

# 長距離三体核力研究に向けた中性子-ヘリウム散乱断面積測定手法の開発

井芹徹大, 井上健太郎, 大野詩音, 岡田祥吾, 金澤青空, 北田康介, 西木結菜, 吉田祥人

京都大学 理学部

2026年4月5日

# 目次

1	Introduction	3
2	<b>理論パート</b>	4
2.1	カイラル摂動論 . . . . .	4
2.2	散乱 . . . . .	5
3	<b>実験パート</b>	7
3.1	実験装置 . . . . .	7
3.2	実験手順 . . . . .	9
3.3	解析 . . . . .	11
3.4	考察 . . . . .	20
3.5	結論 . . . . .	22
4	<b>補足</b>	24
4.1	カイラル摂動論の補足 . . . . .	24
4.2	正味の立体角計算用コード . . . . .	31
4.3	各種測定データ . . . . .	34

# 1 Introduction

三体核力の研究は、従来の二体核力のみに基づく核力の描像を超え、原子核の性質をより正確に理解するために不可欠である。特に、数 MeV 付近の中性子-ヘリウム散乱の  $D$  波位相シフトには長距離型の三体核力の効果が顕著に現れることが、第一原理計算によって示唆されている。

本研究は、同散乱の微分断面積の精密測定に向けた実験手法を構築するものである。実験は京都大学加速器駆動型中性子源 (KUANS) を用い、ヘリウムおよび炭素標的を対象として断面積測定を行った。

測定精度の向上を目的として、ビームラインと検出器の双方に自作のコリメーターを設置した。標的厚さ、容器形状、検出器配置についても、統計量と精度の両面から最適化を図り、ビームラインおよび検出器の双方に対してコリメータを設計・製作し実装した。データ解析では、バックグラウンドの除去、検出器特性に伴う系統誤差、ビーム強度の絶対値の決定などを詳細に検討し、正確な断面積評価を試みた。以上により微分断面積を導出することに成功した。

本紙では、これら一連の研究プロセスと結果を報告し、 $n$ - $\alpha$  弾性散乱における精密測定の可能性を提示する。

## 2 理論パート

### 2.1 カイラル摂動論

#### 2.1.1 カイラル展開とパワーカウンティング

カイラル摂動論では、低エネルギー QCD を、そのエネルギー領域で重要な自由度のみを用いた有効理論として記述する。低エネルギー領域では、外部運動量や  $\pi$  中間子質量は、カイラル対称性の破れのスケール  $\Lambda_\chi$  (500~600 MeV 程度) に比べて十分小さい。そのため、物理量を小さい無次元量  $Q/\Lambda_\chi$  を用いて展開し、低次数の項から順に評価することができる。ここで  $Q$  は、外部運動量や  $\pi$  中間子質量を代表する低エネルギースケール ( $\sim 200$  MeV 程度) である。

具体的には、微分は

$$\partial_\mu \sim Q \quad (2.1)$$

と数え、 $\pi$  中間子質量についても

$$M_\pi \sim Q \quad (2.2)$$

と数える。また、 $\pi$  中間子質量の 2 乗がクォーク質量に比例することから、クォーク質量は

$$m_q \sim Q^2 \quad (2.3)$$

とみなされる。

したがって、有効ラグランジアンは微分や質量の次数に応じて

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(4)} + \dots \quad (2.4)$$

のように整理される。このように、各項を小さい量  $Q/\Lambda_\chi$  のべきで分類する考え方をパワーカウンティングと呼ぶ。

$\pi$  中間子のみを自由度として含む理論では、ローレンツ不変性やパリティの要請から、ラグランジアンは偶数次の微分項を中心として構成される。一方、核子を自由度に含む場合には、各相互作用頂点、内部線、ループの寄与をあわせて数えることにより、散乱振幅や核力全体を次数ごとに分類することができる。

この次数付けにより、核力は低次の寄与から順に体系的に整理される。一般に低い次数では二体核力が支配的であり、三体核力はより高次の寄与として現れる。したがって三体核力は二体核力に対する補正として理解されるが、特定の観測量に対しては無視できない効果を与えることがある。

次節では、核子を自由度に含むカイラル摂動論において、このパワーカウンティングが二体核力および三体核力の出現次数にどのように対応するかを見る。

#### 2.1.2 三体核力とカイラル摂動論

核子場を追加したより複雑なカイラル摂動論の結果から、ファインマンダイアグラムとカイラル展開の次数は以下の図 1 のようになることが知られている。

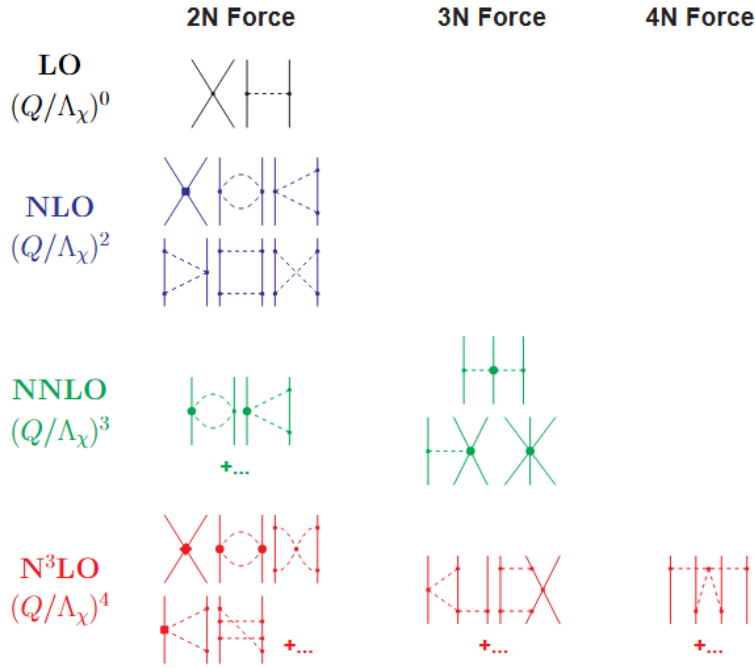


図 1: Feynmann diagram におけるカイラル展開の次数と核力の関係 (文献 [1] の Fig.16)

この図の実線は核子、点線は  $\pi$  中間子を表している。

つまり、Feynmann diagram を  $\frac{Q}{\Lambda_\chi}$  の次数ごとに分類すると、展開の 3 次以上において 3 体核力が現れることがわかる。

### 2.1.3 三体核力と散乱現象

近年、三体核力の効果を散乱実験から検証する試みが進んでいる。Y. Yang *et al.* [2] は、 $n$ - $\alpha$  散乱の  $D$  波位相シフトが長距離三体核力に対して高い感度をもつことを示した。また、Toyokawa *et al.* [3] は、65 MeV における  $n$ -<sup>12</sup>C 散乱の微分断面積に対する三体核力の効果が後方角で現れる可能性を示した。一方、三体核力の影響を実験的に検証するには精密測定が必須であるため、今回の実験は三体核力の影響を見るのではなく散乱現象の精密測定に向けた散乱断面積測定の手法開発を目的として行った。

## 2.2 散乱

### 2.2.1 散乱の概要

散乱とは粒子や波動が衝突 (相互作用) し、その量子状態 (たとえば速度ベクトル) を変化させることである。2 粒子の接近に際し、散乱が起こる確率を断面積という。本研究では、特に炭素やヘリウムの原子核と中性子とが、相互作用によって速度ベクトルの向きを変化させる弾性散乱 (エネルギーロスのない散乱) に注目する。そこで、散乱後の粒子の角度分布を調べるため、微分断面積と言ったときには入射粒子が特定の角度  $\theta$  に散乱される確率を表す。

### 2.2.2 微分断面積

前述の通り、微分断面積とは、「入射粒子が特定の角度  $\theta$  に散乱される確率」のことである。これは次のように計算できる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N_{\text{scat}} \cdot \epsilon}{(N_{\text{in}} \cdot \epsilon) \cdot n \cdot d\Omega} \quad (2.5)$$

ここで、

$N_{\text{in}}$  : 入射粒子数  
 $N_{\text{scat}}$  : 散乱粒子数  
 $\epsilon$  : 検出効率  
 $n$  : 標的の面数密度 [/barn]  
 $d\Omega$  : 立体角 [sr]

である。つまり、標的の面数密度と検出部分の立体角で規格化した、入射粒子数と散乱粒子数の比が微分断面積である。本研究では、この式に登場する各値を実験によって調べることで、微分断面積を測る。

### 3 実験パート

#### 3.1 実験装置

##### 3.1.1 概要

実験装置の概要を図2に示す。

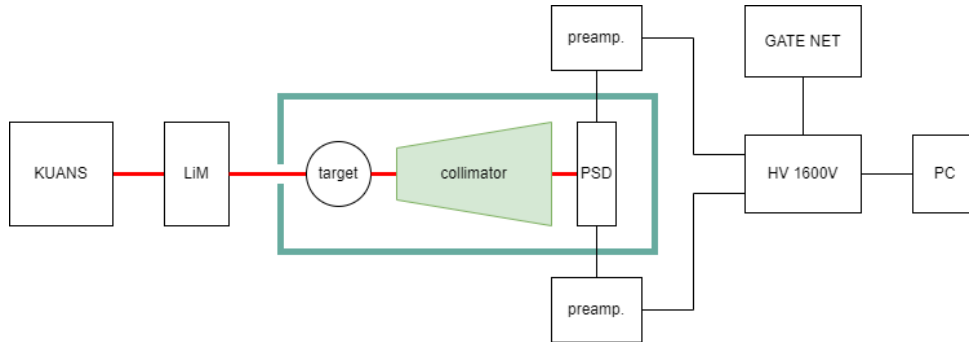


図2: 実験装置の概要

- LiM リチウムモニタ. 観測された入射中性子の数を分単位で記録する.
- PSD 中性子位置検出器.
- GATE NET 時刻信号を出すモジュール.

##### 3.1.2 中性子源

KUANS(Kyoto University proton Accelerator Neutron Source)を使用した. 主な性能を表1に示す.

表1: KUANS の諸元

項目	内容
加速器	陽子線形加速器
加速粒子	陽子
最大加速エネルギー	3.5 MeV
平均電流 (仕様上最大値)	100 $\mu$ A
平均運転電流	30 $\mu$ A
陽子パルス幅	$\sim$ 50 $\mu$ A
中性子発生ターゲット	ベリリウム
発生中性子エネルギー	keV $\sim$ 熱
発生中性子強度	$\sim$ 10 <sup>11</sup> n/s
熱中性子強度	10 <sup>3</sup> n/cm <sup>2</sup> /s (飛行距離 2 m, $L/D < 20$ )

装置内部の構造は図3のようになっており、Nb板に貼り付けられたBe薄膜と、100×100×100[mm<sup>3</sup>]の常温ポリエチレン減速材(PE)が陽子線型加速機に接続されている。

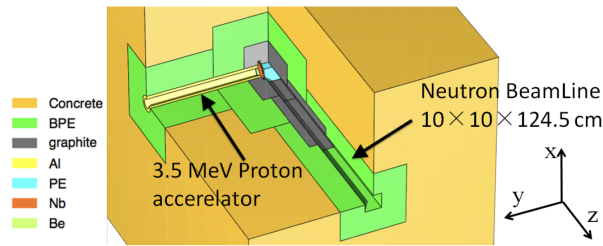
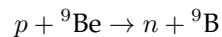


図3: 装置の構造 (出典: KUANS の性能および応用分野 [4])

また、それらの周囲は反射体であるグラファイト、中性子線遮蔽のためのハウ酸入りポリエチレン (BPE) とコンクリートで覆われている。中性子の発生は Nb 板に貼り付けられた Be 薄膜に加速器から陽子を当て、以下のような核反応によって行われる。



発生した中性子は  $100 \times 100 \times 100 [\text{mm}^3]$  の常温ポリエチレン減速材を通して減速した後、垂直方向に熱中性子ビームとして取り出される。

### 3.1.3 標的

炭素標的として、ニラコで購入した炭素板 ( $10.0 \times 100 \times 100 [\text{mm}^3]$ ) を用いた。ヘリウム標的として、ゴム風船に封入したヘリウムガスを用いた。ガスの漏れを防ぐため、内側にコーティング剤を塗布した。

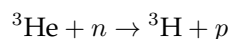


図4: ヘリウム入り風船とコーティング剤

### 3.1.4 検出器

検出器には  ${}^3\text{He}$  比例計数管を使用した。 ${}^3\text{He}$  は熱中性子に対して非常に大きな吸収断面積を持つため、熱中性子に対する検出効率は非常に高効率で、今回使用した比例計数管の検出効率はおよそ 90% である。

この装置における中性子の検出原理は以下の通りである。中性子が金属管内に封入された  ${}^3\text{He}$  ガスと反応し、



の核反応を起こす。このとき生成されたトリチウムおよび陽子は反応エネルギーを持って運動し、ガス中の原子を電離する。その結果芯線と管壁の間で放電が起こり、電流として中性子が検出できる。検出器は両読みで、得られた信号の時間差によって位置を検出する。

${}^3\text{He}$  比例計数管のサイズは長さ  $500 [\text{mm}]$ 、直径  $23.5 [\text{mm}]$  の円筒形で、この比例計数管 3 本を木製の板に並列して配置した。

### 3.1.5 コリメータ

コリメータとして、約  $20 \times 10 \times 5 [\text{cm}^3]$  のホウ酸入りポリエチレン (BPE) ブロックを使用した。ビームラインを BPE ブロックにより延長し、散乱中性子の経路に沿って BPE ブロックを置いた。

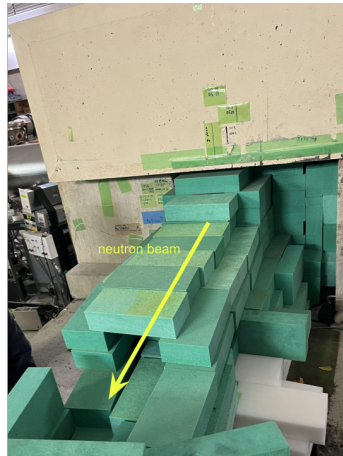


図 5: コリメータ

### 3.1.6 遮蔽

環境中性子を排除するため、実験装置を BPE ブロックと BPE シートにより遮蔽した。シートを敷いた作業台の上にブロックを敷き詰め、実験装置を設置し、ブロックで装置を囲み更にシートを被せた。配線による隙間は可能な限りブロックで塞いだ。

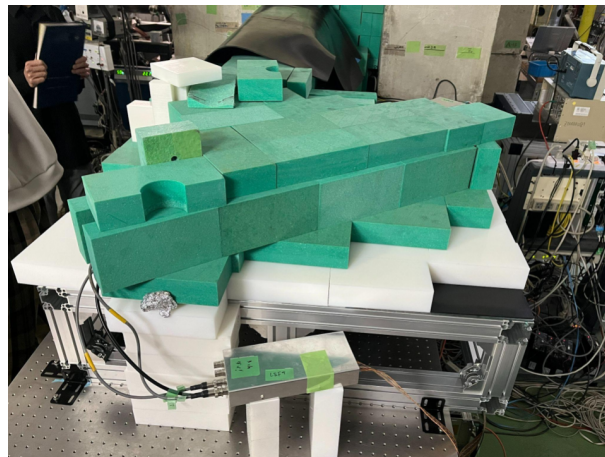


図 6: 実験装置の遮蔽<sup>\*1</sup>

## 3.2 実験手順

### 3.2.1 検出器の較正

3本の検出器についてそれぞれ位置の較正をするため、遮蔽により検出器の一部のみにビームを照射し測定を行った。図7のようにブロックを設置し、3か所について各5分間測定を行った。

<sup>\*1</sup> BPE シートを被せる前の状態。

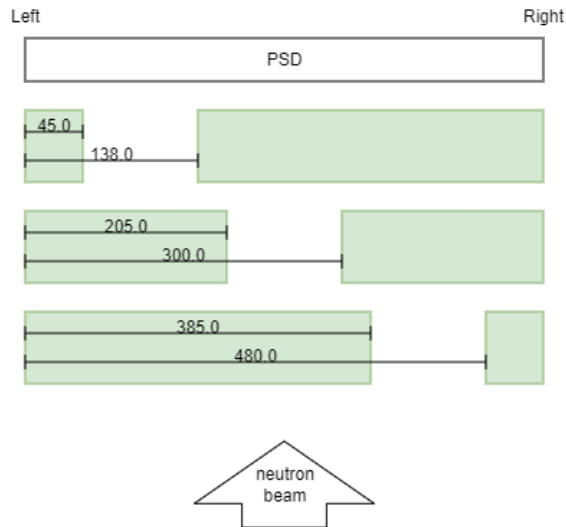


図 7: 3 パターンの遮蔽. 単位は mm.

### 3.2.2 炭素標的の測定

#### セットアップ

炭素標的について，前方角度 ( $16^\circ, 37^\circ, 58^\circ$ ) と後方角度 ( $100^\circ, 121^\circ, 142^\circ$ ) の 2 回に分けて測定を行った．検出器の位置分解能の粗さを考慮し，分解能のある部分を三分割して測定を行った．設置については，ビーム入射方向からの角度と標的からの距離 (400.0 mm)，各区画の長さを測って設置した．コリメータの上面図を図 8 に示す．

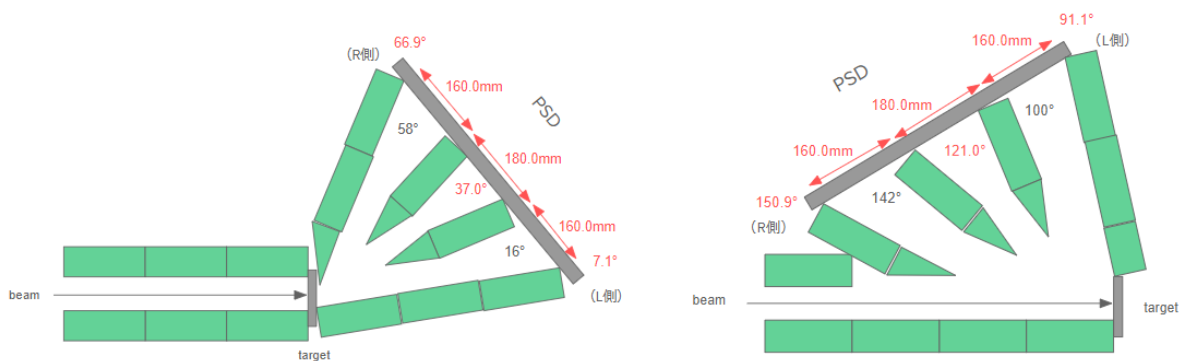


図 8: コリメータ上面図 (左: 前方, 右: 後方)<sup>\*2</sup>

#### 測定

前方角度について 5 時間，後方角度について約 5 時間 40 分間行った。<sup>\*3</sup>加えて，標的を取り除いた状態でバックグラウンド測定を各 10 分間行った．

### 3.2.3 ヘリウム標的の測定

#### セットアップ

<sup>\*2</sup> 赤字の部分を計測して設置した．

<sup>\*3</sup> 測定途中で LiM が停止したため，再起動してから追加で測定した．

ヘリウム標的について、限られた実験時間で十分な収量を得るため、垂直方向のみとし検出器側の仕切りを作らずに測定を行った。設置については、風船の結び目をブロックに挟んで固定し、ビーム方向と垂直に距離 393.0 mm の位置に検出器を設置した。コリメータの上面図を図 9 に示す。

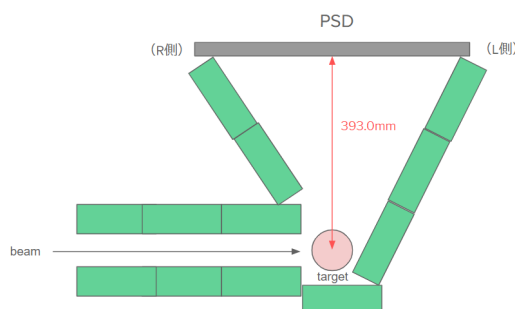


図 9: コリメータ上面図

## 測定

ヘリウム入り風船を標的として測定を 6 時間 35 分間行った。バックグラウンド測定として、空気を封入した風船を標的として 30 分間、標的を何も置かずに 30 分間測定を行った。

### 3.2.4 標的の計測

今回用いた炭素標的について、電子はかりにより秤量を行った。質量は 182 g であった。

また、ヘリウム標的の測定で用いた風船について大きさを計測した。測定前の横幅と長さは  $124.0 \times 174.0[\text{mm}^2]$ 、測定後は  $118.0 \times 150.5[\text{mm}^2]$  であった。

## 3.3 解析

### 3.3.1 座標変換

散乱角度はガリレイ変換に対して不変ではない (当然, ローレンツ変換に対しても同様)。そこで、散乱角度と言ったときには通常、重心系で議論を行う。ただ、本実験で得られる中性子のエネルギーや角度は実験室系で与えられるため、重心系に変換する必要がある。

変換式は次のように与えられる。

$$\tan \theta_c = \frac{v_r \sin \theta_r}{v_r \cos \theta_r - \frac{m}{m+M} v_r} \quad (3.1)$$

ここで、

$m$ : 入射粒子の質量

$M$ : 標的粒子の質量

$v_r$ : 実験室系での散乱粒子の速さ

$\theta_r$ : 実験室系での散乱粒子の散乱角度

$\theta_c$ : 重心系での散乱粒子の散乱角度

である。詳細は下の図 10 を参照されたい。なお、次に述べる (正味の) 立体角はガリレイ変換に対して不変である。

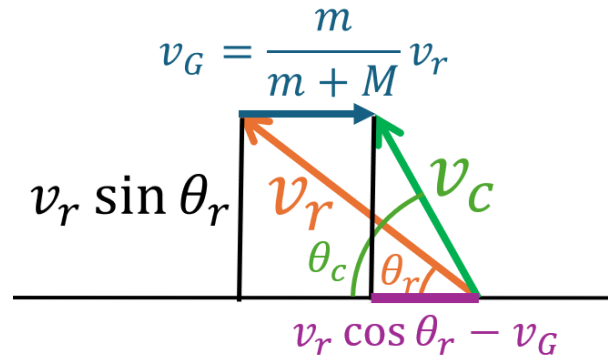


図 10: Caption

### 3.3.2 立体角計算

微分断面積を求めるのに必要な値のうち、検出面の立体角は純粋な数値計算によって求めることができる。ここでは、通常の立体角の定義と、本研究での計算に用いた正味の立体角の定義・計算方法を述べる。

立体角とは、ある点から見た（空間内での）平面的な広がり（指標）である。正確には、観測点を中心とする単位球面に、観測点（以下、反応点という）から対象（以下、検出面という）を投影したときの面積で表す。単位は [str]（ステラジアン）である。これは、たとえば次のようにして計算される。

#### モンテカルロ法による立体角の計算例

1. 検出面を座標空間内に設定する。この際、原点は反応点に対応するようにとる。
2. 原点からランダムな方向に半直線を引く。
- 3.2 で引いた半直線と 1 で設定した検出面が交点を持つか調べる。
- 4.2,3 をくりかえし、3 で交点を持っていた割合を求める。
- 5.4 で求めた割合に  $4\pi$  をかける。

本研究では、上記のような反応点が確定した 1 点である状況とは異なり、標的は空間的な広がりを持つ。そこで、そのような状況にも対応できるよう、「正味の立体角」を定め、それを解析に用いる。以下にその定義（計算方法）を記す。

#### 正味の立体角

1. 標的となる領域  $V$  と、検出面  $S$  を設定し、実際の実験と同じように座標空間内に配置する。
2.  $V$  内のランダムな点を取り、そこからランダムな方向に半直線を引く。
- 3.2 で引いた半直線と 1 で設定した検出面が交点を持つか調べる。
- 4.2,3 をくりかえし、3 で交点を持っていた割合を求める。
- 5.4 で求めた割合に  $4\pi$  をかける。

すなわち、正味の立体角とは、標的の空間的な広がりを考慮して、散乱が標的内で一定の確率で散乱が起こるという条件の下で平均化された（シュミレートされた）立体角である。なお、実際の計算では時間計算量を減らすため、 $V$  内でランダムに取った各点から見た検出面の立体角（解析解を用いる）の平均を考えることによって求めた。具体的なコードについては補足 4.2 を参照のこと。

### 3.3.3 測定概要

この項では今回の実験で行った測定についてその内容を記す。ここで RUN とは連続して行ったひとまとまりの測定のことである。

RUN5, RUN6, RUN7 は位置較正用の測定である。これらの測定では PSD の一部分のみに中性子ビームが直接当たるようにして測定を行った。RUN5 では PSD の中央部, RUN6 では PSD の左側, RUN7 では PSD の右側に中性子ビームを照射した。これらの測定は 5 分 0 秒ずつ行った。

RUN9, RUN10, RUN11 は炭素前方散乱のセッティングでの測定実験であった。RUN9, RUN10 は炭素標的を置いて行った測定であった。この測定は合計で 3 時間 50 分 0 秒行った。RUN11 は炭素標的を置かずに行ったバックグラウンド測定であった。バックグラウンド測定は 10 分 0 秒行った。

RUN12, RUN13, RUN15 は炭素後方散乱のセッティングでの測定実験であった。RUN12 は炭素標的を置かずに行ったバックグラウンド測定であった。このバックグラウンド測定は 10 分 0 秒行った。RUN13, RUN15 は炭素標的を置いて行った測定であった。この測定は合計で 5 時間 40 分 18 秒行った。

RUN17 から RUN22 は中性子-ヘリウム 4 散乱のセッティングでの測定実験であった。RUN17 は空気を入れた風船を置いて行ったバックグラウンド測定, RUN18 は標的を置かずに行ったバックグラウンド測定であった。これらの測定はそれぞれ 30 分 0 秒ずつ行った。RUN19 から RUN22 まではヘリウムを入れた風船を置いて行った測定であった。この測定は合計で 6 時間 35 分 0 秒行った。

### 3.3.4 リチウムモニタの計測数

リチウムモニタ (LiM) によるカウント数は、標的に照射された中性子数を導くために用いた。LiM のカウント数のデータは RUN の区切りとは独立に、およそ 1 分の、RUN の時間より短い時間幅での全カウント数として記録されている。そのため、LiM によるカウント数として採用した値は、RUN の開始時刻と終了時刻を含む LiM のデータについては、その LiM のデータの測定時間のうち RUN の測定時間と重複している割合を乗じてそのデータとしたうえで、RUN の時間全体における LiM のカウント数のデータを足し合わせている。

なお RUN13 の測定中に LiM が停止していた時間が存在していたため、LiM の真のカウント数として想定される数値を得るために、RUN13 の時間 [s] と LiM が動いていた時間 [s] の比である  $12071/7980$  を LiM の動いていた時間におけるカウント数の合計に乗じる操作を後の解析で行っている。

### 3.3.5 照射中性子数

前項の LiM のカウント数から、標的に照射した中性子数を導くため、RUN5, RUN6 および RUN7 の各 PSD の測定データのカウンタ数と LiM のカウンタ数が比例しているという仮定のもと、各検出器の位置 (中央, 左, 右) による検出効率を考慮に入れて比例定数を求めた。比例定数は表 2 の通りであった。

表 2: LiM のカウント数とヘリウム 3 検出器のカウント数との比

	左 (RUN6)	中央 (RUN5)	右 (RUN7)
PSD8(上)	$(0.904 \pm 0.025) \times 10^3$	$(1.775 \pm 0.072) \times 10^3$	$(1.230 \pm 0.039) \times 10^3$
PSD7(中央)	$(0.983 \pm 0.027) \times 10^3$	$(1.928 \pm 0.078) \times 10^3$	$(1.327 \pm 0.042) \times 10^3$
PSD5(下)	$(0.943 \pm 0.026) \times 10^3$	$(1.869 \pm 0.076) \times 10^3$	$(1.302 \pm 0.041) \times 10^3$

### 3.3.6 位置校正

実験から直接得られる生データは横軸がチャンネル数である。このままでは検出器のどの位置で粒子が検出されたのかをみることができないため、チャンネル数と検出器上の位置の対応をみる必要がある。そこで、こ

ここでは位置校正用に行った実験 RUN5,RUN6,RUN7 を用いて、検出器上の位置 [mm] をチャンネル数 [ch] の関数で書くことを目標とする。

RUN5,RUN6,RUN7 では、検出器の特定の位置にのみビーム粒子を直接当てる実験をおこなった、例えば、RUN7 では検出器の left から 385 mm から 480 mm の位置にビームを当てた。その結果得られた生データが図 11 における青色のヒストグラムである。

全ての実験において中性子検出器を同時に 3 つ使用した (PSD5,PSD7,PSD8) が、図 11 では PSD5 のみの生データを示している。横軸は粒子を検出した検出器のチャンネル数、縦軸は粒子のカウント数である。図 11 を見るとわかるように、データ上でも一部の区間にしか粒子が検出されていないことがわかる。すなわち、図 11 の例でいえば、およそ 100 ch から 300 ch がビームを当てた部分であると推測される。

データ上のビーム幅が何チャンネルなのかを定量的に求めるために、我々はこのピークの半値幅を使うことにした。すなわち、ピークの半値幅の両端のチャンネル数とその実験でビームを当てた検出器上の両端の位置に等しいと考える。半値幅を求めるためにはピークの高さを知る必要があるが、これはこのピークの一部にガウス関数をフィットすることで得た。図 11 において、ガウスフィットは赤い曲線で表されている。ピーク全体にフィットをおこなわなかった理由としては、位置校正用の実験では検出器上である程度幅のある区間にビームを当てているからである。実際に図 11 のように、このピークはおおよそ矩形に近い形になっており、ピーク全体にガウス関数をフィットすることは妥当ではないと判断した。

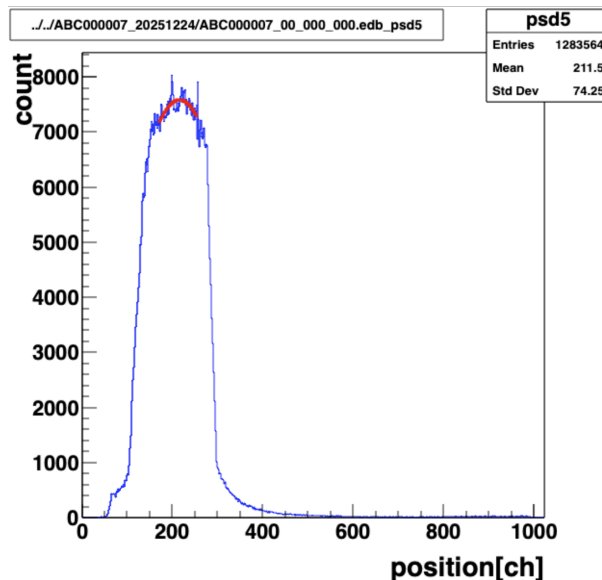


図 11: RUN7 における PSD5 の生データ (青色) とフィッティング (赤色)

以上のことを 3 つの位置 (RUN5, RUN6, RUN7) と 3 つの検出器 (PSD5, PSD7, PSD8) 全てでおこなった。すなわち、一つの検出器に対して、(チャンネル数, 検出器上の位置) という 6 つの点を得ることになる。それを図示したものが、図 12 における青い点である。この 6 つの点を一次関数でフィットし、各検出器 (PSD) におけるチャンネル数と検出器上の位置の関数を得ることができた。これは図 12 では赤い直線で表されている。二次関数など一次関数以外の校正が必要な可能性も考えられたが、今回はフィットがよく 6 つの点に沿っていると判断し一次関数で位置校正をおこなった。

得られた式を式 3.2 に示す。  $x_i$  は検出器 (PSD i) のチャンネル数 [ch],  $y_i$  は検出器 (PSD i) 上の left からの距離 [mm] を表している。

$$\begin{aligned}
 y_5 &= (-5.100 \pm 0.014) \times 10^{-1} x_5 + (5.4000 \pm 0.0089) \times 10^2 \\
 y_7 &= (-5.400 \pm 0.015) \times 10^{-1} x_7 + (5.4000 \pm 0.0088) \times 10^2 \\
 y_8 &= (-7.700 \pm 0.022) \times 10^{-1} x_8 + (7.700 \pm 0.015) \times 10^2
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

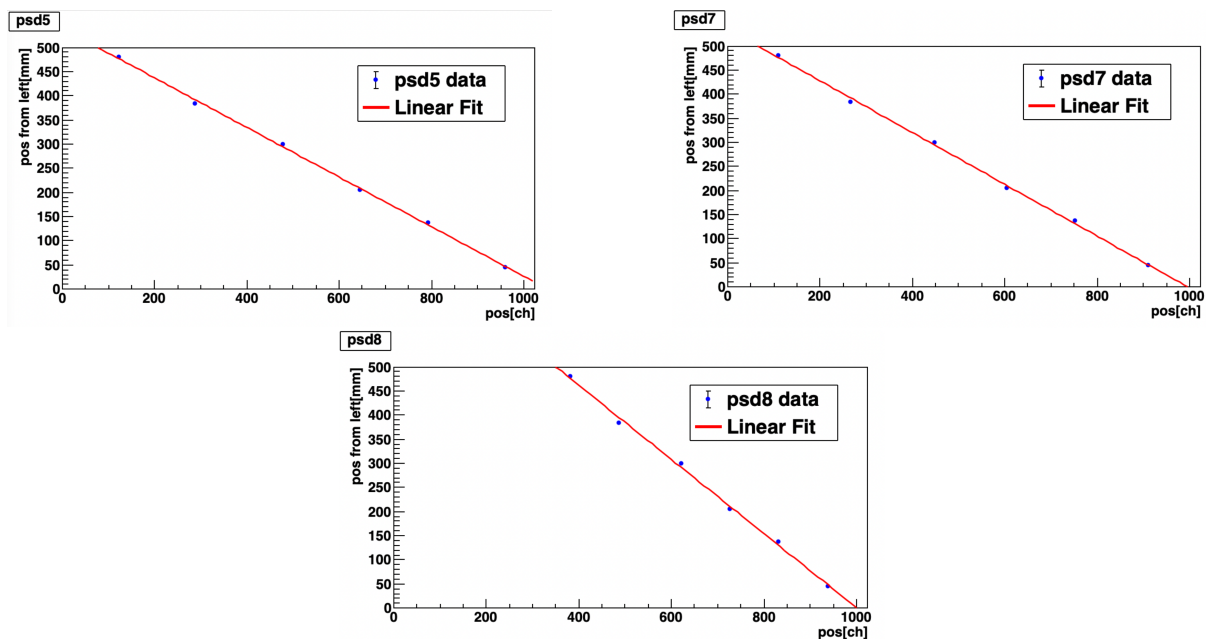


図 12: 各 PSD における位置校正の結果 (左上 PSD5, 右上 PSD7, 下 PSD8)  
横軸は

以下, 位置校正済のデータはこれらの式が使用されているものとする.

### 3.3.7 散乱粒子数

計測中には目的とする炭素-中性子弾性散乱以外にも, 外部からの中性子などによるバックグラウンド (BG) も検出される. そのため散乱粒子数を導出するためには, 標的のある場合のカウント数から標的のない場合のカウント数を引くことになる. ただし, 入射粒子数が常に一定とは限らないため, LiM の数で規格化が必要がある.

炭素-中性子散乱実験に関して, 我々の計測した RUN は次のようなものであった.

1. 前方角度: RUN9(標的あり), RUN10(標的あり), RUN11(標的なし)
2. 後方角度: RUN13(標的あり), RUN15(標的あり), RUN12(標的なし)

したがって, 例えば前方角度については, 各位置に対して RUN9 と RUN10 のカウント数を足し, RUN11 のカウント数を LiM で規格化した数を引くことによって, 実質的な前方角度の散乱粒子数のヒストグラムを得る. ただし, RUN13 については一部の時間で LiM を取得することができなかったため, その分の RUN13 のデータは使用していない.

このようにして得られた, 散乱粒子数のヒストグラムを図 13 にて青色で示す. 横軸は検出器上の位置で, 縦軸はカウント数である. ただしここでは PSD8 のみのグラフを示しており, 実際にはこのようなヒストグラムが前方・後方それぞれ 3 つずつ得られる.

前方角度について, 全体的にカウント数が 0 を下回り, 散乱粒子数を数えることができなかった. 一方で後方角度については 3 つのピークが見えた. このピークに 3 つのガウス関数の和でフィッティングし, それぞれのピークの高さ  $A$  と標準偏差  $\sigma$ , 期待値  $\mu$  を得る. (図 13 黒曲線) その後, 各ピークの面積  $\sqrt{2\pi}A\sigma$  を求め, それが各角度に散乱してきた散乱粒子数と考える. ただし, この時点まで検出器の検出効率を考慮していないため, 実際に導出された値は散乱粒子数に検出効率を乗じたものであると考えられる. その結果, 得られた後方角度の散乱粒子数は表 3 のとおりである.

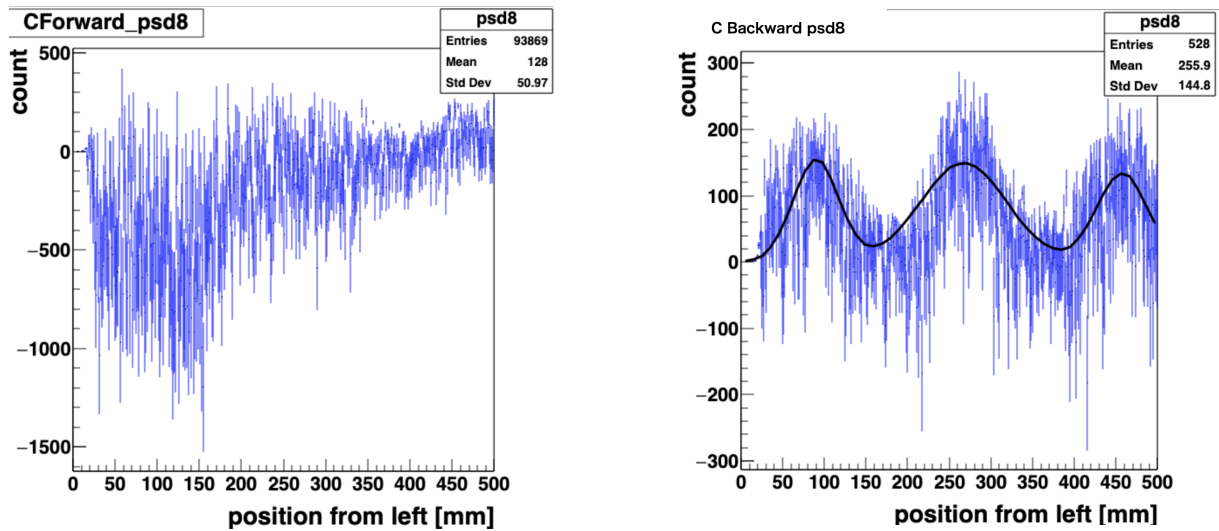


図 13: 散乱粒子数のヒストグラム (左：前方角度, 右：後方角度)

表 3: 後方角度の散乱粒子数 × 検出効率

	100°	121°	142°
PSD 8	$(1.100 \pm 0.067) \times 10^4$	$(1.90 \pm 0.12) \times 10^4$	$(1.00 \pm 0.13) \times 10^4$
PSD 7	$(1.400 \pm 7.0) \times 10^4$	$(2.00 \pm 0.15) \times 10^4$	$(1.50 \pm 0.19) \times 10^4$
PSD 5	$(9.50 \pm 0.67) \times 10^3$	$(1.90 \pm 0.12) \times 10^4$	$(1.40 \pm 0.13) \times 10^4$

誤差はフィッティング時の誤差から導出されたものである。

### 3.3.8 標的の面数密度

標的の面数密度を導出する。今回使用した標的は図 14 示したものである。

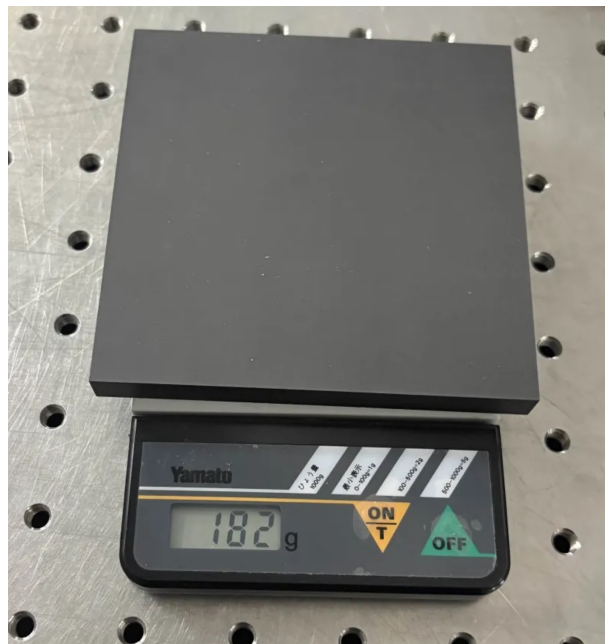


図 14: 本実験で使用した標的 (はかりの上の黒い板)

標的の面数密度を求めるのに必要な量は、標的の質量と各辺の長さである。標的の質量  $m$  は 1g 単位のはかりで量り、 $m = 182 \pm 1$  [g] と分かった。また、各辺の長さは  $100 \times 100 \times 10$  [mm<sup>3</sup>] であり、誤差は各辺で 1mm と考えた。

アボガドロ定数  $N_A = 6.02 \times 10^{23}$  と mol 質量  $M = 12.0$  を定数と考え、次の式 (3.3) で標的の面数密度を求めた。

$$\begin{aligned}
 m &: \text{炭素標的の質量 [g]} \\
 S &: \text{標的の面積 [mm}^2\text{]} \\
 N_A &: \text{アボガドロ定数 [/mol]} \\
 M &: \text{mol 質量 [g/mol]}
 \end{aligned}$$

$$n = \frac{mN_A}{MS} \quad (3.3)$$

その結果、標的の面数密度は次の値であることがわかった。

$$n = (9.10 \pm 0.14) \times 10^{26} [\text{m}^{-2}] \quad (3.4)$$

### 3.3.9 立体角

立体角の値を導出する、炭素-中性子散乱実験では 3 本の検出器で 3 つの角度を計測したので 9 つの立体角を、ヘリウム-中性子散乱実験では 3 本の検出器で 1 つの角度を計測したので 3 つの立体角を見ることになる。

以下、炭素標的の場合の前方角度、後方角度、およびヘリウム標的の場合の立体角を表 4 から表 6 示す。ただし、微分断面積を導出できたのは炭素標的の後方角度のみであるため、それ以外の立体角は以降の計算に使用していない。

表 4: 炭素標的前方角度の立体角

	16°	37°	58°
PSD 8	$(1.45 \pm 0.08) \times 10^{-2}$	$(1.92 \pm 0.12) \times 10^{-2}$	$(1.45 \pm 0.08) \times 10^{-2}$
PSD 7	$(1.45 \pm 0.08) \times 10^{-2}$	$(1.93 \pm 0.12) \times 10^{-2}$	$(1.45 \pm 0.08) \times 10^{-2}$
PSD 5	$(1.45 \pm 0.08) \times 10^{-2}$	$(1.92 \pm 0.12) \times 10^{-2}$	$(1.45 \pm 0.08) \times 10^{-2}$

表 5: 炭素標の後方角度の立体角

	100°	121°	142°
PSD 8	$(1.42 \pm 0.08) \times 10^{-2}$	$(1.87 \pm 0.12) \times 10^{-2}$	$(1.42 \pm 0.08) \times 10^{-2}$
PSD 7	$(1.43 \pm 0.08) \times 10^{-2}$	$(1.88 \pm 0.12) \times 10^{-2}$	$(1.43 \pm 0.08) \times 10^{-2}$
PSD 5	$(1.42 \pm 0.08) \times 10^{-2}$	$(1.87 \pm 0.12) \times 10^{-2}$	$(1.42 \pm 0.08) \times 10^{-2}$

### 3.3.10 微分断面積

以上の解析により、炭素標的に関して後方角度の微分断面積を導出することができた。以上の過程で導出した、入射粒子数 (× 検出効率) と標的粒子数 (× 検出効率)、標的の面数密度、立体角を下記の式 (3.5) に代入し、各角度に対して 3 つの微分断面積を得ることができる。

表 6: ヘリウム標的の立体角

	90°
PSD 8	$(6.42 \pm 0.28) \times 10^{-2}$
PSD 7	$(6.45 \pm 0.28) \times 10^{-2}$
PSD 5	$(6.42 \pm 0.28) \times 10^{-2}$

$N_{in}$ : 入射粒子数

$N_{scat}$ : 散乱粒子数

$\epsilon$ : 検出効率

$n$ : 標的の面数密度 [1/barn]

$d\Omega$ : 立体角 [sr]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N_{scat} \cdot \epsilon}{(N_{in} \cdot \epsilon) \cdot n \cdot d\Omega} \quad (3.5)$$

ただし、この時点で求められているのは実験室系での微分断面積であり、過去のデータと比較を行うために重心系での微分断面積に変換した。さらにその後、各角度に対して得られた3つの微分断面積を一つにまとめた。つまり、式(3.5)の散乱粒子数と立体角の値を3つの検出器の和にした。

その結果を以下の表7と図15に示す。

表 7: 炭素標の後方角度の微分断面積

$\theta_{C.M.}$	Differential Cross Section [b/sr]
103°	$(2.40 \pm 0.14) \times 10^{-1}$
127°	$(1.70 \pm 0.11) \times 10^{-1}$
150°	$(2.20 \pm 0.18) \times 10^{-1}$

図15について、我々の得たデータは赤点で示されているものである。一方で過去のデータは R.O. Lane et al.(1961)[5] のものを使用した。ただし、今回のエネルギー帯に近いエネルギーのもののみを使用し、それを帯として表示している。

炭素標的前方角度とヘリウム標的についての微分断面積を求めることはできなかった。

### 3.3.11 中性子-ヘリウム4散乱

中性子とヘリウム4の散乱において、当初は(ヘリウム入り風船) - (空気入り風船) + (標的なし)のデータを用いて散乱断面積を導く計画であった。しかし風船以外のバックグラウンドの効果を除けないのでこの方法は断念した。

規格化した(ヘリウム入り風船) - (空気入り風船)のデータは図16である。このデータを位置による検出効率の違いを考慮して測定した全領域で足し合わせた値は  $(4.4 \pm 1.1) \times 10^{-4}$  であった。これはヘリウムと空気、中性子散乱に対する挙動の違いだと考えられる。

規格化した(空気入り風船) - (標的なし)のデータは図17である。このデータを位置による検出効率の違いを考慮して測定した全領域で足し合わせた値は  $(1.37 \pm 0.14) \times 10^{-3}$  であった。これはこの測定において風船の影響を無視できるものとして解析することは妥当でないということを示唆している。

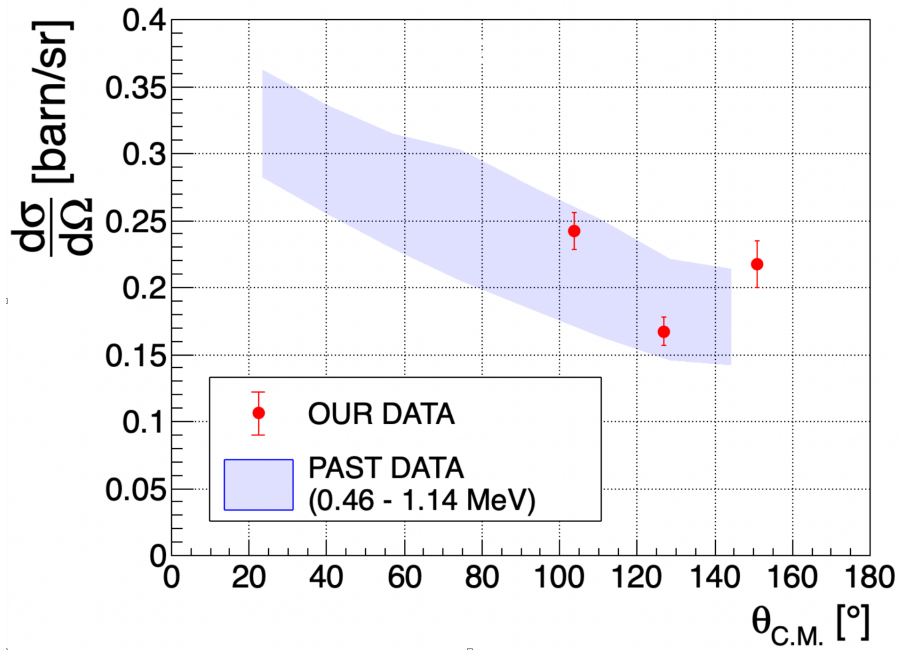


図 15: 炭素標の後方の微分断面積 (赤点: 本実験データ, 紫帯: R. O. Lane et al., Ann. Phys. 12, 135 (1961).)

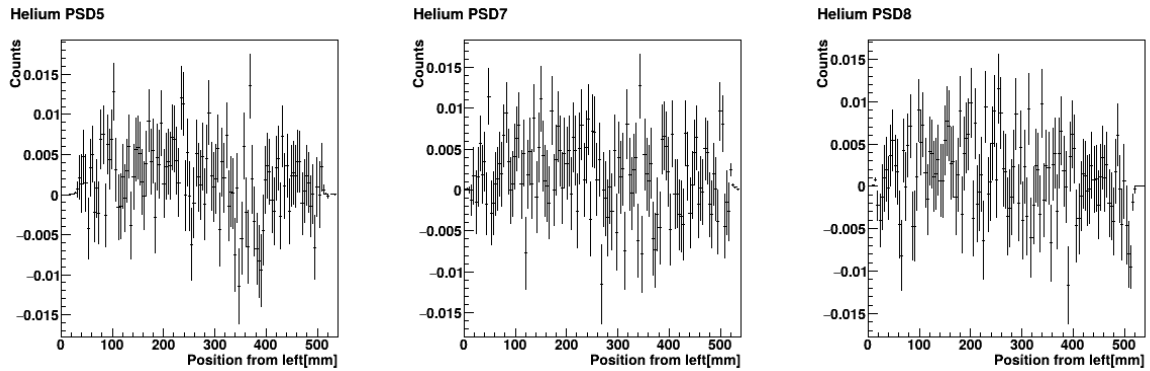


図 16: 各 PSD の各位置に対し規格化しヘリウム風船の散乱から BG の空気風船を除いた値

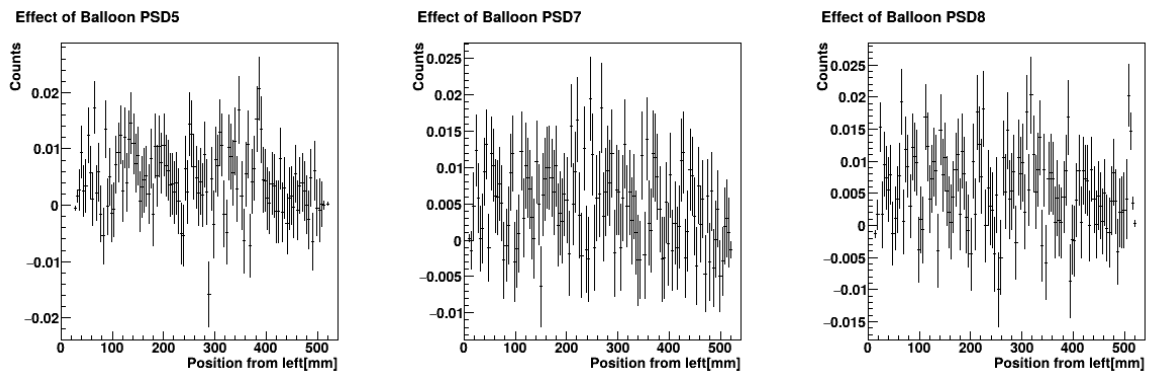


図 17: 各 PSD の各位置に対し規格化し空気風船の散乱から標的を置かない BG を除いた値

## 3.4 考察

### 3.4.1 炭素散乱測定結果の文献値との比較

炭素-中性子弾性散乱の後方散乱角度（重心系  $103^\circ$ ,  $127^\circ$ ,  $150^\circ$ ）において得られた微分断面積を、R. O. Lane et al. (1961) [5] の文献値（エネルギー  $0.46\text{--}1.14\text{ MeV}$  の帯）と比較すると（図 15, 表 7）、本実験値は文献値と誤差の範囲内で整合していることが確認された。この一致は、LiM 規格化・バックグラウンド差し引き・立体角補正・微分断面積算出を含む一連の解析手法の基本的な妥当性を示している。

一方、前方散乱角度（実験室系  $16^\circ$ ,  $37^\circ$ ,  $58^\circ$ ）では、バックグラウンド差し引き後のカウント数が全体的に 0 を下回り、微分断面積は負の値となった。これは、前方角度に特有の物理的状況に起因するものであり、次節で詳細に考察する。

### 3.4.2 前方散乱における負の断面積の物理的解釈と全断面積の抽出

**モデルの提案** 角度  $\theta$  方向の検出器における計数率を定式化する。ここで、 $\text{rate}_{\text{target}}(\theta)$  を標的あり測定（計数率（単位時間あたりのカウント数））、 $\text{rate}_{\text{BG}}(\theta)$  を標的なし（バックグラウンド）測定（計数率）と定義する。また、 $\Phi(\theta)$  を角度  $\theta$  方向のビームフラックス、 $\Phi_0$  をビーム軸（ $0^\circ$  方向）のフラックス、 $n$  を標的の面数密度（単位面積あたりの原子数）、 $\sigma_{\text{total}}$  を全断面積、 $d\sigma/d\Omega(\theta)$  を微分断面積、 $\Delta\Omega$  を検出器の立体角とする。このとき、 $\text{rate}_{\text{target}}(\theta)$  は減衰した直接ビームと標的からの弾性散乱中性子の和として

$$\text{rate}_{\text{target}}(\theta) = \underbrace{\Phi(\theta) e^{-n\sigma_{\text{total}}}}_{\text{減衰した直接ビーム}} + \underbrace{\Phi_0 n \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \Delta\Omega}_{\text{散乱中性子}} \quad (3.6)$$

と表される。バックグラウンド測定（標的なし）では  $\text{rate}_{\text{BG}}(\theta) = \Phi(\theta)$  が成立するため、観測透過率  $T_{\text{obs}}(\theta) \equiv \text{rate}_{\text{target}}(\theta)/\text{rate}_{\text{BG}}(\theta)$  は

$$T_{\text{obs}}(\theta) = e^{-n\sigma_{\text{total}}} + \frac{\Phi_0}{\Phi(\theta)} \cdot n \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \Delta\Omega \quad (3.7)$$

と書ける。KUANS の中性子ビームは前方に強く集中しているため、 $\Phi(\theta)$  は軸から離れるにつれて急激に減少し、 $\Phi_0/\Phi(\theta) \gg 1$  となる。そのため、小角度では式 (3.7) の減衰項が支配的となって  $T_{\text{obs}} < 1$ （標的あり測定のカウントがバックグラウンドを下回る）となり、角度が増すにつれて散乱項の寄与が相対的に増大して  $T_{\text{obs}} > 1$  に転じる。

**線形フィットによる全断面積の抽出** 式 (3.7) において  $\Phi(\theta) \propto \text{rate}_{\text{BG}}(\theta)$  と仮定し、

$$x_i \equiv \frac{n \cdot (d\sigma/d\Omega)_{\text{lit}}(\theta_i) \cdot \Delta\Omega_i}{\text{rate}_{\text{BG}}(\theta_i)} \quad (3.8)$$

と定義すると（ここで  $(d\sigma/d\Omega)_{\text{lit}}(\theta_i)$  は文献値の微分断面積、 $n$  を角度によらず一定と仮定）、式 (3.7) は次の 2 パラメータ線形モデルに帰着する：

$$T_{\text{obs}}(\theta_i) = a + k \cdot x_i \quad (3.9)$$

ここで  $a = e^{-n\sigma_{\text{total}}}$ （切片 = 真の透過率）、 $k = \Phi_0 \cdot C$ （傾き = ビーム規格化定数）である。 $(d\sigma/d\Omega)_{\text{lit}}$  には Lane (930 keV) [5] の文献値を使用した。

**フィッティング** 3 台の PSD  $\times$  3 角度 = 9 点の観測透過率に対して加重線形回帰を行った結果（図 18）、

$$a = 0.6182 \pm 0.0192, \quad (3.10)$$

$$k = 687.3 \pm 78.2, \quad (3.11)$$

$$\chi^2/\text{ndf} = 0.73 \quad (p = 0.65) \quad (3.12)$$

が得られた。 $\chi^2/\text{ndf} = 0.73$  は統計的に良好な適合を示しており、線形モデルの妥当性を支持する。

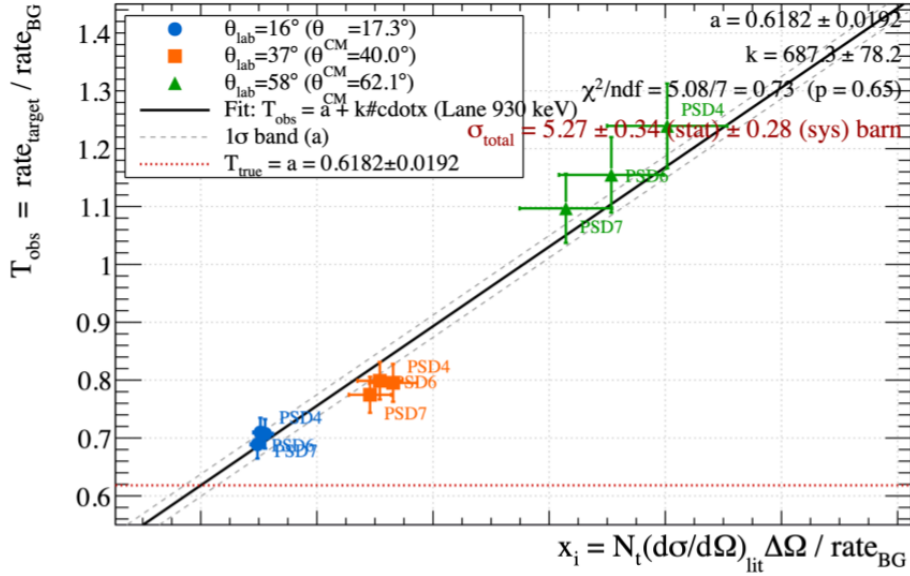


図 18:  $T_{\text{obs}}$  対  $x_i$  の線形フィット（上段）とプル分布（下段）. 上段の切片  $a = e^{-n\sigma_{\text{total}}}$  から全断面積を抽出する. 青点:  $\theta_{\text{lab}} = 16^\circ$ , 橙点:  $37^\circ$ , 緑点:  $58^\circ$  の各 PSD のデータ点. 灰色帯: 切片の  $1\sigma$  領域. プル分布が  $\pm 1$  付近に収まっており, フィットの良好な統計的整合性を示す.

切片  $a$  から全断面積を求めると,

$$\sigma_{\text{total}} = -\frac{\ln a}{n} = -\frac{\ln 0.6182}{9.10 \times 10^{26} \text{ m}^{-2}} = 5.27 \pm 0.34 \text{ (stat) barn} \quad (3.13)$$

が得られた ( $1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$ ).

**誤差の評価** 統計誤差 ( $\pm 0.34 \text{ barn}$ ) はフィッティングの切片誤差から伝播させた. 系統誤差は, 文献エネルギーの違いに伴うばらつきとして, Rogers 707 keV, 901 keV[6] と Lane 930 keV[5] の結果の差から

$$\sigma_{\text{sys}} = 0.16 \text{ barn} \quad (3.14)$$

と見積もった. したがって代表値は

$$\sigma_{\text{total}} = 5.27 \pm 0.34 \text{ (stat)} \pm 0.16 \text{ (sys) barn} \quad (3.15)$$

であり, 1 MeV 付近の  $n\text{-}^{12}\text{C}$  全断面積の文献値 (4-5 barn) の上端付近に位置して誤差の範囲内で整合している.

また, 傾き  $k = 687.3$  からビーム集中性の指標  $\Phi_0/\Phi(\theta_i)$  を推定すると,  $16^\circ$ : 約 160,  $37^\circ$ : 約 410,  $58^\circ$ : 約 1460 となり, いずれも  $\gg 1$  であることが確認された. この急峻な前方集中性こそが前方角度での測定が単純なバックグラウンド差し引きでは成立しない本質的原因である. 得られた  $\sigma_{\text{total}}$  が文献値の上端に位置することは, 未補正の多重散乱 ( $n\sigma_{\text{total}} \approx 0.48$ , 入射中性子の約 19% が 2 回以上散乱) が  $\sigma_{\text{total}}$  を正の方向にバイアスしているという予測と定性的に整合しており, 支配的な物理を正しく捉えられていることを示唆する.

### 3.4.3 炭素測定の課題と今後の展望

**多重散乱補正** 多重散乱は, 一度ビームから外れた中性子が再散乱によって検出器方向に戻る効果をもたらす, 式 (3.6) の散乱項を実効的に増大させて切片  $a$  を過小評価させる.  $n\sigma_{\text{total}} \approx 0.48$  の本実験条件では無視できない寄与が見込まれ, 精度の向上には多重散乱補正の導入が必要である.

**前方微分断面積の直接測定に向けて** 前方角度の微分断面積を直接測定するためには, 以下の改善が有効である.

1. **シャドウバー法**：バックグラウンド測定時に標的位置に遮蔽体（シャドウバー）を設置することで、直接ビームを両測定から除去し、正味の散乱信号のみを取り出すことができる。これにより前方角度でも正の微分断面積の測定が可能になる。
2. **バックグラウンド測定の統計量確保**：本実験では  $\text{LiM}(BG) = 1004$  に対して本測定の LiM カウントは 44910 と約 45 倍の差があった（表 3, 6 参照）。両者を同程度に揃えることで、LiM 規格化に起因する系統誤差を大幅に低減できる。
3. **コリメータの改善**：コリメータの開口を絞り周囲の遮蔽を強化することで、ビームのハロー成分 ( $\Phi(\theta)$  の角度依存性) を低減し、前方角度での散乱信号の検出精度が向上する。

### 3.4.4 ヘリウム散乱測定の考察

$^4\text{He}$  標的（ゴム風船に充填したヘリウムガス）を用いた中性子-ヘリウム弾性散乱の測定も試みた（RUN17--22）。LiM で規格化した後に位置依存の検出効率を考慮して（ヘリウム風船）－（空気風船）を計算すると  $(4.4 \pm 1.1) \times 10^{-4}$  が得られた。しかし、このシグナルは統計的揺らぎのレベルに埋もれており、明確な散乱ピーク構造を同定することはできなかった。その結果、ヘリウム標的に対する微分断面積を導出することはできなかった。

ヘリウム測定が困難であった主な原因として、以下の 3 点が挙げられる。

1. **標的密度の低さ**：ヘリウムガスは固体炭素に比べて面数密度が著しく低い。炭素標的では  $n = (9.10 \pm 0.14) \times 10^{26} / \text{m}^2$  が得られたのに対し、同程度の統計量を得るためには超長時間の測定が必要となる。
2. **バックグラウンド除去の困難さ**：風船の膜（ゴム）からの散乱が無視できないバックグラウンドを形成する。風船による寄与（空気風船）－（標的なし）は  $(1.37 \pm 0.14) \times 10^{-3}$  と評価されており、これはヘリウム散乱の正味信号の約 3 倍に相当する。
3. **風船外側の空気の影響**：（ヘリウム風船）－（空気風船）＋（標的なし）という差し引き手順は、風船の膜による散乱を除去することを意図している。しかし、この操作では風船の外側に存在する空気からの散乱効果が完全には除去されない。

炭素後方散乱の測定で解析手法の妥当性が確認された。同一の解析枠組みでヘリウム散乱断面積の測定を目指すには、炭素測定の考察で提案した改善（シャドウバー法、BG 統計量の確保）に加え、より高密度なヘリウム標的（高圧封入容器等）の採用や測定時間の大幅な延長、および膜からの散乱を低減する標的設計の工夫が求められる。

## 3.5 結論

本研究では、KUANS を用いた中性子-炭素・中性子-ヘリウム弾性散乱の微分断面積測定手法を構築し、以下の成果を得た。

**達成した成果** 炭素標的の後方散乱角度（重心系  $103^\circ$ ,  $127^\circ$ ,  $150^\circ$ ）において微分断面積を導出し、文献値（Lane et al.）と誤差の範囲内で整合することを確認した。これにより、LiM 規格化・バックグラウンド差し引き・立体角補正・微分断面積算出を含む一連の解析手法の妥当性を実証した。

また、前方角度（ $16^\circ - 58^\circ$ ）では直接ビームの減衰効果が支配的となり単純なバックグラウンド差し引きが成立しないことを定量的に示し、ビーム透過率の線形モデルによって炭素全断面積  $\sigma_{\text{total}} = 5.27 \pm 0.34$  (stat)  $\pm$  0.16 (sys) barn を抽出した。この値は文献値（4–5 barn）の上端付近に位置し、整合することが確認できた。

**課題と展望** ヘリウム標的については、ガス標的の低面数密度とゴム膜からのバックグラウンドにより、明確な散乱信号を取得できなかった。当初の目的である  $n-\alpha$  弾性散乱の微分断面積測定には至らなかったが、炭素測定で確立した解析枠組みはそのまま適用可能であり、以下の改善を実施することで実現できると考えられ

る：(i) シャドウバー法による前方微分断面積の直接測定，(ii) 高圧封入容器を用いた高密度ヘリウム標的の採用，(iii) 多重散乱補正の導入，(iv) バックグラウンド測定の統計量確保とコリメータの改良。

これらを通じて，長距離三体核力の効果が顕在化する  $D$  波位相シフトへのアクセスに必要な精密測定の基盤を整えることが，今後の課題である。

## 謝辞

本実験を行うにあたり，多くの方々にご支援いただきました。

理論ゼミでは，菅沼秀夫准教授および土居孝寛助教に丁寧なご指導をいただきました。また，TA の藤丸大輔さんおよび當銘啓さんには理論ゼミを通じて様々なサポートをいただきました。実験においては，成木恵教授および関口仁子教授にご支援いただきました。実験の遂行にあたって多大なるご協力をいただきました。また，工学研究科の田崎誠司教授には，検出器の使い方のご指導および解析コードをご提供いただきました。TA の高橋宏太さんには実験全般にわたって親身にサポートしていただきました。さらに，東棟技術職員の廣瀬昌憲さんには，実験を行う上で多くのご協力をいただきました。

以上の皆様に，厚くお礼申し上げます。

## 4 補足

### 4.1 カイラル摂動論の補足

本章の記述は主に文献 [7] を参考にした。

#### 4.1.1 QCD のカイラル対称性

2 フレーバー QCD のラグランジアンは以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \bar{q}(i\gamma_\mu D^\mu - \mathcal{M})q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}, \quad (a = 1, 2, \dots, 8) \\ D_\mu &= \partial_\mu - ig_s A_\mu^a T^a \quad (T^a : \text{SU}(3) \text{ の Gell-Mann 行列}), \\ \mathcal{M} &= \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

\*4

$$\left( \begin{array}{l} A_\mu = A_\mu^a T^a \quad (\text{グルーオン場}) \\ G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (\text{グルーオンの場の強さ}) \\ q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (\text{クォーク場}) \\ g_s = \text{QCD の結合定数} \end{array} \right)$$

右手スピノル, 左手スピノルに分解すると,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \bar{q}_L i\gamma_\mu D^\mu q_L + \bar{q}_R i\gamma_\mu D^\mu q_R \\ &\quad - \bar{q}_L \mathcal{M} q_R - \bar{q}_R \mathcal{M} q_L - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$\left( \begin{array}{l} (\because) \quad P_R \equiv \frac{1+\gamma_5}{2}, \quad P_L \equiv \frac{1-\gamma_5}{2} \quad \text{とすると} \\ P_R + P_L = 1 \\ \text{よって} \\ \mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{q}(P_R + P_L)(i\cancel{D} - \mathcal{M})(P_R + P_L)q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \\ = (\bar{q}_L + \bar{q}_R)(i\cancel{D} - \mathcal{M})(q_R + q_L) - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \\ = \bar{q}_L i\cancel{D} q_L + \bar{q}_R i\cancel{D} q_R - \bar{q}_R \mathcal{M} q_L - \bar{q}_L \mathcal{M} q_R - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \end{array} \right)\tag{4.3}$$

今  $m_u \simeq 3.3\text{MeV}$ ,  $m_d \simeq 6.0\text{MeV}$  であり, QCD のスケール  $\Lambda_{\text{QCD}} \simeq 200\text{MeV}$  と比べると十分小さいため, クォーク質量は無視できると考える。

するとラグランジアンは以下ようになる。

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} \simeq \bar{q}_L i\cancel{D} q_L + \bar{q}_R i\cancel{D} q_R - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}\tag{4.4}$$

このラグランジアンは以下のアイソスピン回転に対し不変 ( $\mathbf{1}_{2 \times 2}$  はフレーバー空間におけるパウリ行列)

$$\begin{aligned}q_L &\rightarrow q'_L = L q_L = \exp\left(-i\frac{\boldsymbol{\theta}_L \cdot \boldsymbol{\tau}}{2}\right) q_L \\ q_R &\rightarrow q'_R = R q_R = \exp\left(-i\frac{\boldsymbol{\theta}_R \cdot \boldsymbol{\tau}}{2}\right) q_R\end{aligned}\tag{4.5}$$

\*4  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  を添え字をあらわにして書くとな下のようになる。

$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{q}_{a,\alpha,i} (i\gamma_\mu D^\mu - \mathcal{M})_{ab,\alpha\beta,ij} q_{b,\beta,j} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}$   
(a,b はカラー空間の添え字,  $\alpha, \beta$  はスピノル空間の添え字, ij はフレーバー空間の添え字,  $\mu, \nu$  はローレンツ添え字)

$$\left( \begin{array}{l} (\cdot) \bar{q}_R i \not{D} q_R = q_R^\dagger \gamma^0 i \not{D} q_R \\ \rightarrow q_R^\dagger \exp\left(i \frac{\boldsymbol{\theta}_R \cdot \boldsymbol{\tau}}{2}\right) \gamma^0 i \not{D} \exp\left(-i \frac{\boldsymbol{\theta}_R \cdot \boldsymbol{\tau}}{2}\right) q_R \\ = q_R^\dagger \exp\left(i \frac{\boldsymbol{\theta}_R \cdot \boldsymbol{\tau}}{2} - \frac{\boldsymbol{\theta}_R \cdot \boldsymbol{\tau}}{2}\right) \gamma^0 i \not{D} q_R \\ = q_R^\dagger \gamma^0 i \not{D} q_R \\ = \bar{q}_R i \not{D} q_R \\ \text{左手スピノル成分についても同様} \end{array} \right) \quad (4.6)$$

よって Noether の定理からカレントが存在する (6 つ).

L, R のそれぞれの変換に対しカレントは以下.

$$\begin{aligned} L_\mu^i &= \bar{q}_L \gamma_\mu \frac{\tau^i}{2} q_L \\ R_\mu^i &= \bar{q}_R \gamma_\mu \frac{\tau^i}{2} q_R \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4.7)$$

書き換えると

$$\begin{aligned} V_\mu^i &= L_\mu^i + R_\mu^i && ; \text{ベクトルカレント} \\ A_\mu^i &= R_\mu^i - L_\mu^i && ; \text{軸性ベクトルカレント} \end{aligned} \quad (4.8)$$

それぞれの変換を作る生成子は

$$[Q_I^i, Q_I^j] = i \epsilon^{ijk} Q_I^k \quad (I = L, R) \quad (4.9)$$

または

$$\begin{aligned} [Q_V^i, Q_V^j] &= i \epsilon^{ijk} Q_V^k \\ [Q_A^i, Q_A^j] &= i \epsilon^{ijk} Q_V^k \\ [Q_V^i, Q_A^j] &= i \epsilon^{ijk} Q_A^k \end{aligned} \quad (4.10)$$

を満たす.

(4.7) の導出

$$\left( \begin{array}{l} \text{無限小変換 } q_L^i \rightarrow q_L^i = q_L^i - i \frac{\epsilon^l \cdot \tau_{ij}^l}{2} q_L^j \quad (l \text{ はパウリ行列を指定する添え字, } i, j \text{ はフレーバー添え字) に対し} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q_L^i)} = \frac{\partial}{\partial (\partial^\mu q_L^i)} \left( \bar{q}_L^j i \gamma^\mu \partial_\mu q_L^j \right) \\ = \bar{q}_L^j i \gamma^\mu \\ j_\mu^l = \bar{q}_L^i (i \gamma_\mu) \left( -i \frac{\tau_{ij}^l}{2} \right) q_L^j \\ = \bar{q}_L \gamma_\mu \frac{\tau^l}{2} q_L \\ \text{(右巻き成分についても同様)} \end{array} \right)$$

$\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  は  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  対称性を持つが、真空はこの対称性を持たない. ( $SU(2)_V \in SU(2)_L \times SU(2)_R$  対称性は持つ, つまり  $Q_V^i |0\rangle = 0$  かつ  $Q_A^i |0\rangle \neq 0$ )

この自発的破れにより以上に軽い擬スカラー粒子が生まれ、 $\pi$  中間子と同一視される.

#### 4.1.2 有効ラグランジアン

次に低エネルギー QCD の有効ラグランジアンを考える.

以下のような系を考える.

- Chiral 極限 (クォークが質量をもたないように見える)
- $\pi$  中間子はアイソスピン三重項を成すので  $SU(2)_V$  変換の下で線形に変換する

$\pi$  中間子のアイソスピン回転に対する変換性は 2 電子系のスピンを考えると容易に理解できる。2 電子系のスピンは合成スピンを  $S$  とすると  $S = 1, 0$  の 2 つの場合に分類できる。量子化軸を  $z$  軸にとると  $|S, S_z\rangle$  は

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle, \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \\ |1, -1\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle, \\ |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \end{aligned}$$

同様に  $\pi$  中間子は合成アイソスピンが 1 の 3 つの状態があり、以下のように分類される

$$\begin{aligned} |\pi^+\rangle &= |u\bar{d}\rangle, \\ |\pi^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle), \\ |\pi^-\rangle &= |d\bar{u}\rangle, \end{aligned}$$

三重項は traceless 行列で表される。

一方,

$$|\pi^+\rangle, |\pi^0\rangle, |\pi^-\rangle$$

に対応する行列は

$$\begin{aligned} |u\bar{d}\rangle &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & |d\bar{u}\rangle &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) &\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり、いずれもトレースが 0 である。

しかも

$$\text{Tr}(VMV^\dagger) = \text{Tr}(M)$$

なので、trace 0 の行列は変換しても trace 0 のままである。

したがって、三重項の張る空間は  $SU(2)_V$  変換の下で再び三重項の空間に写る。つまり、三重項は変換によって三重項の中だけで混ざり、一重項とは混ざらない。

クォーク質量がないとき、QCD のラグランジアンは  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  のカイラル対称性をもつ。低エネルギーではこの対称性は  $SU(2)_V$  へ自発的に破れ、その結果として 3 個の南部-Goldstone boson  $\pi^1, \pi^2, \pi^3$  が現れる。

$SU(2)_L \times SU(2)_R$  は局所的に  $SO(4)$  と同型であり、線形シグマ模型では  $(\boldsymbol{\pi}, \sigma) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \sigma)$  を 4 成分ベクトルとして導入すると、この対称性を線形に実現できる。一方、 $\pi$  中間子のみを自由度として記述する場合には、カイラル対称性は  $\pi$  場に対して非線形に実現される。

この 4 つの自由度を持つ場  $(\boldsymbol{\pi}, \sigma) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \sigma)$  に対する変換を考える。

無限小回転角  $\theta_i^{V,A}$  (6 つ) を用いると

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \sigma \end{pmatrix} \xrightarrow{SO(4)} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}' \\ \sigma' \end{pmatrix} \left[ \mathbf{1}_{4 \times 4} + \sum_{i=1}^3 \theta_i^V V_i + \sum_{i=1}^3 \theta_i^A A_i \right] \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \sigma \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$\sum_{i=1}^3 \theta_i^V V_i = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3^V & \theta_2^V & 0 \\ \theta_3^V & 0 & -\theta_1^V & 0 \\ -\theta_2^V & \theta_1^V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sum_{i=1}^3 \theta_i^A A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \theta_1^A \\ 0 & 0 & 0 & \theta_2^A \\ 0 & 0 & 0 & \theta_3^A \\ -\theta_1^A & -\theta_2^A & -\theta_3^A & 0 \end{pmatrix}$$

\*5

次に  $\sigma$  を  $\pi$  の関数として表現することを考える.

$\pi$  しか出てこないような理論では  $(\pi, \sigma)$  のうち 3 成分のみが独立なので拘束条件が存在する. これを

$$\pi^2 + \sigma^2 = F^2 \quad (4.12)$$

とおく. ( $F$  は質量次元を持つ定数)

結局  $P_i$  と  $\sigma$  の関係式は以下の 2 つ.

- $\begin{pmatrix} \pi \\ \sigma \end{pmatrix} \xrightarrow{SO(4)} \begin{pmatrix} \pi' \\ \sigma' \end{pmatrix} \left[ \mathbf{1}_{4 \times 4} + \sum_{i=1}^3 \theta_i^V V_i + \sum_{i=1}^3 \theta_i^A A_i \right] \begin{pmatrix} \pi \\ \sigma \end{pmatrix}$
- $\pi^2 + \sigma^2 = F^2$

以上からカイラル変換に対する  $\pi$  場の変換式は

$$\begin{aligned} \pi &\xrightarrow{\theta^V} \pi' = \pi + \theta^V \times \pi \quad SU(2)_V \simeq SO(3) \text{ では線形} \\ \pi &\xrightarrow{\theta^A} \pi' = \pi + \theta^A \sqrt{F^2 - \pi^2} \quad SU(2)_L \times SU(2)_R \simeq SO(4) \text{ では非線形の部分が入る} \end{aligned} \quad (4.13)$$

この 4 次元表現は次のように 2 次元表現にすると便利.

$$U = \frac{1}{F} (\sigma \mathbf{1}_{2 \times 2} + i \pi \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (\boldsymbol{\tau} \text{ は Pauli 行列}) \quad (4.14)$$

いま  $U$  はユニタリー行列である.

$$\left( \begin{aligned} (\cdot) U^\dagger U &= \frac{1}{|F|^2} (\sigma \mathbf{1} - i(\pi \cdot \boldsymbol{\tau})^\dagger) (\sigma \mathbf{1} + i \pi \cdot \boldsymbol{\tau}) \\ &= \frac{1}{|F|^2} (|\sigma|^2 \mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}^\dagger \cdot \boldsymbol{\pi}^\dagger \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \\ &= \frac{1}{|F|^2} (|\sigma|^2 + \boldsymbol{\pi}^2) \mathbf{1} \\ &= \frac{|\sigma|^2 + \boldsymbol{\pi}^2}{|F|^2} \mathbf{1} \\ &= \mathbf{1} \end{aligned} \right)$$

$U$  はカイラル変換 (4.5) に対し以下のように変換する.

$$U \rightarrow U' = LUR^\dagger \quad (4.15)$$

---

\*5  $\theta_i^V$  を含む変換は  $\pi$  中間子のみを混ぜる変換であり,  $\pi$  場は  $SU(2)_V$  変換の下で線形に変換することが分かる. いま  $V_i$  は  $SO(3)$  の生成子であり,  $SU(2)$  と同型である. つまり自由度は 3 であり, これが  $\pi$  場に相当する.

一方  $\theta_i^A$  を含む変換は  $\pi$  場と  $\sigma$  場を混ぜる変換である. この変換は非線形である.

結局非線形表現は

$$U = \frac{1}{F}(\sigma \mathbf{1}_{2 \times 2} + i\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \longrightarrow U = \frac{1}{F}(\sqrt{F^2 - \boldsymbol{\pi}^2} \mathbf{1}_{2 \times 2} + i\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (4.16)$$

となり、 $\pi$  のみの式になる。

理論の基底状態は  $\pi$  の真空期待値が 0 であることにより特徴づけられ、これは 4 次元球面上のある点に対応する (球面と  $\sigma$  軸との 2 つの交点のうち 1 つ。)

次にカイラル不変なラグランジアンを  $U$  を用いて構築する。いまカイラル変換は大域的なものを考えているので  $U$  の微分項もカイラル変換に対し  $U$  と同じ変換性を持つ。

Lorentz 不変性から微分の数はいくつかであることが要請されるのでラグランジアンは

$$\mathcal{L}_\pi = \mathcal{L}_\pi^{(2)} + \mathcal{L}_\pi^{(4)} + \dots \quad (4.17)$$

と書ける。(上の次数は微分を含む数を表している。)\*<sup>6</sup>最も単純な 2 次のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_\pi^{(2)} = \frac{F^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \rangle \quad (4.18)$$

$\langle \dots \rangle$  はフレーバー空間におけるトレースを表している。また、 $\frac{F^2}{4}$  はラグランジアン次元を合わせるために導入された。

このラグランジアンを  $\pi$  場の関数として書くと\*<sup>7</sup>

$$\mathcal{L}_\pi^{(2)} = \frac{1}{2} \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2F^2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + \mathcal{O}(\pi^6) \quad (4.19)$$

$$\left( \begin{aligned} (\because) \quad \mathcal{L}_\pi^{(2)} &= \frac{F^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \rangle \\ &= \frac{F^2}{4} \cdot \frac{1}{F^2} \langle \partial_\mu (\sqrt{F^2 - \boldsymbol{\pi}^2} \mathbf{1}_{2 \times 2} + i\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) \partial^\mu (\sqrt{F^2 - \boldsymbol{\pi}^2} \mathbf{1}_{2 \times 2} - i(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau})^\dagger) \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle i(\partial_\mu \boldsymbol{\pi}) \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot (-i)(\partial^\mu \boldsymbol{\pi}) \cdot \boldsymbol{\tau} + (\partial_\mu \sqrt{F^2 - \boldsymbol{\pi}^2}) \cdot (\partial^\mu \sqrt{F^2 - \boldsymbol{\pi}^2}) \mathbf{1}_{2 \times 2} \rangle \\ &= \frac{1}{4} \left\langle \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{1}_{2 \times 2} + \left( \frac{-1}{\sqrt{F^2 - \boldsymbol{\pi}^2}} \right)^2 (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 \cdot \mathbf{1}_{2 \times 2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\pi}) \cdot (\partial^\mu \boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{F^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}^2 + \mathcal{O}(\pi^4) \right) \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi}) \cdot (\partial^\mu \boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{2F^2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + \mathcal{O}(\pi^6) \end{aligned} \right)$$

ラグランジアンの中に出てくる  $F$  のような定数は LEC (Low Energy Constant) と呼ばれる。これらは QCD の非摂動的な効果を表す定数である。今回出てくる  $F$  は理想化された系 (クォーク質量が 0 のとき) における  $\pi$  中間子の崩壊定数と同一視できる。

また、カイラル群の非線形実現 ( $\sigma$  を  $\pi$  の関数としてどう表すか) は一意ではなく、 $U$  の取り方を変えれば別の非線形実現が得られる。

一般の  $U(\boldsymbol{\pi})$  に対する展開式は以下のようになる。

$$U(\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{1}_{2 \times 2} + i \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}}{F} - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2F^2} - i\alpha \frac{\boldsymbol{\pi}^2 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}}{F^3} + (8\alpha - 1) \frac{\boldsymbol{\pi}^4}{8F^4} + \mathcal{O}(\pi^5) \quad (4.20)$$

ここで  $\alpha$  は任意定数であり、行列  $U$  のパラメタ表示の自由度を反映している。

\*<sup>6</sup>  $\mathcal{L}_\pi^{(0)} \propto UU^\dagger = \mathbf{1}$  は定数

\*<sup>7</sup> このラグランジアンは massless スカラー場のラグランジアンと似た形をしている。

(4.20) の証明

$$\left( \begin{array}{l} (\because) \quad U(\boldsymbol{\pi}) = A(\boldsymbol{\pi}^2)\mathbf{1} + iB(\boldsymbol{\pi}^2)\frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}}{F} \quad \text{とおく} \\ UU^\dagger = \mathbf{1} \text{ から } (A(\boldsymbol{\pi}^2))^2 + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{F^2}(B(\boldsymbol{\pi}^2))^2 = 1 \\ A(\boldsymbol{\pi}^2) = 1 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2F^2} + c\frac{\boldsymbol{\pi}^4}{F^4} + \dots \\ B(\boldsymbol{\pi}^2) = 1 - \alpha\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{F^2} + \dots \quad \text{とおくと} \\ 1 = 1; \frac{\boldsymbol{\pi}^4}{4F^4} - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{F^2} + 2c\frac{\boldsymbol{\pi}^4}{F^4} + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{F^2} \left( 1 + \alpha^2\frac{\boldsymbol{\pi}^4}{F^4} - 2\alpha\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{F^2} + \dots \right) \\ 0 = \left( \frac{1}{4F^4} + \frac{2c}{F^4} - \frac{2\alpha}{F^4} \right) \boldsymbol{\pi}^4 + \mathcal{O}(\boldsymbol{\pi}^6) \\ 0 = \left( \frac{1}{4} + 2c - 2\alpha \right) \frac{\boldsymbol{\pi}^4}{F^4} + \mathcal{O}(\boldsymbol{\pi}^6) \quad \text{より} \\ c = \alpha - \frac{1}{8} \end{array} \right)$$

このようにカイラル群にはいろいろな表現があるが、これらは非線形な場の再定義分の自由度を除いて等価。

ここまでクォーク質量を無視してきたが、ここからクォーク質量の寄与を取り入れることを考える。つまり、カイラル対称性を破る項を追加する。

まず、 $m_u = m_d = m_q \neq 0$  の場合を考える。このときカイラル対称性は破れるがアイソスピン回転対称性は破れない。クォーク質量項は  $(0, \sigma)$  方向を向いたベクトルと考えることができる。<sup>\*8</sup>このようにカイラル対称性を破る質量項を取り入れる方法として、以下のものがある。

まず、外部のエルミートなスカラー場  $s$  が  $-\bar{q}s q$  のようにクォーク場と相互作用している状況を考える。

$s$  がカイラル変換に対し  $s \rightarrow s' = LsR^\dagger = RsL^\dagger$  と変換するときクォーク場、反クォーク場の変換と  $s$  の変換が打ち消しあうのでラグランジアンはカイラル変換に対し不変である。

QCD を構築するには  $s = \mathcal{M}$  と固定し  $-\bar{q}s q$  の項がカイラル対称性を破るようにすればよい。

展開の最低次では微分は含まれず、 $s$  は 1 回のみ含まれる。パリティ変換の下で  $U \rightarrow U^\dagger$  と変換するので対称性の破れの項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SB}} &= \frac{F^2 B}{2} \langle sU + sU^\dagger \rangle \Big|_{s=\mathcal{M}} \\ &= F^2 B(m_u + m_d) - \frac{B}{2}(m_u + m_d)\boldsymbol{\pi}^2 + \mathcal{O}(\boldsymbol{\pi}^4) \quad : B \text{ は LEC} \end{aligned} \quad (4.21)$$

(第 1 項は定数項、第 2 項は  $\pi$  中間子の質量項。)<sup>\*9</sup>

$\pi$  中間子の質量を  $\mathcal{M}$  とするとラグランジアンから  $\mathcal{M}^2 = B(m_u + m_d)$  であり、

実験から  $\mathcal{M}_\pi^2 = B(m_u + m_d)\mathcal{O}(m_q^2)$  であることが知られている。

$$\left( \begin{array}{l} (\because) \quad (4.20) \text{ より} \\ \langle sU + sU^\dagger \rangle \Big|_{s=\mathcal{M}} = \left\langle 2s\mathbf{1}_{2 \times 2} - s\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{F^2} + \mathcal{O}(\boldsymbol{\pi}^4) \right\rangle \Big|_{s=\mathcal{M}} \\ = 2(m_u + m_d) - (m_u + m_d)\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{F^2} + \mathcal{O}(\boldsymbol{\pi}^4) \end{array} \right)$$

<sup>\*8</sup> クォーク質量項  $(-\bar{q}Mq)$  はカイラル変換の下でスカラーとして変換する。一方  $\sigma$  と  $\boldsymbol{\pi}$  の変換性は  $\sigma \propto \bar{q}q$  : スカラー,  $\boldsymbol{\pi}^a \propto i\bar{q}\gamma_5\tau^a q$  : 擬スカラーである。

<sup>\*9</sup>  $B$  はクォーク凝縮として現れる。

$$\langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{d}d | 0 \rangle = -F_\pi^2 B(1 + \mathcal{O}(\mathcal{M}))$$

さらに、いま  $\pi$  中間子の運動量が  $\pi$  中間子の質量と同程度の仮定を考えているので、 $\pi$  中間子の質量と微分を同じ次数として数える。

よって  $\pi$  中間子の質量項はカイラル展開の 2 次の項に現れるので、クォークの質量を考慮した新たなラグランジアンは

$$\mathcal{L}_\pi^{(2)} = \frac{F^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger + 2B(MU + MU^\dagger) \rangle \quad (4.22)$$

次の次数では

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\pi^{(4)} = & \frac{l_1}{4} \langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \rangle^2 + \frac{l_2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \rangle \langle \partial^\mu U \partial^\nu U^\dagger \rangle \\ & + \frac{l_3}{16} \langle 2B\mathcal{M}(U + U^\dagger) \rangle^2 + \dots - \frac{l_7}{16} \langle 2B\mathcal{M}(U - U^\dagger) \rangle^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

以上のようにしてカイラル対称性を考慮した有効ラグランジアンを構築することができた。

一方ここまで考えたのは  $\pi$  中間子のみが存在する系についてなので、実際に核子のいる系を考えるためにはさらに核子場を導入する必要がある。

## 4.2 正味の立体角計算用コード

パラメータの値は1例, ファイル名は.py

```
import numpy as np

# =====
# パラメータ (値 ± 誤差)
# =====

params = {
    "R": (404, 10),
    "theta_d": (121, 0.2),    # deg (z 軸回り)
    "W": (134, 1.0),
    "H": (23.5, 1.0),
    "u_c": (187, 1.0),
    "v_c": (0, 0.5),

    # 標的 (直方体)
    "Tx": (10, 0.5),
    "Ty": (50, 1.0),
    "Tz": (107, 1.0),
}

N_tar = 100000    # 標的 MC 点数
N_mc = 10000     # パラメータ MC 回数

# =====
# 長方形立体角 (局所座標)
# =====
def solid_angle_rect_local(xp, yp, zp, W, H, u_c, v_c):
    """
    検出器は局所座標で y'=0 平面
    長方形中心 (u_c, v_c)
    幅 W, 高さ H
    """

    a = W / 2.0
    b = H / 2.0

    Rx = u_c - xp
    Ry = -yp
    Rz = v_c - zp
```

```

omega = 0.0

for i in (-1, 1):
    for j in (-1, 1):
        X = Rx + i * a
        Z = Rz + j * b
        denom = Ry * np.sqrt(Ry**2 + X**2 + Z**2)
        omega += i * j * np.arctan2(X * Z, denom)

return abs(omega)

# =====
# 幾何計算（解析式使用）
# =====
def compute_solid_angle_fast(p):

    R      = p["R"]
    theta  = np.deg2rad(p["theta_d"])
    W      = p["W"]
    H      = p["H"]
    u_c    = p["u_c"]
    v_c    = p["v_c"]
    Tx     = p["Tx"]
    Ty     = p["Ty"]
    Tz     = p["Tz"]

    # --- 検出器局所基底 (z 軸回り回転) ---
    n      = np.array([np.cos(theta), np.sin(theta), 0.0])
    e_u    = np.array([-np.sin(theta), np.cos(theta), 0.0])
    e_v    = np.array([0.0, 0.0, 1.0])

    r0 = R * n    # 面原点

    # --- 標的一様サンプリング ---
    xs = np.random.uniform(-Tx/2, Tx/2, N_tar)
    ys = np.random.uniform(-Ty/2, Ty/2, N_tar)
    zs = np.random.uniform(-Tz/2, Tz/2, N_tar)

    omega_sum = 0.0

    for x, y, z in zip(xs, ys, zs):

        r = np.array([x, y, z])

```

```

dr = r - r0

# 局所座標へ変換
xp = np.dot(dr, e_u)
yp = np.dot(dr, n)
zp = np.dot(dr, e_v)

omega_sum += solid_angle_rect_local(
    xp, yp, zp, W, H, u_c, v_c
)

return omega_sum / N_tar

# =====
# パラメータ MC 誤差評価
# =====

results = []

for _ in range(N_mc):

    sampled = {}
    for k, (val, err) in params.items():
        sampled[k] = np.random.normal(val, err)

    Omega = compute_solid_angle_fast(sampled)
    results.append(Omega)

results = np.array(results)

# =====
# 結果整理
# =====

mean_val = np.mean(results)
std_val = np.std(results, ddof=1)

relative_error_percent = std_val / mean_val * 100.0

print("===== Result =====")
print(f"Solid angle  $\Delta \Omega$  = {mean_val:.6e} sr")
print(f"Absolute error = {std_val:.6e} sr")
print(f"Relative error = {relative_error_percent:.3f} %")

```

### 4.3 各種測定データ

#### 4.3.1 各 RUN における測定時間と LiM カウント数

表 8: 各 RUN における測定時間と LiM カウント数

		LiM のカウント数	RUN の測定時間 [h:min:s]
位置較正用			
中央	RUN05	$(6.06 \pm 0.25) \times 10^3$	0:05:00
左	RUN06	$(1.340 \pm 0.037) \times 10^3$	0:05:00
右	RUN07	$(1.002 \pm 0.032) \times 10^3$	0:05:00
炭素前方散乱			
標的あり 1	RUN09	$(3.718 \pm 0.019) \times 10^4$	3:50:00
標的あり 2	RUN10	$(7.913 \pm 0.089) \times 10^3$	1:10:00
BG	RUN11	$(1.004 \pm 0.032) \times 10^3$	0:10:00
炭素後方散乱			
BG	RUN12	$(1.425 \pm 0.038) \times 10^3$	0:10:00
標的あり 1	RUN13	$(1.627 \pm 0.013) \times 10^4$	3:21:11
標的あり 2	RUN15	$(2.297 \pm 0.015) \times 10^4$	2:19:07
$n - \alpha$ 散乱			
空気風船	RUN17	$(3.780 \pm 0.061) \times 10^3$	0:30:00
標的なし	RUN18	$(3.827 \pm 0.062) \times 10^3$	0:30:00
ヘリウム風船 1	RUN19	$(1.713 \pm 0.013) \times 10^4$	2:25:00
ヘリウム風船 2	RUN20	$(1.042 \pm 0.010) \times 10^4$	1:31:00
ヘリウム風船 3	RUN21	$(1.398 \pm 0.012) \times 10^4$	2:04:00
ヘリウム風船 4	RUN22	$(3.429 \pm 0.059) \times 10^3$	0:35:00

表 8 において LiM のカウント数における誤差は統計誤差である。また, RUN13 の LiM のカウント数は LiM が動いていた時間のカウント数の合計値である。

### 4.3.2 各 RUN における PSD のカウント数

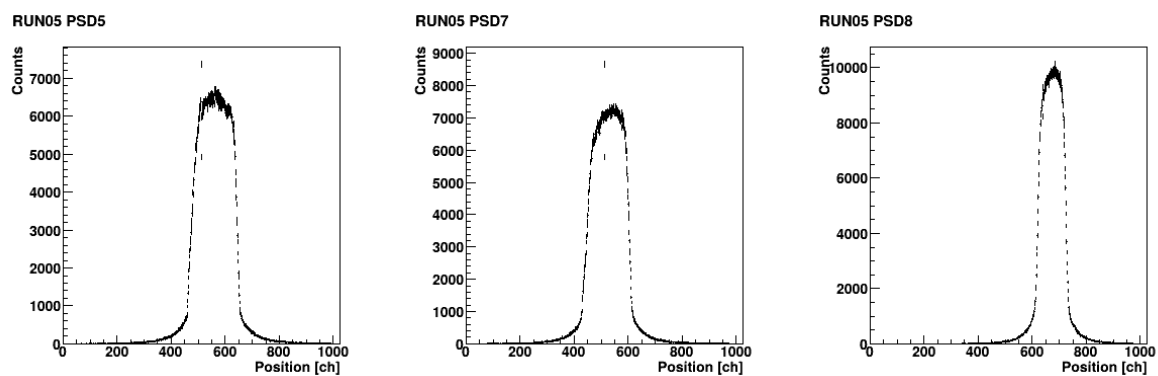


図 19: RUN05 のカウント数

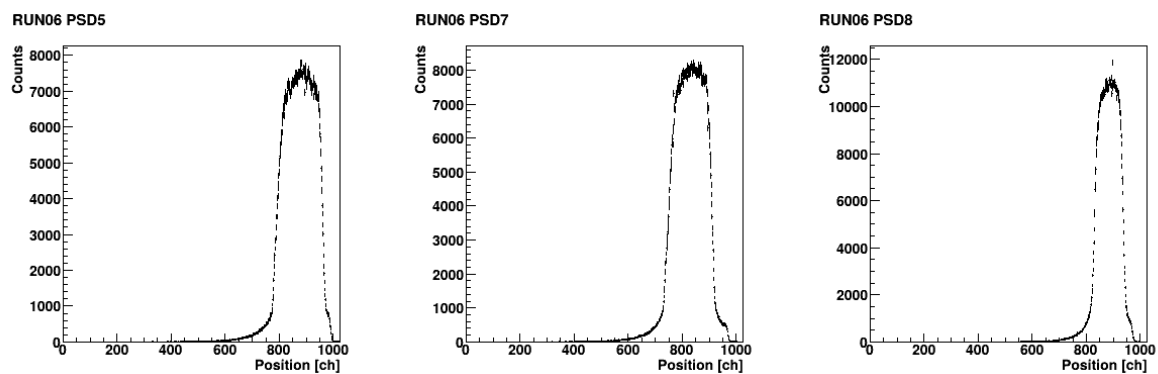


図 20: RUN06 のカウント数

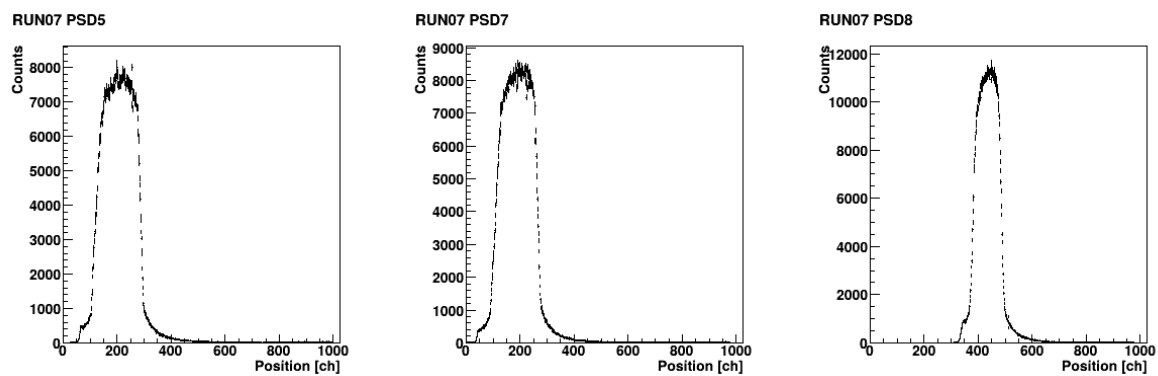


図 21: RUN07 のカウント数

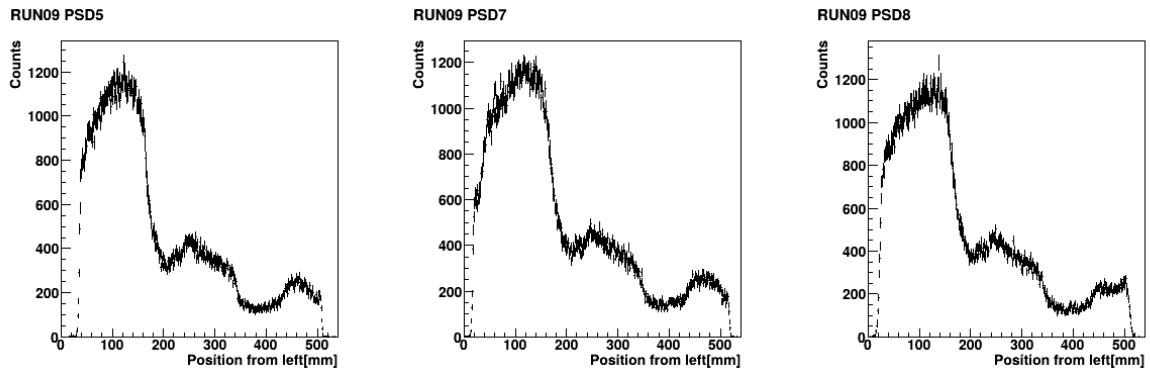


図 22: RUN9 のカウント数

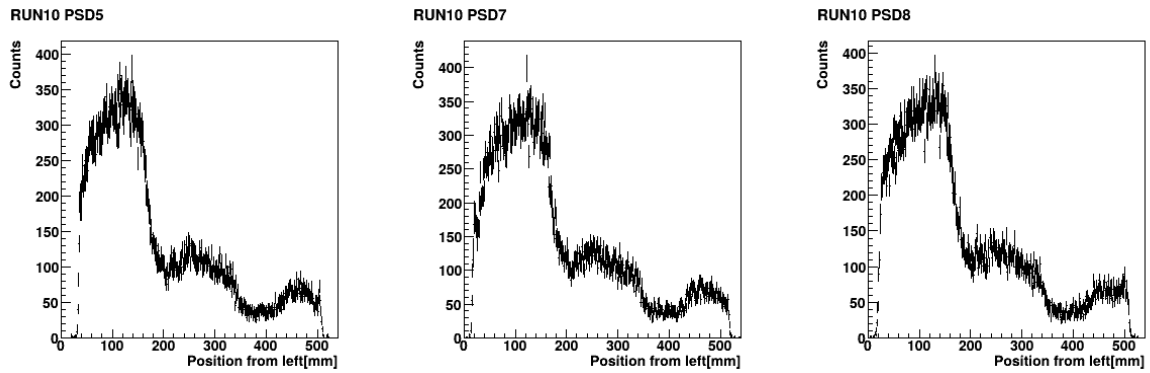


図 23: RUN10 のカウント数

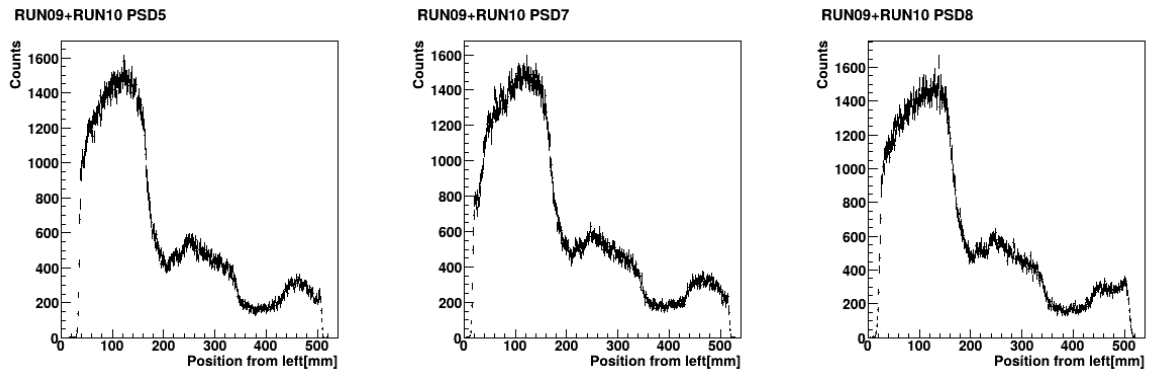


図 24: RUN9 と RUN10 のカウント数の和

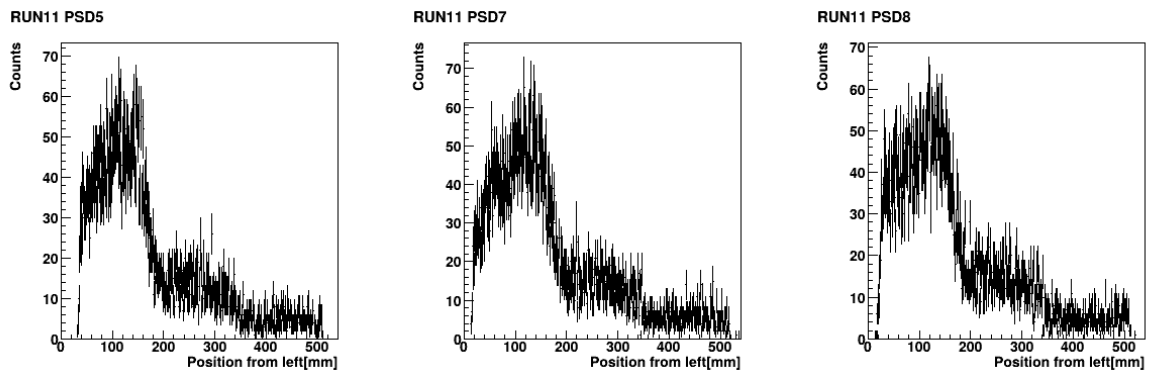


図 25: RUN11 のカウント数

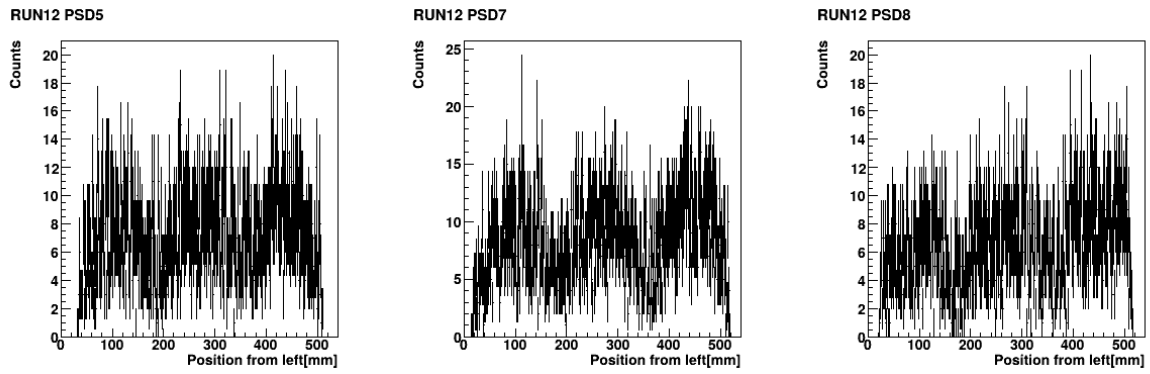


図 26: RUN12 のカウント数

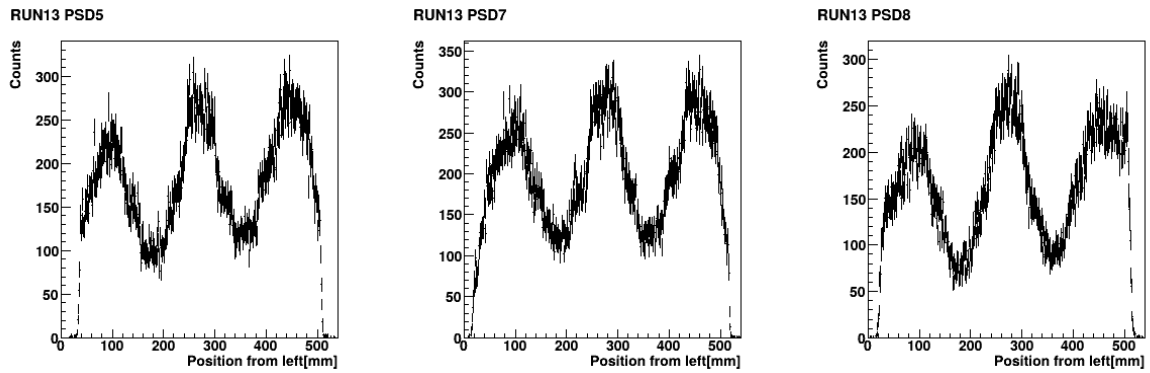


図 27: RUN13 のカウント数

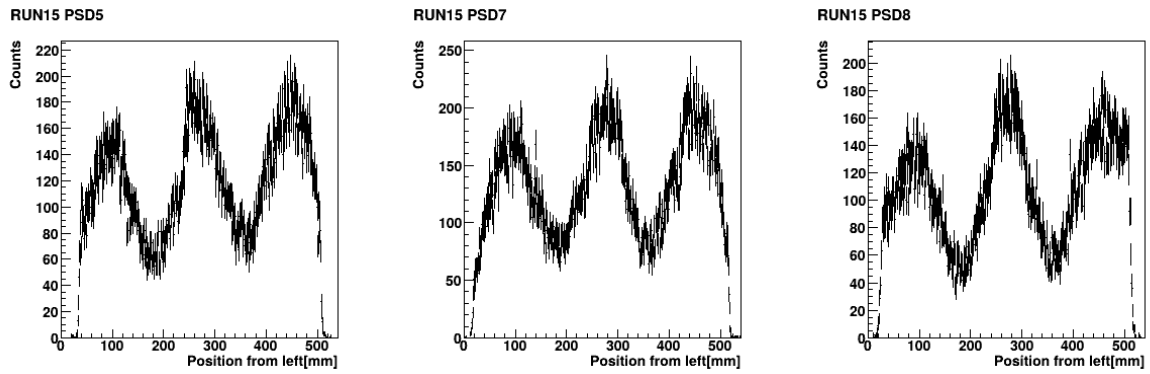


図 28: RUN15 のカウント数

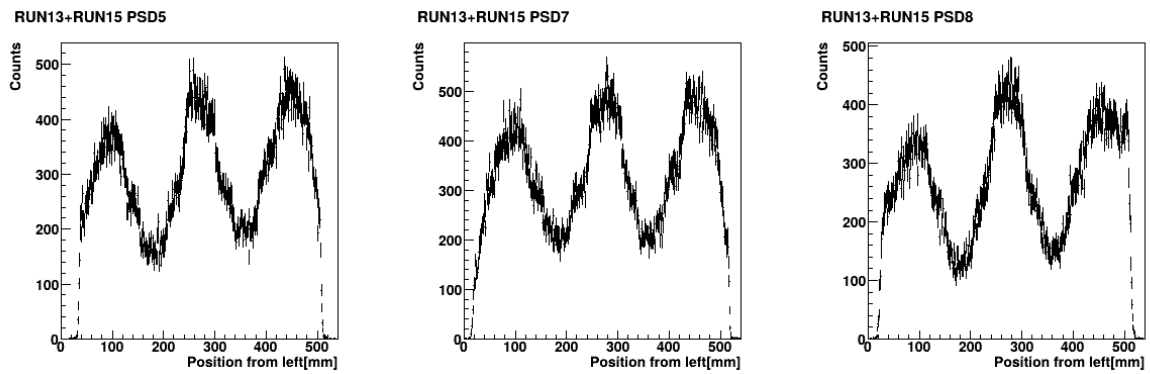


図 29: RUN13 と RUN15 のカウント数の和

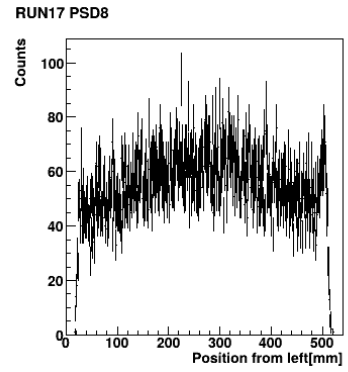
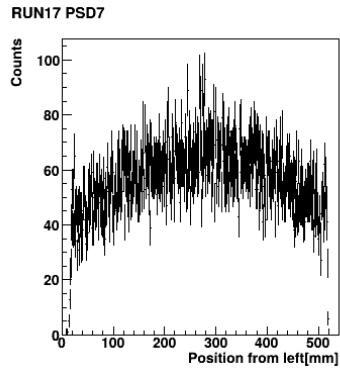
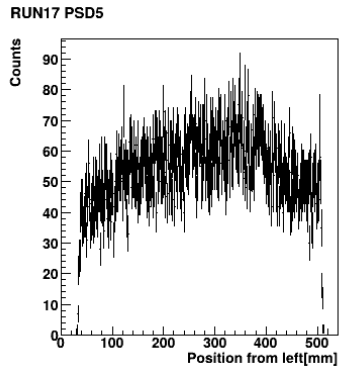


図 30: RUN17 のカウント数

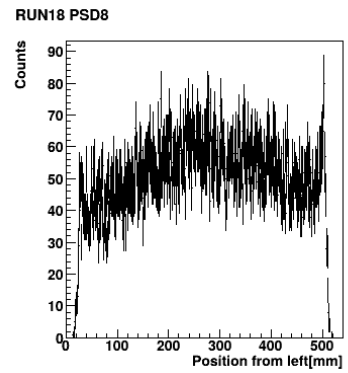
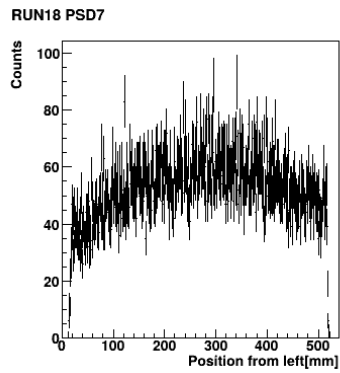
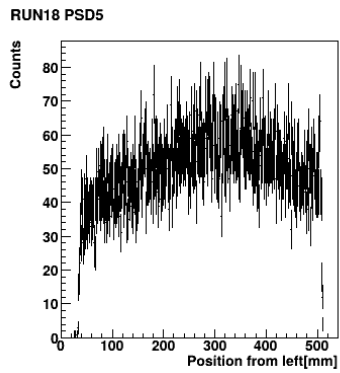


図 31: RUN18 のカウント数

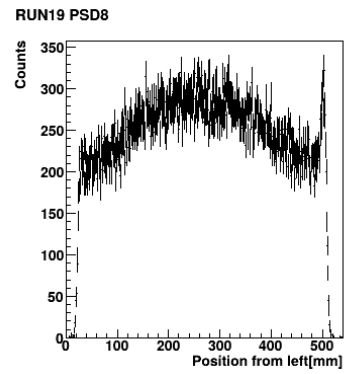
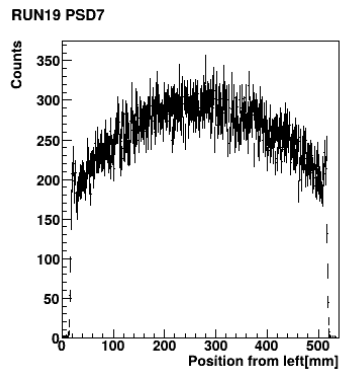
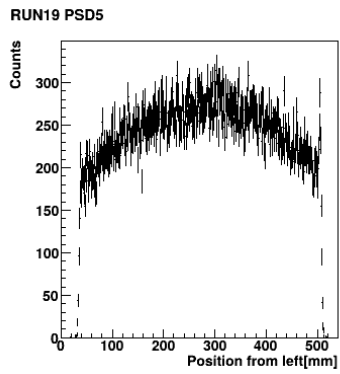


図 32: RUN19 のカウント数

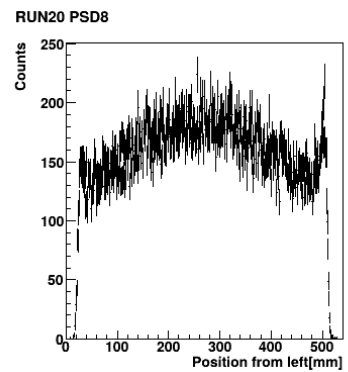
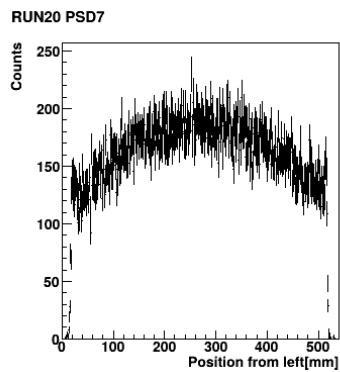
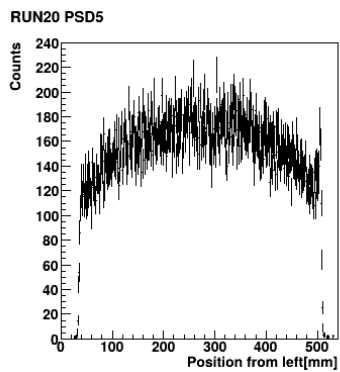


図 33: RUN20 のカウント数

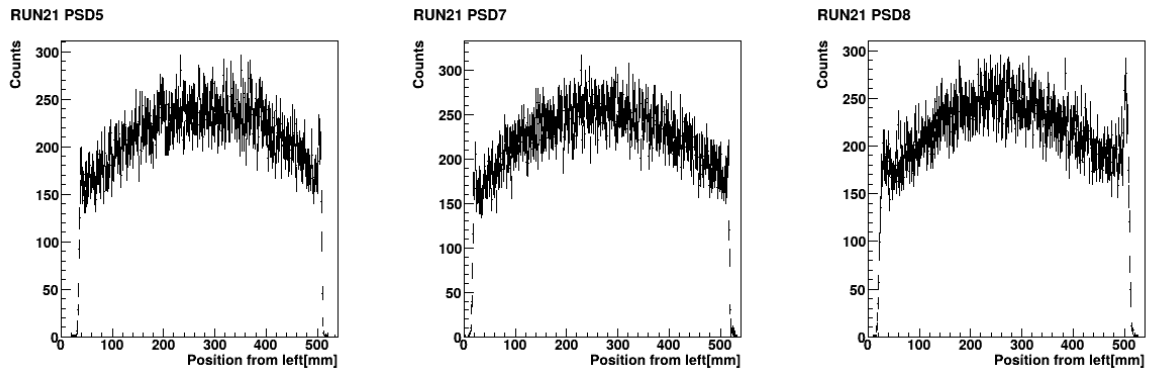


図 34: RUN21 のカウント数

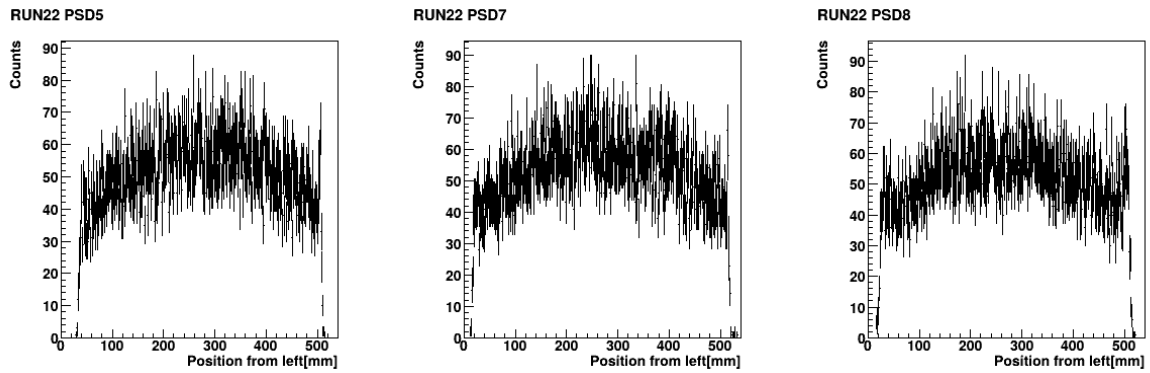


図 35: RUN22 のカウント数

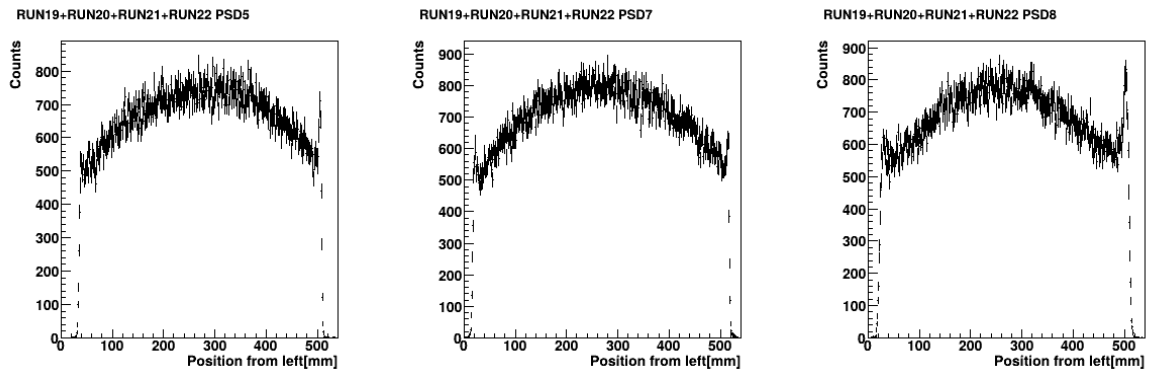


図 36: RUN19 から RUN22 までのカウント数の和

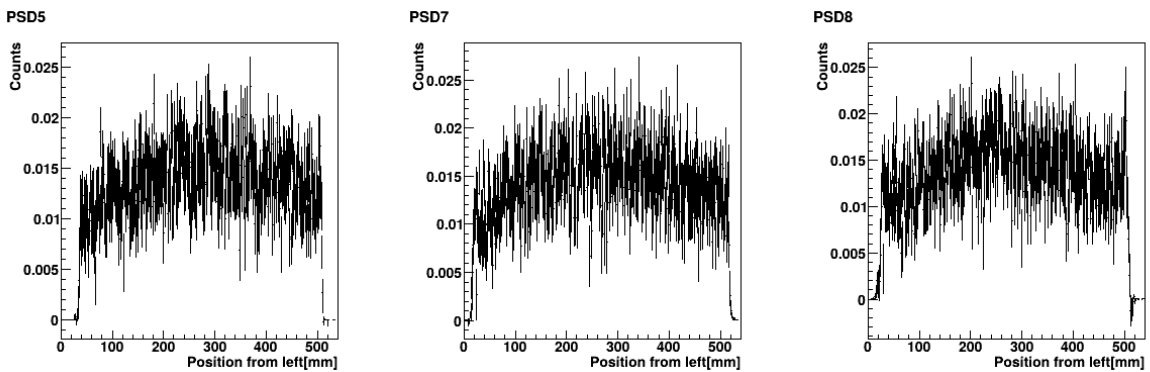


図 37:  $n - \alpha$  散乱の測定における (ヘリウム風船)-(空気風船)+(標的なし) の規格化した値

## 参考文献

- [1] Evgeny Epelbaum, Hans-Werner Hammer, and Ulf-G. Meißner. Modern theory of nuclear forces. *Reviews of Modern Physics*, 81:1773--1825, 2009. doi: 10.1103/RevModPhys.81.1773.
- [2] Yilong Yang, Evgeny Epelbaum, Jie Meng, Lu Meng, and Pengwei Zhao. Chiral symmetry and peripheral neutron- $\alpha$  scattering. *Physical Review Letters*, 135(17):172502, 2025. doi: 10.1103/PhysRevLett.135.172502.
- [3] Masakazu Toyokawa, Kosho Minomo, Michio Kohno, and Masanobu Yahiro. Roles of chiral three-nucleon forces in nucleon-nucleus scattering. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 42: 025104, 2015. doi: 10.1088/0954-3899/42/2/025104.
- [4] Kyoto University. Performance and applications of kuans, 2019. URL [https://www-nh.scphys.kyoto-u.ac.jp/Activity/kuans/20190328\\_public.pdf](https://www-nh.scphys.kyoto-u.ac.jp/Activity/kuans/20190328_public.pdf).
- [5] R. O. Lane, A. S. Jr. Langsdorf, J. E. Monahan, and A. J. Elwyn. The angular distributions of neutrons scattered from various nuclei. *Annals of Physics*, 12:135, 1961.
- [6] W. L. Rogers, D. I. Garber, and E. F. Shrader. Inelastic neutron scattering from  $^{19}\text{F}$  and  $^{181}\text{Ta}$ . *Bulletin of the American Physical Society*, 1961.
- [7] Evgeny Epelbaum. Nuclear forces from chiral effective field theory. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 67(2):343--347, 2012.