$  (ビーム強度強時)

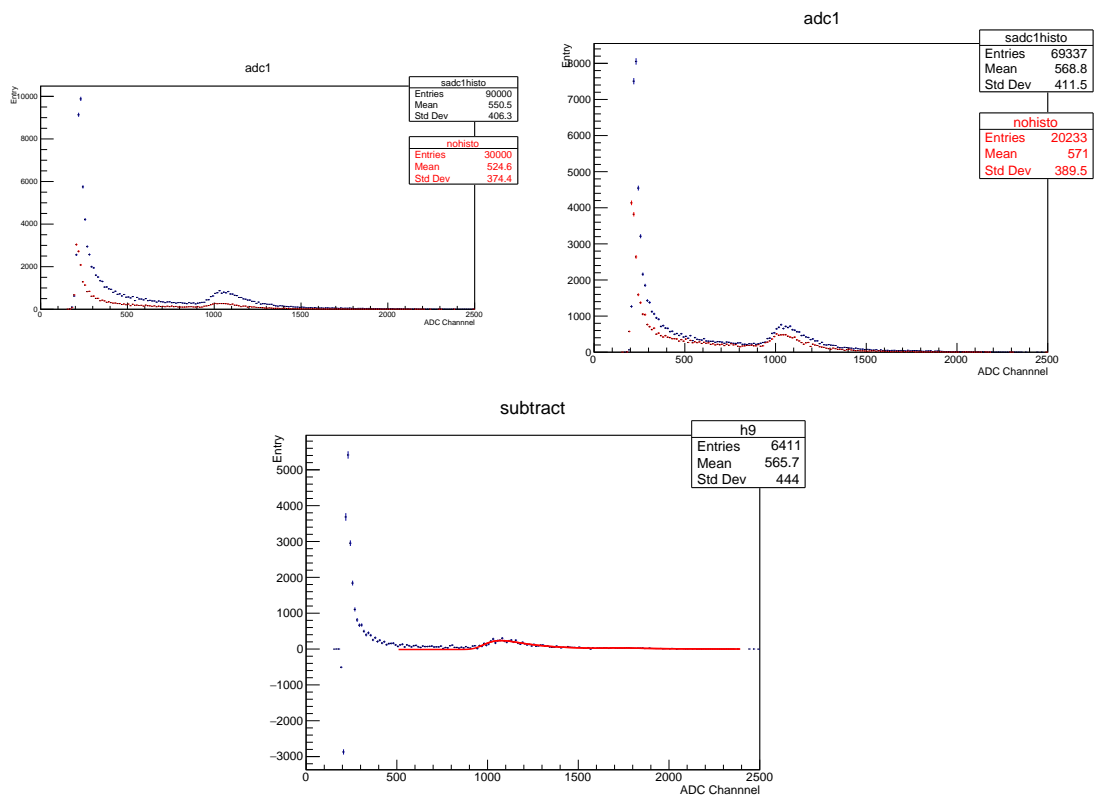


図 6.13  $94^\circ \text{Al}$

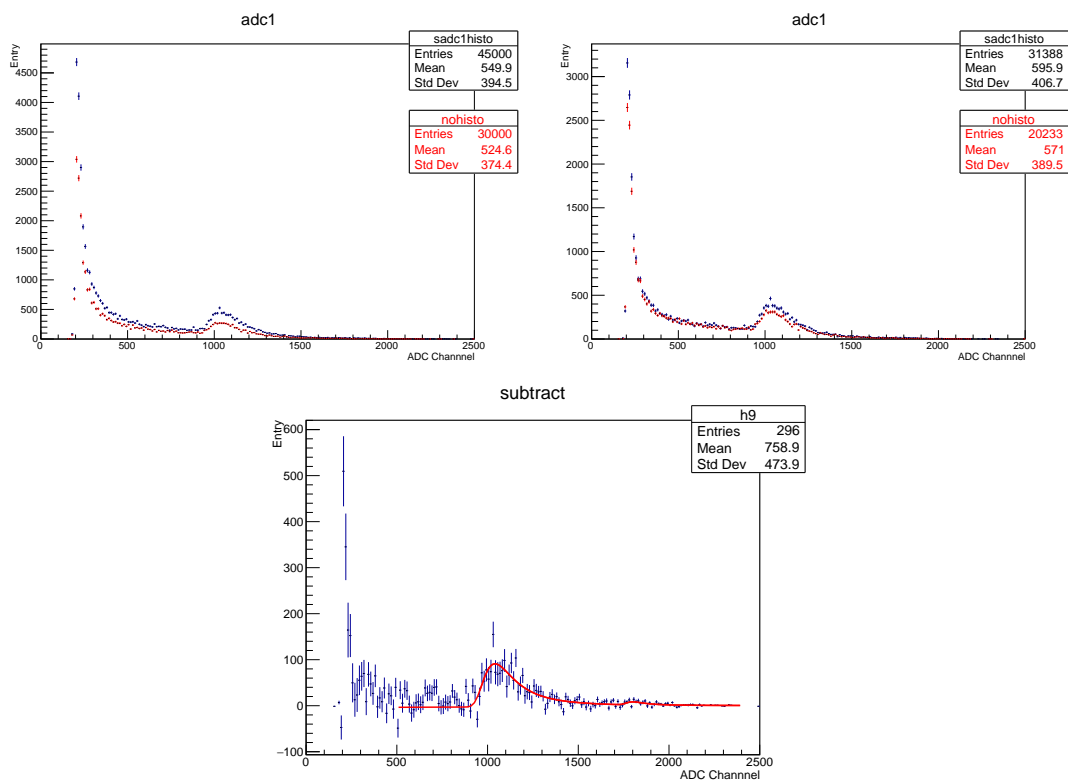


図 6.14 94 ° C

## 参考文献

- [1] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche. 柴田 利明 訳. *Particles and Nuclei*. Springer University Textbooks, Heidelberg, 2008. (丸善出版, 東京都, 2012)
- [2] F. Halzen, A. D. Martin. 小林 澈郎, 広瀬 立成 共訳. *Quarks and Leptons*. John Wiley and Sons, New York, 1984. (培風館, 東京都, 1999)
- [3] M. E. Peskin, D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, Boulder, 1995.
- [4] J. J. Sakurai. 樺沢 宇紀 訳. *Advanced Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, Boston, 1967. (丸善プラネット株式会社, 東京都, 2010)
- [5] 九後 汰一郎. *ゲージ場の量子論*. 培風館, 東京都, 2013.
- [6] W. R. Leo. *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [7] R. Hofstadter. *Nuclear and Nucleon Scattering of High-Energy Electrons*. Stanford University, California, 1957.
- [8] 国立天文台 編. *理科年表*. 丸善株式会社, 東京都, 1997.