

Search for the 2_2^+ state in ^{12}C

上野優 桶谷直樹 加藤玲哉 角谷朋亮
柄沢真太郎 甲田理恵 塩田隼士 渡邊英知

平成 22 年度物理科学課題研究 P4

概要

原子核の構造を記述する模型のひとつにクラスター模型があり、古くから研究がすすめられてきた。特に、 ^{12}C の 0_2^+ 状態は α クラスター模型でうまく記述することができる。10 MeV 付近の構造は主として 0^+ 状態から成るとされ、その中には 2_2^+ 状態が存在すると理論的に計算されたが、実験的には確認されておらず、未だその存在についての議論は決着していない。そこで、今回の卒業研究では 2_2^+ 状態の探索を目的とし、 $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{12}\text{C}'3\alpha)$ 反応実験を行った。

目次

1	序論	5
1.1	クラスター構造の概観	5
1.2	^{12}C に関する研究の背景・実験動機	6
1.2.1	微視的クラスター模型の理論的研究	6
1.2.2	3α 凝縮状態の理論的研究	7
1.2.3	2_2^+ 状態の存在に関する研究	9
2	理論	12
2.1	多中心模型	12
2.1.1	多中心模型の記述	12
2.1.2	2中心 α クラスター模型	12
2.1.3	重心座標の分離	14
2.1.4	2α 系の2中心模型と8核子系の1中心模型の関係	16
2.2	パリティ射影と角運動量射影	17
2.2.1	パリティ射影	17
2.2.2	角運動量射影	18
2.2.3	パリティ・角運動量射影と J^π の関係	19
2.2.4	z 軸のまわりの回転不変性	19
2.2.5	y 軸に関する回転不変性	20
2.2.6	xy 平面に関する反転不変性	21
2.2.7	具体例と J^π に対する制限	22
2.2.8	$\alpha + ^{16}\text{O}$ 系	22
2.2.9	正3角形配置の 3α 系	22
2.3	GCM法	23
2.3.1	GCM方程式	23
2.3.2	2体クラスター系への応用	24
2.4	RGM法	25
2.4.1	RGM方程式	25
2.4.2	RGMとGCMの同等性	27
3	実験	29
3.1	Experimental Details	29
3.1.1	実験セットアップ	29
3.1.2	検出器	30
3.1.3	標的	31
3.1.4	入射エネルギー	31
3.1.5	ビームタイム推定	32

3.1.6	検出器と ADC, TDC の対応	33
3.2	モジュール	33
3.2.1	規格	33
3.2.2	モジュール	33
3.3	回路の流れ	39
3.4	検出器のスリットと角度の対応	41
4	Simulation	43
4.1	目的	43
4.2	概略	43
4.2.1	アルゴリズム	43
4.3	結果	45
5	解析	48
5.1	解析手順	48
5.2	解析結果	49
5.3	考察	50

1 序論

1.1 クラスタ構造の概観

原子核は陽子・中性子から成る有限量子多体系であり、その複雑な構造を理解するために、原子核においては殻模型や液滴模型が有効である。殻模型とは、魔法数などの原子核の持つ様々な性質はある仮定された1つの平均ポテンシャルの中の多数の核子の状態によって決定されるという考え方に基づいたモデルである。したがって、殻模型は原子核の原子的描像であると言える。一方、原子核はほぼ一定の密度の液滴状の多核子系であるとも考えることもでき、この考えに基づいたモデルを液滴模型という。

また、原子核にわずかなエネルギーを加えると、核子ひとつひとつに分かれずに、いくつかのかたまりに分割されるという事実から、原子核は核子のクラスターによって構成されることができると考えられる。このような原子核の分子的描像に基づいて、原子核はいくつかのクラスターから成ると考え、そのクラスターの振る舞いを取り扱う模型をクラスター模型という。このような分子的描像は、各々のクラスター内の核子間の結合が比較的強く、クラスター間の結合が比較的弱い場合に初めて意味を持つ。言い換えると、「内部相関が強く、外部相関が弱い」ということができる [?].

殻模型では説明できず、クラスター模型を用いることでうまく説明できる現象も存在する。典型例としては、 ${}^8\text{Be}$ の α - α の準束縛状態である 0^+ , 2^+ , 4^+ 状態のスペクトルを α - α の相対運動によって説明できることや、 ${}^{12}\text{C}$ の 3^- 状態が 3α の三角形構造であると考えるとうまく説明できることなどが知られている。

このようなクラスター構造を示す状態は、その系がそれらのクラスターに分解するエネルギーのしきい値の近傍にあるときに現れると考えられ、このことは実験的にも確かめられている。この法則をしきい値則といい、この法則は「内部相関が強く、外部相関が弱い」という分子的描像と完全に一致する。特に、軽い自己共役 $4n$ 核 ($Z = N = 2n$: $(2p+2n)$ を単位にして、その整数倍の核子によって構成される原子核) では α クラスタが基本単位である。図1の Ikeda diagram に示すように、しきい値則に基づいて、これらの核の励起状態のクラスター構造を整理することも可能である。例えば、 $n = 3$ の ${}^{12}\text{C}$ が3個の α 粒子にばらばらに分

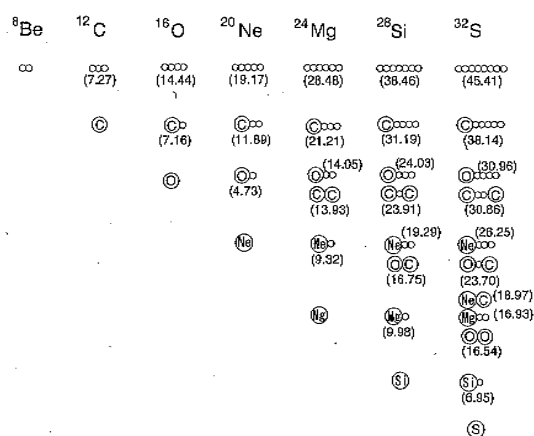


図1 Ikeda diagram. 括弧内の数字 (単位 MeV) はしきい値の実験値。対角線上に配置されている ${}^8\text{Be}$ 以外の安定核の基底状態は、殻模型の状態 (すなわち原子的描像) であると考えられる。すなわち、安定な基底状態では殻模型的描像が成り立つ原子核においても、エネルギーが高くなるにつれて種々のクラスター構造へ質的变化を生じると考えられる。参考文献 [?] より引用。

解するしきい値は 7.27 MeV であり、励起エネルギーがこの値に近くなると、 ^{12}C においては 3 個の α クラスタから構成されるクラスタ構造が顕著になる。実際、この励起エネルギー近傍で観測されている励起状態は発達したクラスタ構造を持つことが知られている。

クラスタ構造を具体的に記述する方法に関しても研究が進められており、様々な微視的クラスタモデルが考えられてきた。多中心模型 (または Brink 模型) はそれらの模型の原型となる模型である。これに基づき、GCM(generator-coordinate method), RGM(resonating group method), OCM(orthogonality condition model) などによってクラスタモデルの記述が行われている。これらの詳細は 2 章で述べる。

1.2 ^{12}C に関する研究の背景・実験動機

α クラスタ構造の励起状態を持つ原子核の中でも、 ^{12}C に関する研究は今まで多くの研究が行われてきた。ここではそれらの研究の概要を説明し、本実験の実験動機を述べる。

1.2.1 微視的クラスタモデルの理論的研究

^{12}C の 3α クラスタ構造は、1980 年前後に GCM や RGM を用いて精力的に理論的研究が行われた。

E.Uegaki らは、 ^{12}C の各状態の構造を微視的 3α 粒子模型を用いて研究した [?]。Pauli 原理を考慮して 3α クラスタの重心運動を GCM によって解き、15MeV 以下の $T = 0$ のほぼ全ての準位を理論的によく再現した。図 2 に、Uegaki らの計算による準位構造と実験によって調べられている準位構造を比較する。図 2 から、理論的に予測された各状態は、実験的に知られている状態とよく対応していることがわかる。 2_2^+ 状態は、 0_3^+ 状態が主成分とされるエネルギー幅の広い構造の中に存在すると考えられており、図 2 においてもそのように対応させているが、実験による存在の確認は未だなされていない。

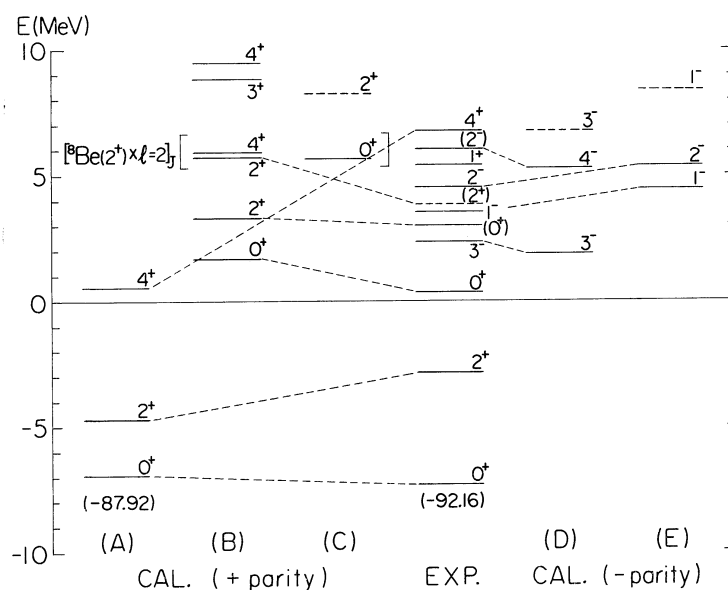


図 2 ^{12}C の準位構造の理論値と実験値の比較。 3α しきい値エネルギーの理論値と実験値を等しいものとして、縦軸の零点としてある。(A), (B) はそれぞれ 0_1^+ 状態, 0_2^+ 状態をバンドヘッドとする回転バンド。EXP. が実験値であり、点線によってそれぞれの準位の理論値との対応を示す。参考文献 [?] より引用。

また、M.Kamimura らは 3α クラスター間の相対運動を RGM によって解き、得られた波動関数を用いて、 $T = 0$ 状態間の全ての遷移密度を計算した [?]. この計算によって、 0_2^+ 状態は空間的に発達した 3α クラスター構造を持つことが示された. 図 3 は、 0^+ 状態と 2^+ 状態に関連する遷移密度を示したものである. 図 3(b) によると、 $2_2^+ - 0_2^+$ 遷移密度は $2_1^+ - 0_1^+$ 遷移密度よりも表面付近において明らかに大きい. 遷移密度 $\rho(\mathbf{r})$ と遷移密度 $B(E\lambda)$ の関係は、

$$B(E\lambda) = \left| \sum_M \int r^\lambda Y_{\lambda M}(\hat{\mathbf{r}}) \rho^\lambda(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2, \quad (\lambda \geq 2) \quad (1.1)$$

で与えられる. ここで、遷移密度 $\rho(\mathbf{r})$ の定義は参考文献 [?] 中の (3) 式で与えられている. (1.1) 式は核半径 r の λ 乗の項を含むので、表面付近で ρ^λ の振幅が大きい $0_2^+ \rightarrow 2_2^+$ 遷移の遷移密度は基底状態 $(0_1^+) \rightarrow 2_1^+$ 遷移に比べて大きくなる. 結果として $0_2^+ \rightarrow 2_2^+$ 遷移での遷移密度は基底状態 $(0_1^+) \rightarrow 2_1^+$ 遷移の約 25 倍も大きいことが得られる. このことから、 0_2^+ 状態と 2_2^+ 状態は、基底状態の回転バンドと同様に回転バンドを形成していると考えられ、 2_2^+ 状態が 0_2^+ 状態と同様に空間的に発達した 3α クラスター構造を持つことが示唆される.

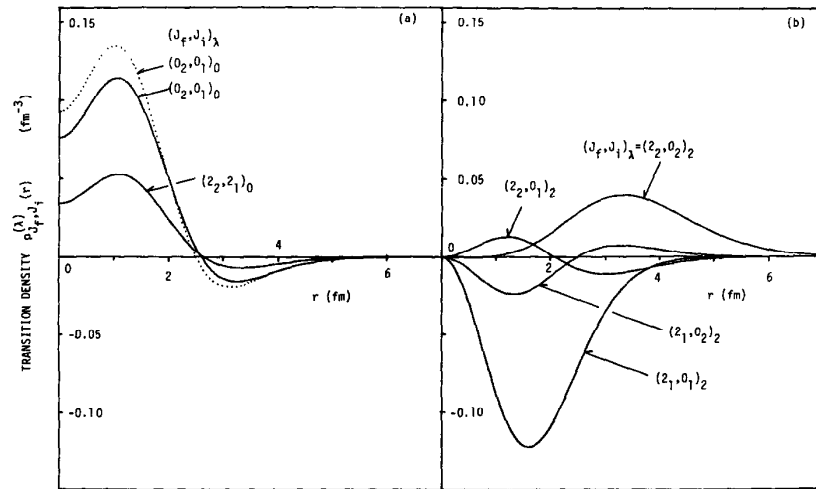


図 3 0^+ 状態と 2^+ 状態に関する遷移密度. (a) は $\Delta J=0$ の遷移. (b) は $\Delta J=2$ の遷移. 参考文献 [?] より引用.

1.2.2 3α 凝縮状態の理論的研究

近年では、 ^{12}C の α クラスター構造の発展的な研究が行われている. なかでも A.Tohsaki らは、 0_2^+ 状態が 3α 凝縮状態という 3α クラスターの希薄ガス構造を持つと主張している [?]. 3α 凝縮状態とは、3つの α クラスターが最も低いエネルギーの S 軌道に凝縮した状態のことであり、これは Bose 粒子が起こす Bose-Einstein 凝縮の構造と非常によく似ているとされる. 以下では、A.Tohsaki らによって提案された具体的な理論を説明する.

まず、 n 個の α クラスターが凝縮している状態を表す典型的な波動関数

$$|\Phi_{n\alpha}\rangle = (C_\alpha^\dagger)^n |\text{vac}\rangle \quad (1.2)$$

を考える. 振動子長 b の調和振動子型ポテンシャル中の $0s$ 軌道を 4つの核子が占有するものを α クラスターとみなし、その α クラスターの重心は \mathbf{R} に存在するを考える. また、 α クラスターの存在確率は大きさ R_0

の gauss 型に分布するとする. これらのことを考慮すると, α 粒子の生成演算子 C_α^\dagger は,

$$C_\alpha^\dagger = \int d^3R e^{-\mathbf{R}^2/R_0^2} \int d^3r_1 \cdots d^3r_4 \varphi_{0s}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}) a_{\sigma_1\tau_1}^\dagger(\mathbf{r}_1) \cdots \varphi_{0s}(\mathbf{r}_4 - \mathbf{R}) a_{\sigma_4\tau_4}^\dagger(\mathbf{r}_4) \quad (1.3)$$

で与えられる. ここで $\varphi_{0s}(\mathbf{r}) = (1/(\pi b^2))^{3/4} e^{-\mathbf{r}^2/(2b^2)}$ は振動子長 b の $0s$ 軌道に存在する核子の波動関数であり, その存在確率は gauss 型に分布する. $a_{\sigma\tau}^\dagger(\mathbf{r})$ は位置 \mathbf{r} でスピンとアイソスピンがそれぞれ σ, τ の核子の生成演算子である. このような α クラスタが n 個あるとすると, 原子核全体の波動関数は

$$\langle \mathbf{r}_1\sigma_1\tau_1, \dots, \mathbf{r}_{4n}\sigma_{4n}\tau_{4n} | \Phi_{n\alpha} \rangle \propto \mathcal{A} \{ e^{-\frac{2}{B^2}(\mathbf{X}_1^2 + \dots + \mathbf{X}_n^2)} \phi(\alpha_1) \cdots \phi(\alpha_n) \} \quad (1.4)$$

で与えられる. ここで $B = (b^2 + 2R_0^2)$ であり, $\mathbf{X}_i = (1/4) \sum_n \mathbf{r}_{in}$ は i 番目の α クラスタ α_i の重心座標である. $\phi(\alpha_i)$ は α クラスタ α_i の内部波動関数であり, $\phi(\alpha_i) \propto \exp[-(1/8b^2) \sum_{m>n}^4 (\mathbf{r}_{im} - \mathbf{r}_{in})^2]$ で与えられる. 核子は Fermi 粒子なので, 反対称化演算子 \mathcal{A} が作用させてある.

(1.3) 式の定義から, α クラスタはその重心 \mathbf{R} を中心とする $0s$ 軌道に入っている. 従って, (1.2), (1.4) 式の波動関数は $n\alpha$ クラスタが同一の $0s$ 軌道 $\exp[-\frac{2}{B^2} \mathbf{X}]$ に存在することを表現している.

B は b と R_0 の関数であるので, b と R_0 の値によって波動関数の構造が変化する. b は α クラスタ内部の核子の波動関数の広がりを与える. すなわち, b は α クラスタの大きさを与えるパラメータである. また, R_0 は α クラスタの中心の分布の大きさを与えるパラメータである. 具体例を図 4 に示す. $b \sim R_0$ の場合, α 粒子がひとかたまりになり, 全ての核子がひとつのポテンシャルが存在する殻模型の状態を表し, ここから b を小さく, R_0 を大きくすることは, α 粒子が希薄に分布した低密度な α クラスタ構造へと移行していくことを意味する. このように, (1.2), (1.4) 式の波動関数は b, R_0 の値に応じて, ひとつの式で殻模型とクラスタ模型の両方を記述することができる. 従って, 波動関数を b と R_0 の関数として扱えば, これらのパラメータを変化させることで 0^+ 状態の構造を調べることができる.

この波動関数を用いて計算した, $n=3$ の系におけるエネルギー $E_{n\alpha}(R_0, b) = \langle \Phi_{n\alpha}^N(R_0, b) | \hat{H} | \Phi_{n\alpha}^N(R_0, b) \rangle$ の等高線図を図 5 に示す. ここで, $|\Phi_{n\alpha}^N\rangle = |\Phi_{n\alpha}\rangle / \sqrt{\langle \Phi_{n\alpha} | \Phi_{n\alpha} \rangle}$ である. 図 5 より, 極小点は ($R_0 \approx 2.0$ fm, $b \approx b_\alpha = 1.44$ fm) である. また, エネルギーの谷は $b_\alpha = 1.44$ fm にあり, R_0 軸と平行であるので, 0_1^+ や 0_2^+ 状態などのエネルギー固有状態は $b_\alpha = 1.44$ fm 上に存在すると考えられる. この値は自由 α 粒子の

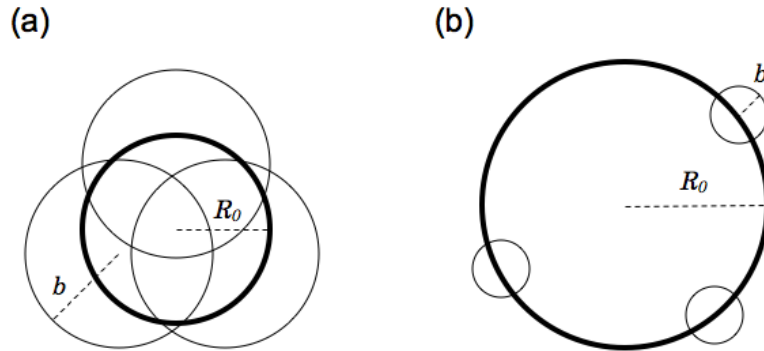


図 4 パラメータ b, R_0 の変化による ^{12}C 核内構造の変化のイメージ. 細線が α クラスタの軌道の大きさ b , 太線が α クラスタの分布の広がり R_0 を表す. (a) は $b \sim R_0$ の場合, (b) は $b \ll R_0$ の場合.

大きさとほぼ同じであり、 α クラスター構造が安定であることを示唆している。以下では、 $b = b_\alpha = 1.44$ fm と固定して考える。

エネルギー固有状態を探すために、波動関数 $|\Phi_{n\alpha}^N(R_0)_j, b_\alpha\rangle$ の R_0 を 0.5 fm ずつ変化させたものを重み $f_k((R_0)_j, b_\alpha)$ で重ね合わせた k 番目のエネルギー固有関数を

$$|\Psi_{n\alpha,k}\rangle = \sum_j f_k((R_0)_j, b_\alpha) |\Phi_{n\alpha}^N((R_0)_j, b_\alpha)\rangle \quad (1.5)$$

とおく。これを用いて、重なり振幅

$$A_{n\alpha,k}(R_0, b_\alpha) = \langle \Phi_{n\alpha}^N(R_0, b_\alpha) | \Psi_{n\alpha,k} \rangle \quad (1.6)$$

を計算することで、各 k について、固有関数 $|\Psi_{n\alpha,k}\rangle$ が、パラメータ R_0 に対応する様々な波動関数のうちの波動関数が主成分であるかを見積もることができる。

結果として、(1.5) 式から求めた 0_1^+ 状態のエネルギーは -85.9 MeV であることが得られた。この値は、図 5 の最低エネルギー -85.5 MeV とほぼ等しい。このことから、最低エネルギー点の波動関数はほぼ $\Phi_{3\alpha}^N(R_0 \approx 2.0 \text{ fm}, b_\alpha)$ と等しいといえる。また、 0_2^+ 状態について、(1.6) 式を計算すると、 $\Phi_{3\alpha}^N(R_0 \approx 4.5 \text{ fm}, b_\alpha)$ が 87% を占めることがわかった。この $R_0 = 4.5$ fm という値は $b_\alpha = 1.44$ fm に比べると非常に大きい。すなわち、 0_2^+ 状態は α 粒子の重なり的小さい、低密度な希薄ガス状態であると考えられる。このことは、 α 粒子の運動量分布がとても狭いことを意味し、全ての α 粒子の重心運動量が最も低いエネルギー状態を占有している α 凝縮状態にあると言える。 α 凝縮状態の存在は、通常の原子核が液滴と形容されることと対比すると、大変興味深く、原子核系とみなせる恒星でも起こる可能性があると言及されるなど、原子核分野において注目に値する研究である。

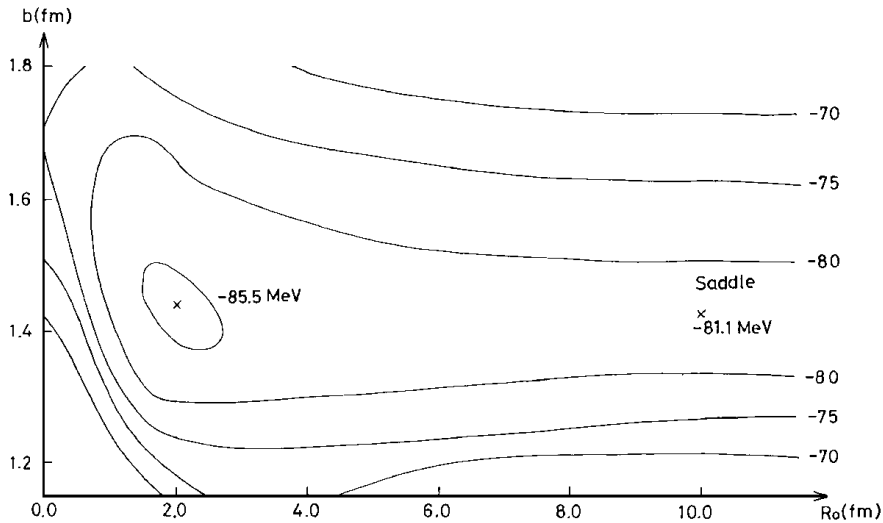


図5 $n = 3$ の系におけるエネルギー $E_{3\alpha}(R_0, b)$ の等高線図。線付近の数字は結合エネルギー。参考文献 [?] より引用。

1.2.3 2_2^+ 状態の存在に関する研究

このように、 ^{12}C の構造は α クラスター模型によって精力的に研究されてきたが、Uegaki らが予言した 2_2^+ 状態の存在は現在に至っても確立されておらず、その存在を実験的に確認することは、クラスター模型の正

当性を検証する上で非常に重要である。この 2_2^+ 状態を巡っては、近年に到るまで多くの探索実験が行われてきた。

クラスター模型の予言する 2_2^+ 状態の存在を確かめるために、M.Itoh らは (α, α') 反応の実験を行い、 $E_x=10.3$ MeV 近傍の状態を調べた [?]。まず、図 6 に $\theta_{c.m.} = 0.9^\circ$ および 5.1° における (α, α') 反応の励起エネルギースペクトルを示す。図 6 によると、 3_1^- 状態は鋭いピークとして観測されており、 3_1^- 状態の下に分布する幅の広い状態は、主に 0^+ 状態からなる。また、10.84 MeV 付近には 1^- 状態の成分が存在することが以前の実験から知られている。

M.Itoh らは、励起状態のスピンの応じて (α, α') 反応の微分断面積の角度分布が異なることを利用して、10 MeV 付近の幅の広い構造の中に、 2^+ 状態の成分が存在するかどうか調べた。図 7 は、その測定結果である。図 7 では、 $\Delta E_x=0.5$ MeV ごとに測定された微分断面積に対して、計算による 0^+ 、 1^- 、 2^+ 、 3^- 状態の微分断面積を用いてそれぞれ fit し、幅の広い構造に含まれる成分を分離した。その結果、(c) $E_x = 10.0-10.5$ MeV の領域に、破線で示される 2^+ 状態が有意に存在することが示された。

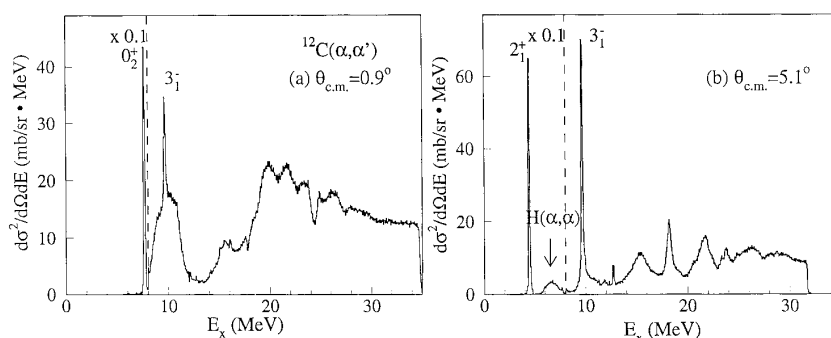


図 6 (α, α') 反応のエネルギースペクトル。(a) は $\theta_{c.m.} = 0.9^\circ$ 、(b) は $\theta_{c.m.} = 5.1^\circ$ 。参考文献 [?] より引用。

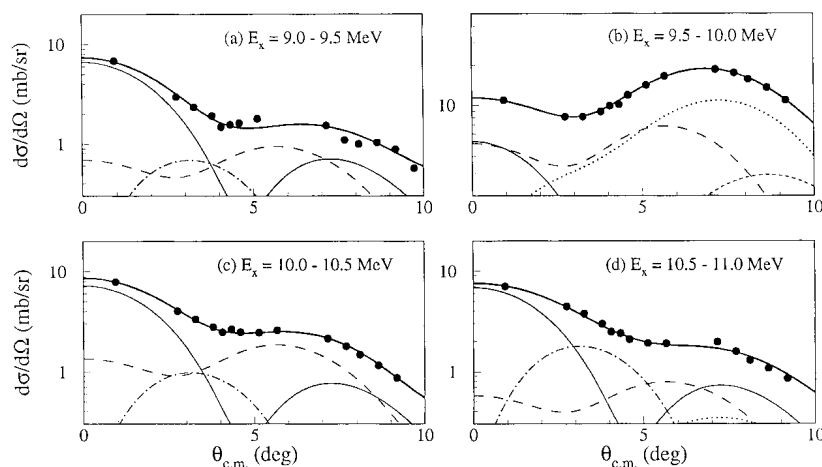


図 7 $E_x=9.0-11.0$ MeV での (α, α') 反応の微分断面積。(a), (b), (c), (d) はそれぞれ $\Delta E_x=0.5$ MeV ごとに和をとっている。細い実線は 0^+ 成分、破線は 2^+ 成分、点線は 3^- 成分、一点破線は 1^- 成分、太い実線は全成分の和。参考文献 [?] より引用。

一方, O.U.Fynbo らは ^{12}N , ^{12}B の β 崩壊を用いて ^{12}C の励起状態を生成した上で, これらの状態のスピン・パリティを精査した [?]. 図 8 に, 観測された ^{12}C の励起エネルギースペクトルを示す. 赤線で示される ^{12}N 崩壊のスペクトルによると, 明らかに, 10 MeV 付近の幅広い状態とは別の, 14 MeV 付近の状態の存在が考えられる. 図 8a の一点破線は, 今までの実験によるデータを fit したものであるが, 明らかに 11-14 MeV 付近に対する測定結果を再現していない. 一方, 10 MeV 付近の幅広い状態に対して 0^+ 状態, 14 MeV 付近の状態に 2^+ 状態を仮定し, 7.65 MeV の 0^+ 状態を含めて解析すると, 図 8b の実線に示すように, 実験データをよく fit できる. すなわち, Fynbo らは, 10 MeV 付近の幅広い構造は主として 0^+ 状態から成るとし, Itoh らなどが主張するように, その内部に 2^+ 状態の存在は認められないと結論づけた.

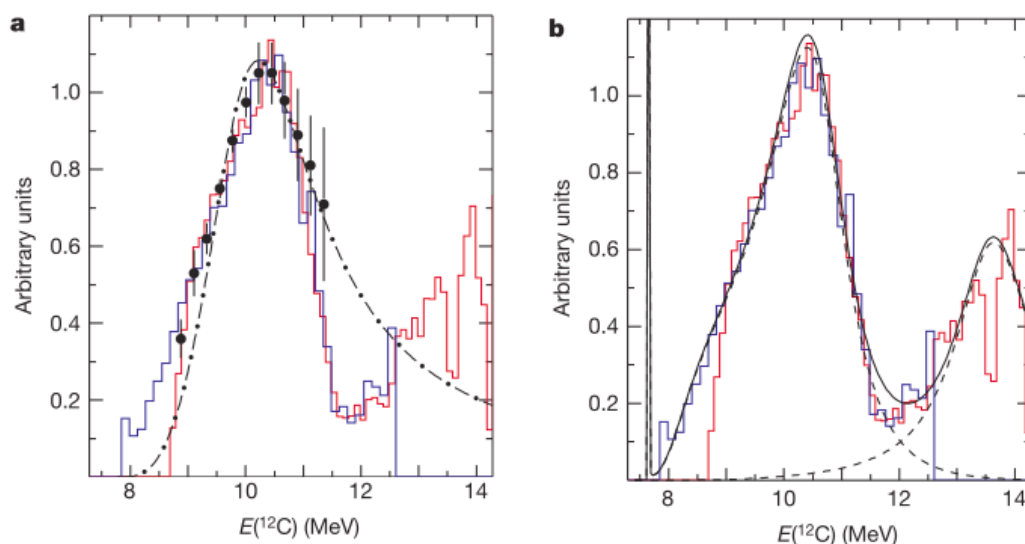


図 8 ^{12}C の励起エネルギースペクトル. 赤線が ^{12}N の崩壊, 青線が ^{12}B 崩壊から得たスペクトル. **a** は Fynbo らの実験と以前の実験 (黒点) のスペクトルの比較. 一点破線は 10 MeV 付近の状態の文献値の fitting 曲線. **b** は実験値に対する Fynbo らの fit. 点線は各成分ごとの fitting 曲線, 実線はそれらの和. 参考文献 [?] より引用.

このように, ^{12}C の $2^+_{2/2}$ 状態に関する議論は未だ決着していない. そこで, 我々は $2^+_{2/2}$ 状態を探索することを目的として, $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, ^{12}\text{C}'3\alpha)$ 反応の微分断面積の測定実験を行う. 2 章では, α クラスタモデルの理論を述べる. ?? 章では, 入射エネルギーや検出器の設置角度の決定, エネルギー分解能の見積もり, 回路図などの, 実験の原理や方法を述べる. 4 章ではシミュレーションによってイベント数の見積もりを行い, 検出器の設置距離を決定する. ?? 章で実験データの解析を行い, ?? 章で解析に基づいた考察を述べる.

2 理論

2.1 多中心模型

前述の通り、クラスター模型とは強い内部相関を持ったサブ・ユニットによる分子的描像である。そこで本章では、微視的クラスター模型の最も基礎的な多中心模型について説明する。はじめに多中心模型波動関数の表現について説明し、具体例として2中心クラスター模型波動関数の性質について言及する。なお、この章は参考文献 [?] に基づいて書かれている。

2.1.1 多中心模型の記述

微視的クラスター模型とは、いくつかのクラスターから構成されるクラスター構造状態を、個々の核子の運動の自由度に基づいて記述するものである。特に多中心模型では、各クラスターが異なる中心位置にあり、各々のクラスターに属する核子の状態は、その中心位置を原点とする調和振動子ポテンシャルに従う殻模型で記述されるものとする。以下では系が n 個のクラスターで構成されるものとする。

n 個のクラスターの状態は (C_1, C_2, \dots, C_n) で表されるものとする。ここで各 C_i はクラスターの状態を示しており、例えば $C_1 : \alpha, C_2 : {}^8\text{Be}, \dots$ といった具合である。また、これらのクラスターの中心位置を $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n)$ で表す。今、クラスター間の相互作用は無視しているので、各クラスターの波動関数は

$$\psi(C_1, \mathbf{R}_1), \psi(C_2, \mathbf{R}_2), \dots, \psi(C_n, \mathbf{R}_n) \quad (2.1)$$

といったように表されるだろう。ここで、各クラスターのポテンシャルは全て同じ振動子パラメータで記述されているものとした。

ところで、核子はフェルミオンであり、フェルミオンからなる多体系は2核子の交換に関して反対称化されていなくてはならない。よって、多中心模型波動関数は核子の交換に関する反対称化演算子を用いて次のように表される：

$$\Psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n) = \mathcal{N}_0 \mathcal{A}[\psi(C_1, \mathbf{R}_1) \psi(C_2, \mathbf{R}_2) \dots \psi(C_n, \mathbf{R}_n)]. \quad (2.2)$$

\mathcal{N}_0 は規格化定数。また、反対称化によってクラスター状態の自由度 (C_1, C_2, \dots, C_n) は失われたことに注意。

今までは核子の中心位置をパラメータとして取り扱ってきたが、これらを中心座標に関する重心座標と相対座標に分離して考えることもできる。各クラスターの核子数を (A_1, A_2, \dots, A_n) とすると、全体の重心の位置ベクトルは

$$\mathbf{R}_G = \frac{A_1 \mathbf{R}_1 + A_2 \mathbf{R}_2 + \dots + A_n \mathbf{R}_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} \quad (2.3)$$

で表され、相対位置ベクトルは

$$\mathbf{R}_{1,2} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{R}_{12,3} = \frac{A_1 \mathbf{R}_1 + A_2 \mathbf{R}_2}{A_1 + A_2} - \mathbf{R}_3, \dots \quad (2.4)$$

といった様に(一般的に)表すことができる。この記法は、多中心の位置を生成座標とする生成座標法(後述)でクラスター間の相対運動を取り扱うために Brink によって導入されたもので、Brink 模型と呼ばれる。

2.1.2 2中心 α クラスター模型

最も簡単な2中心クラスター模型として、 ${}^8\text{Be}$ のクラスター構造について考える。(2.2)式より、 ${}^8\text{Be}$ のクラスター波動関数は

$$\Psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \mathcal{N}_0 \mathcal{A}[\psi(\alpha_1, \mathbf{R}_1) \psi(\alpha_2, \mathbf{R}_2)] \quad (2.5)$$

で表される。 α クラスタ波動関数を記述するために、1 核子波動関数を求める。1 核子波動関数を

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \tau, \sigma) = \phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R})\eta(\tau, \sigma) \quad (2.6)$$

とする。ここで \mathbf{r} は核子の位置ベクトルで、 $\eta(\tau, \sigma)$ は核子のアイソスピン・スピンを記述する波動関数であり、 τ, σ はそれぞれ核子のアイソスピン、スピンを表す変数である。

空間部分の波動関数について、前述の通り $\phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ は調和振動子波動関数であり、さらに α クラスタを形成しているため、この波動関数は基底状態 ($0s$ 軌道) を表している。よって $\phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ は

$$\phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \prod_{k=1,2,3} \left[\left(\frac{2\nu}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\nu(x_k - R_{ik})^2} \right] \quad (2.7)$$

となる。(M を核子の質量として $\mu = M\omega/(2\hbar)$ とした。)

以上より、 α クラスタ波動関数は Slater 行列式によって、次のように書くことが出来る：

$$\psi(\alpha_i, \mathbf{R}_i) = \frac{1}{\sqrt{4!}} \begin{vmatrix} \phi_0(i_1)(n \uparrow)_{i_1} & \phi_0(i_1)(n \downarrow)_{i_1} & \phi_0(i_1)(p \uparrow)_{i_1} & \phi_0(i_1)(p \downarrow)_{i_1} \\ \phi_0(i_2)(n \uparrow)_{i_2} & \phi_0(i_2)(n \downarrow)_{i_2} & \phi_0(i_2)(p \uparrow)_{i_2} & \phi_0(i_2)(p \downarrow)_{i_2} \\ \phi_0(i_3)(n \uparrow)_{i_3} & \phi_0(i_3)(n \downarrow)_{i_3} & \phi_0(i_3)(p \uparrow)_{i_3} & \phi_0(i_3)(p \downarrow)_{i_3} \\ \phi_0(i_4)(n \uparrow)_{i_4} & \phi_0(i_4)(n \downarrow)_{i_4} & \phi_0(i_4)(p \uparrow)_{i_4} & \phi_0(i_4)(p \downarrow)_{i_4} \end{vmatrix}, \quad (i = 1, 2). \quad (2.8)$$

ここで $\phi_0(i_1) = \phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ であり、 $(n \uparrow)_{i_1}, (n \downarrow)_{i_1}, (p \uparrow)_{i_1}, (p \downarrow)_{i_1}$ は $\eta(\tau, \sigma)$ の取りうる 4 つの状態を表す。以下では簡単のため、(2.8) 式の $\psi(\alpha_i, \mathbf{R}_i)$ を

$$\psi(\alpha_i, \mathbf{R}_i) = \frac{1}{\sqrt{4!}} \det[\phi_0(i_1)(n \uparrow)_{i_1}, \phi_0(i_1)(n \downarrow)_{i_1}, \phi_0(i_1)(p \uparrow)_{i_1}, \phi_0(i_1)(p \downarrow)_{i_1}] \quad (2.9)$$

と略記することにする。

(2.5), (2.9) 式より、 ${}^8\text{Be}$ のクラスタ波動関数は

$$\Psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \frac{\mathcal{N}_0}{4!} \mathcal{A} \left[\det[\phi_0(1)(n \uparrow)_1, \phi_0(2)(n \downarrow)_2, \phi_0(3)(p \uparrow)_3, \phi_0(4)(p \downarrow)_4] \right. \\ \left. \times \det[\phi_0(5)(n \uparrow)_5, \phi_0(6)(n \downarrow)_6, \phi_0(7)(p \uparrow)_7, \phi_0(8)(p \downarrow)_8] \right] \quad (2.10)$$

となる。ここで \mathcal{A} が反対称化演算子であったことに注意すると、(2.10) 式の determinant は外しても構わない (反対称化した 2 式の積をとった後に全体として再び反対称化するのだから、初めの反対称化は意味が無い) ので、結局次式を得る：

$$\Psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \frac{\mathcal{N}_0}{4!} \mathcal{A} \left[\phi_0(1)(n \uparrow)_1, \phi_0(2)(n \downarrow)_2, \phi_0(3)(p \uparrow)_3, \phi_0(4)(p \downarrow)_4 \right. \\ \left. \times \phi_0(5)(n \uparrow)_5, \phi_0(6)(n \downarrow)_6, \phi_0(7)(p \uparrow)_7, \phi_0(8)(p \downarrow)_8 \right]. \quad (2.11)$$

${}^8\text{Be}$ のクラスタ波動関数は (2.11) 式で表されることが分かったので、これを用いて仮定したパラメータ $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \nu)$ を計算する方法について述べる。系のハミルトニアンは核子の運動項及び相互作用項によって次のように与えられるだろう：

$$H = \sum_i t_i - T_G + \sum_{i>j} v_{ij}. \quad (2.12)$$

ここで第 1 項は核子の運動項、第 3 項は相互作用項である。第 2 項は重心の運動エネルギーを表しているが、内部運動のみに着目するためにこの項は全体のハミルトニアンから除いた。(2.11), (2.12) 式により、 ${}^8\text{Be}$ の

エネルギー期待値は、 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \nu$ の関数として与えられる。一方で、変分原理により、これらのパラメータが実際に取る値は系のエネルギーが最小となるように実現するであろう。よって、パラメータの決定する方程式は

$$\delta\langle\Psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \nu)|H|\Psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2; \nu)\rangle = 0 \quad (2.13)$$

となる。(2.12) 式では重心運動を無視しているため、実際の変分パラメータは $d = |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|, \nu$ となり、実際に相互作用項を仮定して計算すると、 $d = 3.0 \text{ fm}, \mu = 0.245 \text{ fm}^{-2}$ を得る。

2.1.3 重心座標の分離

前節でハミルトニアンから重心座標部分を除いたことから分かるように、我々が興味を持つのは原子核の内部状態であり、その状態を知るためにはクラスター波動関数が重心関数と内部関数に分解できていることが重要である。もし分解できないようであるならば、重心運動が原子核内部に影響することを意味するので重心運動の効果が無視できず、(2.12) 式のように重心運動項を除くことが出来ない。2 中心模型の場合、各クラスターの振動パラメータが同じであれば、 2α 系に限らず一般の 2 中心クラスター状態に対し、重心関数と内部関数が分離できることが知られている。そこで本節では一旦 2α 系から離れて、この事実を証明することにする。(計算が煩雑なものと本質的ではないので割愛するが、実はこのことは一般の n 中心に対して成立する。拡張に関しては Jacobi 座標を用いて (2.26), (2.27) 式と同様に変数変換すると、(2.28) 式のように指数関数の肩の部分が重心座標と相対座標に分離できる。ここからは (2.28) 式以降と同様の議論により主張は示される。)

● 1 中心模型の重心座標の分離

2 中心模型について考えるために、まず 1 中心模型で重心座標が分離できることを証明しよう。示すべき式は次の通り：

$$\psi(C_i, \mathbf{R}_i) = \left(\frac{2\nu_i A_i}{\pi}\right)^{3/4} e^{-A_i \nu_i (\mathbf{X}_i - \mathbf{R}_i)^2} \phi(C_i). \quad (2.14)$$

ここで \mathbf{X}_i はクラスター C_i を構成する A_i 個の核子の重心で、 $\phi(C_i)$ は \mathbf{X}_i を含まない内部波動関数である。

以下では簡単のため $\mathbf{R}_i = 0$ とする。こうおいても \mathbf{X}_i が定数 shift するだけであるので、一般性は失われない。このとき 1 核子波動関数は、原点を中心とした調和振動子ポテンシャルの解

$$\phi_n(x_1, x_2, x_3) = A \phi_0(\mathbf{r}) \prod_{k=1,2,3} H_{n_k}(\sqrt{2\nu} x_k), \quad (2.15)$$

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^{3/4} e^{-\nu \mathbf{r}^2} \quad (2.16)$$

で与えられる (A は規格化定数, H_n はエルミート多項式, $n = n_1 + n_2 + n_3$ は主量子数, $\mathbf{r}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$). (2.15) 式より、1 中心模型波動関数は

$$\psi(C_i, \mathbf{R}_i = 0) = \frac{1}{\sqrt{A_i!}} \left(\prod_{k=1}^{A_i} \phi_0(\mathbf{r}_k) \right) \det [P_{C_i,1}, \dots, P_{C_i,A_i}], \quad (2.17)$$

$$P_{C_i,l} = \left(\prod_{k=1,2,3} H_{n_{k,l}}(\sqrt{2\nu} x_{k,l}) \right) \eta(\tau_l, \sigma_l) \quad (2.18)$$

と書ける. ここで, (2.17) 式における指数関数部分を変形すると

$$\left(\prod_{k=1}^{A_i} \phi_0(\mathbf{r}_k) \right) = \left(\frac{2\nu_i}{\pi} \right)^{3A_i/4} e^{-A_i\nu_i \mathbf{X}_i^2} \exp \left[-\nu_i \sum_{k=1}^{A_i} (\mathbf{r}_k - \mathbf{X}_k)^2 \right] \quad (2.19)$$

となるので, (2.14) 式と (2.17), (2.19) 式を比較して, 内部波動関数は

$$\phi(C_i) = \left(\frac{2\nu_i}{\pi} \right)^{3(A_i-1)/4} \exp \left[-\nu_i \sum_{k=1}^{A_i} (r_k - \mathbf{X}_i)^2 \right] \det [P_{C_i,1}, \dots, P_{C_i,A_i}] \quad (2.20)$$

と表される. よって, 示すべきことは (2.20) 式が重心座標を含んでいないことである.

ある関数が重心座標を含んでいないこと, 関数が併進不変性を持つことは同値である. $\mathbf{r}_k - \mathbf{X}_i$ は併進変換

$$\mathbf{r}_k \rightarrow \mathbf{r}_k + \mathbf{a}, \quad (k = 1, 2, \dots, A_i) \quad (2.21)$$

に関して明らかに不変であるので, (2.20) 式で指数関数部分是不変である. よって, 行列式の部分の併進不変性について考えればよい.

ここで, エルミート多項式は完全性を持っていたことに注目する. 併進変換によってエルミート多項式は

$$H_{n_k}(\sqrt{2\nu}x_k) \rightarrow H_{n_k}(\sqrt{2\nu}(x_k + a)) \quad (2.22)$$

のように変換されるが, 完全性により $H_{n_k}(\sqrt{2\nu}x_k + a)$ は $H_i(\sqrt{2\nu}x_k)$ の線形結合で表される. さらに, $H_{n_k}(\sqrt{2\nu}x_k + a)$ は高々 n_k 次の多項式であるので, $i \leq n_k$ である. よって, $H_{n_k}(\sqrt{2\nu}x_k + a)$ は $H_i(\sqrt{2\nu}x_k)$ の高々有限和で書くことができる. 以上をまとめると

$$H_{n_k}(\sqrt{2\nu}(x_k + a)) = H_{n_k}(\sqrt{2\nu}x_k) + \sum_{i=0}^{n_k-1} a_i H_i(\sqrt{2\nu}x_k) \quad (2.23)$$

であるので (最高次の係数は明らかに 1 であるので特に別に書いた) $P_{C_i,l}$ は次のようになる:

$$P_{C_i,l}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \left[\prod_{k=1,2,3} \left(H_{n_k,l}(\sqrt{2\nu}x_k) + \sum_{i=0}^{n_k-1} a_{i,k} H_{i,l}(\sqrt{2\nu}x_k) \right) \right] \eta(\tau_l, \sigma_l). \quad (2.24)$$

さて, クラスタは基底状態 (核子は中心位置を原点とした調和振動子ポテンシャルで記述される殻模型で記述されている) と考えていた. このことに注意すると, (2.24) 式で出てきた併進変換によって追加された項は行列式に影響しないことが分かる. 行列式に登場する多項式の最高次数を N とする. このとき, 追加された項は高々 $n_1 + n_2 + n_3 - 3 < 3N$ 次の多項式である. クラスタは基底状態であるので, $0 \leq i \leq 3N$ 次の多項式の「全ての」取りうる組み合わせを網羅してはならない (例えば $i = 1$ のとき, $(n_1, n_2, n_3) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ といった 3 通りが存在する). よって, (2.24) 式において $a_{p,1} a_{q,2} a_{r,3} H_{p,l}(\sqrt{2\nu}x_1) H_{q,l}(\sqrt{2\nu}x_2) H_{r,l}(\sqrt{2\nu}x_3)$ の形で表される項は, 行列式において, いずれかの行の定数倍に過ぎない (今まで $\eta(\tau_l, \sigma_l)$ について議論してこなかったが, $\eta(\tau_l, \sigma_l)$ は高々 4 通りしかなく, また行列式では全て網羅されているので, いかなる $\eta(\tau_l, \sigma_l)$ であっても問題ない). 故に行列式の性質により, この項の行列式に対する寄与は 0 である. 以上より行列式の部分の併進不変性は示された.

● 2 中心模型の重心座標の分離

(2.14) 式を用いて, 2 中心の振動パラメータが等しいとき ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$ のとき), 2 中心クラスター状態に対して重心関数と内部関数が分離できることを示す. (2.14) 式より, 2 中心模型の全波動関数は

$$\Psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \mathcal{N}_0 \left(\frac{4A_1 A_2 \nu^2}{\pi^2} \right)^{3/4} \mathcal{A} \left[e^{-A_1 \nu (\mathbf{X}_1 - \mathbf{R}_1)^2 - A_2 \nu (\mathbf{X}_2 - \mathbf{R}_2)^2} \phi_1(C_1) \phi_2(C_2) \right] \quad (2.25)$$

となる. ここで \mathbf{X}_1 及び \mathbf{X}_2 はそれぞれのクラスターに属する核子の重心である. (2.25) 式を変形するために次のようなパラメータを定義しよう:

$$\mathbf{X}_G = \frac{1}{A} (A_1 \mathbf{X}_1 + A_2 \mathbf{X}_2), \quad \mathbf{R}_G = \frac{1}{A} (A_1 \mathbf{R}_1 + A_2 \mathbf{R}_2), \quad (2.26)$$

$$\mathbf{X}_r = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2, \quad \mathbf{R}_r = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2. \quad (2.27)$$

(2.26), (2.27) 式より

$$A_1 \nu (\mathbf{X}_1 - \mathbf{R}_1)^2 + A_2 \nu (\mathbf{X}_2 - \mathbf{R}_2)^2 = A \nu (\mathbf{X}_G - \mathbf{R}_G)^2 + \gamma (\mathbf{X}_r - \mathbf{R}_r)^2, \quad (\gamma = (A_1 A_2 / A) \nu) \quad (2.28)$$

であるので, これを (2.25) 式に代入して, \mathbf{X}_G と \mathbf{R}_G は核子の交換に関して不変であるから反対称化演算子の外に出せることに注意すると

$$\Psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \mathcal{N}_0 \left(\frac{4A_1 A_2 \nu^2}{\pi^2} \right)^{3/4} e^{-A \nu (\mathbf{X}_G - \mathbf{R}_G)^2} \mathcal{A} \left[e^{-\gamma (\mathbf{X}_r - \mathbf{R}_r)^2} \phi_1(C_1) \phi_2(C_2) \right] \quad (2.29)$$

を得る. \mathbf{X}_G は系の重心座標であるので以上で主張は示された.

2.1.4 2α 系の 2 中心模型と 8 核子系の 1 中心模型の関係

話は再び 2α 系に戻る. 2 中心模型波動関数は (2.11) 式で与えられていた. 前節の結果により (2.11) 式は重心関数と内部関数に分離できることが分かったので, 本節では特に 2α の中心間距離 $d = |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|$ に注目し, 特に, $d \rightarrow 0$ のとき, 1 中心波動関数へと移行することを示そう.

簡単のため, 以下では座標原点を $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 0$ となるように取る. このとき, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{d}/2$, $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{d}/2$ で与えられる.

(2.11) 式において, 1 粒子波動関数は $\phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{d}/2)$ と $\phi_0(\mathbf{r} + \mathbf{d}/2)$ で書かれるが, これらは直行していないので不便である. そこで, 次のようにこれらを変数変換する:

$$\begin{pmatrix} \phi_+(\mathbf{r}, \mathbf{d}) \\ \phi_-(\mathbf{r}, \mathbf{d}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{d}/2) \\ \phi_0(\mathbf{r} + \mathbf{d}/2) \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

$\phi_+(\mathbf{r}, \mathbf{d})$, $\phi_-(\mathbf{r}, \mathbf{d})$ は直行し, かつそれぞれパリティ $+$, $-$ の状態となっている. 実際, パリティについては (2.30) 式より明らかであり, 直行性については (2.7) 式に注意すると, $\phi_0^*(\mathbf{r} \pm \mathbf{d}/2) = \phi_0(\mathbf{r} \pm \mathbf{d}/2)$ であるので

$$\int \phi_+^*(\mathbf{r}, \mathbf{d}) \phi_-(\mathbf{r}, \mathbf{d}) d^3 r = \frac{1}{\sqrt{2}} \int |\phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{d}/2)|^2 - |\phi_0(\mathbf{r} + \mathbf{d}/2)|^2 d^3 r = 0 \quad (2.31)$$

(\therefore 適当に平行移動すれば (中辺第 1 項) = (中辺第 2 項)) となり, 直行性は示される. (2.31) 式を (2.5) 式に代入すると, 2 中心模型波動関数は行列式に適当な基本変形を行うことで

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{d}/2, -\mathbf{d}/2) = \frac{\mathcal{N}_0}{4!} \det \left[\phi_+(1)(n \uparrow)_1, \phi_+(2)(n \downarrow)_2, \phi_+(3)(p \uparrow)_3, \phi_+(4)(p \downarrow)_4 \right. \\ \left. \times \phi_-(5)(n \uparrow)_5, \phi_-(6)(n \downarrow)_6, \phi_-(7)(p \uparrow)_7, \phi_-(8)(p \downarrow)_8 \right] \quad (2.32) \end{aligned}$$

を得る.

ここで $d \rightarrow 0$ のときの $\phi_{\pm}(\mathbf{r}, d)$ の振る舞いについて調べる. 座標系を $\mathbf{d} = (0, 0, d)$ となるように取ると, (2.7) 式より

$$\phi_{\pm}(\mathbf{r}, d) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2\nu}{\pi} \right)^{3/4} e^{-(x^2+y^2)} \{ e^{-\nu(z-d/2)^2} \pm e^{-\nu(z+d/2)^2} \} \quad (2.33)$$

と書けるので, $d \rightarrow 0$ の下で

$$\phi_{+}(\mathbf{r}, d \rightarrow 0) = \sqrt{2}\phi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{2}\phi_{(000)}(\mathbf{r}) \quad (2.34)$$

$$\phi_{-}(\mathbf{r}, d \rightarrow 0) \rightarrow \sqrt{2}(\sqrt{\nu d})(\sqrt{\nu z})\phi_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{\sqrt{\nu d}}{\sqrt{2}} \right) \phi_{(001)}(\mathbf{r}) \quad (2.35)$$

となる ($\phi_{(000)}(\mathbf{r})$, $\phi_{(001)}(\mathbf{r})$ はそれぞれ調和振動子の基底状態, z 方向の第 1 励起状態を表す). (2.34), (2.35) 式は, $d \rightarrow 0$ の下で, パリティ + の状態は 1 中心殻模型の ($0s$) 軌道へ, パリティ - の状態は 1 中心殻模型の ($0p$) 軌道へ移行することを示している. よって (2.32) 式は $d \rightarrow 0$ で次のように移行する:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{d}/2, -\mathbf{d}/2) = \frac{\mathcal{N}_0}{4!} \left(\frac{\sqrt{\nu d}}{2} \right)^4 \det \left[\phi_{(000)}(1)(n \uparrow)_1, \phi_{(000)}(2)(n \downarrow)_2, \phi_{(000)}(3)(p \uparrow)_3, \phi_{(000)}(4)(p \downarrow)_4 \right. \\ \left. \times \phi_{(001)}(5)(n \uparrow)_5, \phi_{(001)}(6)(n \downarrow)_6, \phi_{(001)}(7)(p \uparrow)_7, \phi_{(001)}(8)(p \downarrow)_8 \right]. \quad (2.36) \end{aligned}$$

これは $d \rightarrow 0$ で 2α の 2 中心模型は $[(000)^4(001)^4]$ 配位を持つ ${}^8\text{Be}$ の殻模型状態へと移行したことを表している.

以上の結果から考えられることは, 2 中心模型では中心が 1 点に近づくことで殻模型の特定の配位が現れるということである. これは, クラスタ間距離が大きく, 重なりが小さいときにはクラスタ構造が発達し, 逆にクラスタ間距離が小さく重なりが大きときにはクラスタ構造は衰退し, 殻模型構造が表現されることを意味している. 尚, 今回の場合の殻模型の構造は, $(001)^4$ のために z 軸方向に核子密度が大きくなっており, ${}^8\text{Be}$ はラグビーボール状に変形していると考えられる.

2.2 パリティ射影と角運動量射影

前章で議論したクラスタ模型波動関数は, クラスタ単位で波動関数を定め, それを単純に反対称化しただけであるので, 一般に定まったパリティや角運動量の固有状態ではない. しかし, ハミルトニアンが反転不変性や回転不変性を持つ場合, 波動関数はパリティや角運動量の固有状態であるべきである. そこで, クラスタ模型波動関数を構成することで失われたこれらの対称性を回復させる手段を講じなくてはならない. その方法が射影法である. 本章では, まずパリティ射影, 角運動量射影のそれぞれの射影演算子を構成し, 後に具体例として $\alpha + {}^{16}\text{O}$ 系, 正 3 角形配置の 3α 系のそれぞれに対してこれを適用してみる.

2.2.1 パリティ射影

模型波動関数 Φ がパリティ固有状態でないとする. パリティ演算子を P とすると, パリティ射影演算子は $(1 \pm P)/2$ で構成される. 実際 $(1 \pm P)/2$ を Φ に作用させたものを $\Phi^{(\pm)}$ とするとこれらはパリティ固有状態である:

$$\Phi^{(+)} = \frac{1}{2}(1 + P)\Phi, \quad \Phi^{(-)} = \frac{1}{2}(1 - P)\Phi, \quad (2.37)$$

$$P\Phi^{(+)} = \frac{1}{2}(1 + P)\Phi = \frac{1}{2}P(1 + P)\Phi = \frac{1}{2}(P + 1)\Phi = \Phi^{(+)}, \quad (2.38)$$

$$P\Phi^{(-)} = \frac{1}{2}(1-P)\Phi = \frac{1}{2}P(1-P)\Phi = \frac{1}{2}(P-1)\Phi = -\Phi^{(-)}. \quad (2.39)$$

ここでパリティ演算子が $P^2 = 1$ であることを利用した (パリティ変換は空間反転変換なので、2回の空間反転で元に戻ってくる). (2.38), (2.39) 式より, $\Phi^{(+)}$, $\Phi^{(-)}$ がそれぞれパリティ $+$, $-$ の固有状態になっていることが分かった.

2.2.2 角運動量射影

模型波動関数 Φ が角運動量固有状態でないとする. 重心運動は無視して考えるものとする. 内部自由度に関して系を Euler 角 $\Omega = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ だけ回転させる演算子を $\hat{R}(\Omega)$ とすると, 回転させた波動関数は $\hat{R}(\Omega)\Phi$ で表される. 系のハミルトニアンは回転不変であるので回転によるエネルギー期待値は Euler 角に依存しない. このことに着目すると, 模型波動関数を $\hat{R}(\Omega)$ で回転させたものを適当な重みを付けて重ね合わせてしまえば, 模型波動関数から特定の方向に対する優位性, 即ち回転非対称性は失われると考えられる. 結論を先に書くと, 結局角運動量射影演算子は次のように与えられる:

$$\Psi_{JM} = P_{MK}^J \Phi, \quad P_{MK}^J = \frac{2J+1}{8\pi^2} \int d\Omega D_{MK}^J(\Omega) \hat{R}(\Omega). \quad (2.40)$$

ここで J, M, K はそれぞれ lab 系での角運動量の大きさ, 角運動量の z 軸方向の値, 物体固定系の角運動量の z 軸方向の値である. また, D_{MK}^J は D 関数である.

実際に (2.40) 式が角運動量射影を表していることを示そう. まずは D 関数の定義式は次のように書くことができることに注意する:

$$\hat{R}(\Omega)|jm\rangle = \sum_{m'} D_{m'm}^{j*}(\Omega)|jm'\rangle. \quad (2.41)$$

また, D 関数の直行性は, 以下のように与えられる:

$$\int d\Omega D_{m_1 m_2}^j(\Omega) D_{m'_1 m'_2}^{j'*}(\Omega) = \frac{8\pi^2}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}. \quad (2.42)$$

一般に, Φ は角運動量固有状態を用いて展開することができる:

$$\Phi = \sum_{jm} a_{jm} |jm\rangle \quad (2.43)$$

((2.43) 式の右辺は本来なら $\langle x|$ で閉じなくては行けないが, 簡潔さのために省略した. また, $\langle x|jm\rangle$ は球面調和関数であり, これは完全系をなしているので (2.43) 式は自明). (2.41), (2.42), (2.43) 式を (2.40) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \Psi_{JM} &= P_{MK}^J \Phi \\ &= \frac{2J+1}{8\pi^2} \int d\Omega D_{MK}^J(\Omega) \hat{R}(\Omega) \sum_{jm} a_{jm} |jm\rangle \\ &= \frac{2J+1}{8\pi^2} \int d\Omega D_{MK}^J(\Omega) \sum_{jmm'} a_{jm} D_{m'm}^{j*}(\Omega) |jm'\rangle \\ &= \sum_{jmm'} a_{jm} \delta_{Jj} \delta_{Mm'} \delta_{K m} |jm'\rangle \\ &= a_{JK} |JM\rangle \end{aligned} \quad (2.44)$$

となる。右辺は様々な角運動量状態から特定の状態を抜き出していることに他ならず、(40)式は確かに角運動量射影演算子を表している。

模型波動関数が特定の K を持つならば、 K の自由度は存在しないものと考えてよい。そのため角運動量射影は

$$\Psi_{JM} = P_{MK}^J \Phi(K) \quad (2.45)$$

と書くことができ、特定の (J, K) に対し Ψ_{JM} と一意に定めることができる。一方で、模型波動関数が異なる K を持つならば、(2.45)式左辺のように K の自由度を落とすことが出来ず、異なる K の混合状態を考えなくてはならなくなる。このような場合は、問題ごとに考慮される。

2.2.3 パリティ・角運動量射影と J^π の関係

前節までで構成したパリティ・角運動量射影演算子を実際に具体例を挙げて適用してみる。その結果、取りうる J^π の状態に制限がかかってしまうことを見るのが本節の目的である。尚、以下では内部座標の原点は重心の位置にあるものとする。

議論に入る前に、 $\alpha + {}^{16}\text{O}$ 系、正3角形配置の 3α 系の持つ対称性を先に列挙しておこう (反転不変性は共通しているし、回転不変性は一般に議論したほうが clear であるので)。

まず $\alpha + {}^{16}\text{O}$ 系について、2つのクラスターの中心位置を結ぶ方向を z 軸とする。このとき、連続な対称性として z 軸に関する回転対称性があげられる。また、不連続な対称性として、 xz 平面に関する反転対称性がある (x, y 軸をどのように取るかは自由であるので、 yx 平面に関する反転対称性は考える必要は無い)。以上をまとめると、 $\alpha + {}^{16}\text{O}$ 系に課せられる内部対称性は

- (a) z 軸まわりの回転対称性
- (b) xz 平面に関する反転対称性 ($\sigma_v(xz) : (x, y, z) \rightarrow (x, -y, z)$)

となる。

次に正3角形配置の 3α 系について、全ての重心に共通の軸は存在しないので、 $\alpha + {}^{16}\text{O}$ 系のような連続な対称性は存在せず、対称性は全て不連続であることに注意する。 3α のそれぞれの重心が xy 平面上にくるように、特に y 軸上に1つの重心が乗るように内部座標を定める。まず考えられる対称性は、 z 軸まわりの回転対称性である。正3角形配置であるので、この場合は $2\pi/3, 4\pi/3$ の回転に関して不変でなくてはならない。次に、 y 軸上に重心が1つあるので、 y 軸を中心として π だけ回転させても不変である。最後に、全ての重心が xy 平面上にあるので、 xy 平面に関する反転対称性が存在するだろう。まとめると、次の通り。

- (c) z 軸のまわりの $2\pi/3, 4\pi/3$ の回転に関する不変性
- (d) y 軸のまわりの π の回転に関する不変性
- (e) xy 平面に関する反転対称性 ($\sigma_h(xy) : (x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$)

これらの対称性は (a)(c), (b)(d), (e) と分類できるので、以下で順番に説明していくことにする。

2.2.4 z 軸のまわりの回転不変性

ここでは (a), (c) について考えていこう。ここで、 K 射影と呼ばれる射影演算子を次のように定義する：

$$P_K = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iK\theta} e^{-i\theta J_z} d\theta. \quad (2.46)$$

(2.46) 式で射影された波動関数は、角運動量の z 成分の固有値 K の固有状態であることに注意する。また、 K 射影は P_{MK}^J と次のような関係式がある：

$$P_{MK}^J = \frac{2J+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \sin\theta_2 e^{iM\theta_1} d_{MK}^J(\theta_2) e^{-i\theta_1 J_z} e^{-i\theta_2 J_y} P_K. \quad (2.47)$$

ここで d_{MK}^J は D 関数と次のように関係付けられる：

$$D_{MK}^{J*} = e^{-iM\theta_1} d_{MK}^J(\theta_2) e^{-iK\theta_3}. \quad (2.48)$$

ここで z 軸まわりの回転を考えるときは、 θ_3 を含む項のみが模型波動関数の不変性に効いてくることに注意する。よって以下では、 z 軸まわりの回転不変性を考えるときは、 K 射影について考えればよい。

さて、(2.46) 式を用いて (a), (c) の回転対称性について考えよう。

まずは任意の角度に関する回転不変性 ((a) がこれにあたる) について、この対称性は

$$\Phi = e^{-i\theta_0 J_z} \Phi, \quad (\text{for } \forall \theta_0 \in \mathbb{R}) \quad (2.49)$$

で与えられる。(2.46), (2.49) 式より

$$\begin{aligned} P_K \Phi &= P_K e^{-i\theta_0 J_z} \Phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iK\theta} e^{-i(\theta+\theta_0)J_z} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iK(\theta-\theta_0)} e^{-i\theta J_z} d\theta \\ &= e^{-i\theta_0 K} P_K \Phi. \end{aligned} \quad (2.50)$$

θ_0 は任意の実数であったことに注意すると、(2.50) 式が非自明な解を持つことは許されず、結局

$$P_{MK}^J \Phi^{(\pm)} = 0, \quad (K \neq 0) \quad (2.51)$$

を得る。これはパリティ・角運動量射影した模型波動関数に対し、許される内部自由度の量子数は $K = 0$ のみであることを意味している。

次に z 軸のまわりの $2\pi/N$ の回転に関する不変性 (これが (b) にあたる) について、これも (2.49), (2.50) 式と同様に考えればよく、結論としては

$$\Phi = e^{-i2\pi/N J_z} \Phi \quad (2.52)$$

より $\Phi(K) = e^{-i2\pi K/N} \Phi(K)$ となる。これが満たされるのは $K = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ の時のみであるので

$$P_{MK}^J \Phi^{(\pm)} = 0, \quad (K \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots) \quad (2.53)$$

を得る。

2.2.5 y 軸に関する回転不変性

次に (b), (d) について考える。(d) は y 軸に関する回転不変性であるので、平面に関する反転不変性と関係ないように思われるかもしれない。しかし、 xz 平面に関する反転は空間反転と y 軸のまわりの π の回転によって表現されることに注意する。即ち、 xz 平面に関する反転を表す演算子は $\sigma_v(xz) = e^{-i\pi J_y} P$ である。我々は最終的にパリティ・角運動量射影された模型波動関数を興味の対象としているので、パリティ変換の部

分は符号の反転にしか寄与せず、よって本質的には y 軸に関する回転と同じであると思ってよいだろう。以下では xz 平面に関する反転について考察する。

この変換に対する不変性は

$$\Phi = e^{-i\pi J_y} P \Phi \quad (2.54)$$

で与えられている。ここで (2.54) 式から、パリティ射影された模型波動関数に対して

$$\Phi^{(\pm)} = e^{-i\pi J_y} P \Phi^{(\pm)} = \pm e^{-i\pi J_y} \Phi^{(\pm)} \quad (2.55)$$

が得られるので、次式が導かれる：

$$P_{M(-K)}^J \Phi^{(\pm)} = \pm P_{M(-K)}^J e^{-i\pi J_y} \Phi^{(\pm)} = \pm P_{M(-K)}^J \hat{R}(0, \pi, 0) \Phi^{(\pm)}. \quad (2.56)$$

ところが任意の Euler 角 Ω_0 に対して

$$P_{MK}^J \hat{R}(\Omega_0) = \sum_{K'} D_{KK'}^{J*}(\Omega_0) P_{MK'}^J \quad (2.57)$$

が成立する。この式の証明については、(2.57) 式の両辺に適当な $|jm\rangle$ を作用させ、(2.41)、(2.42) 式を用いて計算することで、(右辺)=(左辺) $= D_{K^*m}^J(\Omega_0)|JM\rangle$ となり成立する (任意の $|jm\rangle$ に対して (2.57) 式が成立すれば、完全性によりこれは任意の状態に対して (2.57) 式が成立していることと等しいので、これで十分である)。

(2.56), (2.57) 式より

$$\begin{aligned} P_{M(-K)}^J \Phi^{(\pm)} &= \pm \sum_{K'} D_{(-K)K'}^{J*}(0, \pi, 0) P_{MK'}^J \Phi^{(\pm)} \\ &= \pm (-1)^{J-K} P_{MK}^J \Phi^{(\pm)} \end{aligned} \quad (2.58)$$

が成り立つとわかる。尚、(2.58) 式の 2 段目では、 D 関数の性質

$$D_{mm'}^j(0, \pi - \theta, 0) = (-1)^{j-m} D_{(-m')m}^j(0, \theta, 0), D_{m'm}^j(0, 0, 0) = \delta_{m'm} \quad (2.59)$$

を $\theta = 0$ として代入した。(2.59) 式において $K = 0$ とすると

$$P_{M0}^J \Phi^{(\pm)} = \pm (-1)^J P_{M0}^J \Phi^{(\pm)} \quad (2.60)$$

であるので、この関係式から次の結果が分かる：

$$P_{M0}^J \Phi^{(+)} = 0, \quad (J = 1, 3, 5, \dots), \quad (2.61)$$

$$P_{M0}^J \Phi^{(-)} = 0, \quad (J = 2, 4, 6, \dots). \quad (2.62)$$

2.2.6 xy 平面に関する反転不変性

xy 平面に関する反転 ((e) に対応) も xz 平面に関する反転と基本方針は全く変わらない。 xz 平面に関する反転は空間反転と z 軸のまわりの π の回転によって表現される。よって xy 平面に関する反転を表す演算子は $\sigma_h(xy) = e^{-i\pi J_z} P$ で表される。 $\sigma_h(xy)$ がパリティ・角運動量射影模型波動関数に課す条件は $\sigma_h(xy)\Phi^{(\pm)} = \Phi^{(\pm)}$ であるので、(2.50) 式と同様に計算すると

$$\Phi^{(\pm)} = \pm (-1)^K \Phi^{(\pm)} \quad (2.63)$$

となるので、このとき得られる関係式は

$$P_{MK}^J \Phi^{(\pm)} = 0, \quad (P \neq (-1)^K) \quad (2.64)$$

である。

2.2.7 具体例と J^π に対する制限

以上の準備の下で、具体的に内部対称性がパリティ・角運動量固有状態に対してどのように影響するのか見ていこう。

2.2.8 $\alpha + {}^{16}\text{O}$ 系

この系には (a), (b) の内部対称性が定められていた。よって (2.51), (2.61), (2.62) 式より, $K = 0$ であり, しかもパリティ $+(-)$ に対して角運動量は偶数 (奇数) の状態しか残ることが出来ない (制限される) と分かる。まとめると, 異種の 2 体クラスター系において許される状態は

$$J^\pi = \begin{cases} 0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \dots \\ 1^-, 3^-, 5^-, 7^-, \dots \end{cases} \quad (2.65)$$

である。

ここで $\alpha + \alpha$ のような同種の 2 体クラスター系の場合について言及しておく。クラスターが同種である場合, 模型波動関数はその構成から明らかにパリティ $+$ の固有状態である。即ちパリティ射影を施してもパリティ $-$ の状態は現れない。よって (2.65) 式において許される状態は $J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \dots$ のみである。特に ${}^8\text{Be}$ に $J^\pi = 1^-, 3^-, 5^-, 7^-, \dots$ なる状態が存在しないのはこのためであると考えられる。

2.2.9 正 3 角形配置の 3α 系

この系には (c), (d), (e) の内部対称性が定められていた (これは一般に D_{3h} 対称性と呼ばれる)。まず (2.53) 式で $N = 3$ とすることにより, $2\pi/3$ 回転不変性の下で生き残る状態は $K = 0, \pm 3, \dots$ である ($4\pi/3$ 回転不変性は $N = -3$ とすればよいが, これによる制限は $2\pi/3$ 回転不変性のそれと同じであることに注意)。これを式にまとめると

$$P_{MK}^J \Phi^{(\pm)} = 0, \quad (K \neq 0, \pm 3, \dots) \quad (2.66)$$

となる。次に (2.60) 式 (から右辺にある \pm を除いたもの) より, 次の関係式が得られる:

$$P_{M0}^J \Phi^{(\pm)} = 0, \quad (J = 1, 3, 5, \dots). \quad (2.67)$$

ここで D 関数について $M < K \Rightarrow D_{MK}^J = 0$ なる性質があることに注意すると, (2.64), (2.66), (2.67) 式より, 生き残る状態は

$$\begin{aligned} (K^\pi = 0^+) J^\pi &= 0^+, 2^+, 4^+, \dots \\ (K^\pi = 3^-) J^\pi &= 3^-, 4^-, 5^-, \dots \\ (K^\pi = 6^+) J^\pi &= 6^+, 7^+, 8^+, \dots \end{aligned} \quad (2.68)$$

などと表されることが分かった ((2.67) 式は $K^\pi = 0^+$ の時のみに働くことに注意)。

2.3 GCM 法

多中心模型波動関数では各クラスターの中心位置をパラメータとして与え、これらをエネルギーに関する変分原理により決定していた。一般に、クラスター模型の模型波動関数は、その模型を特徴付けるいくつかのパラメータを含んでいる。これを $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ としよう。多中心模型では、エネルギーの変分原理によってこれらのパラメータは一意に決定されるとしていた。この仮定はエネルギーが最適値の付近で鋭く変化する場合には良い近似を与えるだろう。しかし、変化がゆるやかであるような場合、エネルギーの揺らぎによって、最適値付近の α からの真の波動関数への寄与も無視できなくなる。よって、最適値付近の模型波動関数に適当な重み関数 $f(\alpha)$ をかけて重ね合わせることで、模型波動関数は表現されるべきである。このときの α を生成座標と呼び、このような方法は生成座標法 (GCM) と呼ばれる。

本章では、重み関数 $f(\alpha)$ を決定するための方程式 (GCM 方程式) について説明し、GCM の 2 体クラスター系への応用を述べる。

2.3.1 GCM 方程式

GCM 波動関数は、前述のように

$$\Psi^{\text{GCM}} = \int d\alpha f(\alpha) \Psi(\alpha) \quad (2.69)$$

で表すことが出来る。 $f(\alpha)$ は決定されるべき重み関数である。これを決定するため、にエネルギー期待値が最小であるように変分法を用いる。ただし、 Ψ^{GCM} には拘束条件

$$\langle \Psi^{\text{GCM}} | \Psi^{\text{GCM}} \rangle = 1 \quad (2.70)$$

がかかることに注意。Lagrange の未定乗数を E (エネルギー期待値に相当する) として変分方程式は

$$\begin{aligned} \delta[\langle \Psi^{\text{GCM}} | H | \Psi^{\text{GCM}} \rangle - E \langle \Psi^{\text{GCM}} | \Psi^{\text{GCM}} \rangle] &= 0 \\ \Leftrightarrow \delta \int d\alpha' d\alpha f^*(\alpha') f(\alpha) [H(\alpha', \alpha) - EN(\alpha', \alpha)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \int d\alpha' d\alpha f(\alpha) \delta(\alpha' - \mathbf{y}) [H(\alpha', \alpha) - EN(\alpha', \alpha)] \delta f^* & \\ + \int d\alpha' d\alpha f^*(\alpha') \delta(\alpha - \mathbf{y}) [H(\alpha', \alpha) - EN(\alpha', \alpha)] \delta f &= 0 \\ \Leftrightarrow \int d\alpha f(\alpha) [H(\mathbf{y}, \alpha) - EN(\mathbf{y}, \alpha)] \delta f^* + \int d\alpha f^*(\alpha) [H(\alpha, \mathbf{y}) - EN(\alpha, \mathbf{y})] \delta f &= 0 \\ \Leftrightarrow \int d\alpha [H(\alpha', \alpha) - EN(\alpha', \alpha)] f(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

となる。4 段目から 5 段目へは、4 段目の左辺第 1 項と第 2 項が互いに複素共役であることを用いた。また H, N はそれぞれ

$$H(\alpha', \alpha) = \langle \Psi^{\text{GCM}} | H | \Psi^{\text{GCM}} \rangle, \quad (2.72)$$

$$N(\alpha', \alpha) = \langle \Psi^{\text{GCM}} | \Psi^{\text{GCM}} \rangle \quad (2.73)$$

であり、それぞれハミルトニアン積分核、重なり積分核と呼ばれる。また、(2.71) 式は GCM 方程式と呼ばれる。

GCM 方程式は、 α の領域を適当に広く取ることで、励起状態に対する良い近似を与えることも出来る (エネルギーがより高い状態の寄与を考えることで励起状態を表現していると考ええる)。

2.3.2 2体クラスター系への応用

本節では GCM 方程式を実際の 2 体クラスター系へ用いてみる。座標原点は $\mathbf{R}_G = 0$ となるように設定する。このとき、 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ は \mathbf{R}_r を用いて、 $\mathbf{R}_1 = (A_2/A)\mathbf{R}_r, \mathbf{R}_2 = -(A_1/A)\mathbf{R}_r$ と表されることに注意する。2 つのクラスターの振動パラメータは同じであると仮定する。すると以前示したように、模型波動関数は重心関数と相対関数に分離される。よって GCM 方程式は次のように与えられる：

$$\int d\mathbf{R}[H^{\text{GCM}}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) - EN^{\text{GCM}}(\mathbf{R}', \mathbf{R})]f(\mathbf{R}) = 0, \quad (2.74)$$

$$H^{\text{GCM}} = \langle \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}', \gamma)\phi(C_1)\phi(C_2) | H | \mathcal{A}[\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \gamma)\phi(C_1)\phi(C_2)] \rangle, \quad (2.75)$$

$$N^{\text{GCM}} = \langle \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}', \gamma)\phi(C_1)\phi(C_2) | \mathcal{A}[\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \gamma)\phi(C_1)\phi(C_2)] \rangle, \quad (2.76)$$

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \gamma) = \left(\frac{2\gamma}{\pi}\right)^{3/4} e^{-\gamma(\mathbf{r}-\mathbf{R})^2}. \quad (2.77)$$

ここで (2.75), (2.76) 式の表記に関して補足説明をしておく。いま、 Φ, Ψ を 2 組の非直交 1 粒子波動関数から作られる Slater 行列式とする：

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det[\phi_1(\mathbf{r}_1), \dots, \phi_A(\mathbf{r}_A)], \quad (2.78)$$

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det[\psi_1(\mathbf{r}_1), \dots, \psi_A(\mathbf{r}_A)]. \quad (2.79)$$

このとき核子の交換に関して完全に対称な物理演算子に対して次のような関係式が成り立つ：

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \hat{O} | \Psi \rangle &= \frac{1}{A!} \langle \det[\phi_1(\mathbf{r}_1), \dots, \phi_A(\mathbf{r}_A)] | \hat{O} | \det[\psi_1(\mathbf{r}_1), \dots, \psi_A(\mathbf{r}_A)] \rangle \\ &= \langle \phi_1(\mathbf{r}_1) \cdots \phi_A(\mathbf{r}_A) | \hat{O} | \det[\psi_1(\mathbf{r}_1), \dots, \psi_A(\mathbf{r}_A)] \rangle. \end{aligned} \quad (2.80)$$

これを証明しよう。行列式の定義を用いて (2.80) 式を展開すると

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \hat{O} | \Psi \rangle &= \frac{1}{A!} \langle \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \text{sgn}(\sigma) \phi_{\sigma(1)}(\mathbf{r}_1), \dots, \phi_{\sigma(A)}(\mathbf{r}_A) | \hat{O} | \sum_{\sigma' \in \mathcal{G}} \text{sgn}(\sigma') \psi_{\sigma'(1)}(\mathbf{r}_1), \dots, \psi_{\sigma'(A)}(\mathbf{r}_A) \rangle \\ &= \frac{1}{A!} \langle \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \phi_{\sigma(1)}(\mathbf{r}_1), \dots, \phi_{\sigma(A)}(\mathbf{r}_A) | \hat{O} | \sum_{\sigma' \in \mathcal{G}} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\sigma') \psi_{\sigma'(1)}(\mathbf{r}_1), \dots, \psi_{\sigma'(A)}(\mathbf{r}_A) \rangle \\ &= \frac{1}{A!} \langle \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \phi_{\sigma(1)}(\mathbf{r}_1), \dots, \phi_{\sigma(A)}(\mathbf{r}_A) | \hat{O} | \sum_{\sigma' \in \mathcal{G}} \text{sgn}(\sigma') \psi_{\sigma'(1)}(\mathbf{r}_1), \dots, \psi_{\sigma'(A)}(\mathbf{r}_A) \rangle \\ &= \frac{1}{A!} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \langle \phi_{\sigma(1)}(\mathbf{r}_1), \dots, \phi_{\sigma(A)}(\mathbf{r}_A) | \hat{O} | \sum_{\sigma'(\sigma) \in \mathcal{G}} \text{sgn}(\sigma'(\sigma)) \psi_{\sigma'(\sigma(1))}(\mathbf{r}_1), \dots, \psi_{\sigma'(\sigma(A))}(\mathbf{r}_A) \rangle \\ &= \frac{1}{A!} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \langle \phi_{\sigma(1)}(\mathbf{r}_1), \dots, \phi_{\sigma(A)}(\mathbf{r}_A) | \hat{O} | \sum_{\sigma' \in \mathcal{G}} \text{sgn}(\sigma') \psi_{\sigma'(1)}(\mathbf{r}_1), \dots, \psi_{\sigma'(A)}(\mathbf{r}_A) \rangle \\ &= \langle \phi_1(\mathbf{r}_1) \cdots \phi_A(\mathbf{r}_A) | \hat{O} | \det[\psi_1(\mathbf{r}_1), \dots, \psi_A(\mathbf{r}_A)] \rangle \end{aligned} \quad (2.81)$$

となり、結論が得られる ((2.81) 式で、3 行目では置換の性質 $\text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\sigma') = \text{sgn}(\sigma'(\sigma))$ を用いた。また、4 行目では、置換全体の和を取っていることを用いた。最後の行に関しては、物理演算子が核子の交換に関して完全対称であることを用いた)。 (2.80) 式より、(2.75), (2.76) 式のように、反対称化演算子はケット部分にのみあればよいことが分かった。

(2.74) 式に出てくる GCM 波動関数は定まった角運動量やパリティを持っていないことに注意する。勿論前章で示したように、射影演算子を用いてパリティ・角運動量固有状態にした模型波動関数を用いて GCM 波動関数を生成してもいいが、ここでは (2.77) 式を部分波展開することで部分波に対する GCM 方程式を導こう。 $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \gamma)$ は球面調和関数を用いて次のように展開される：

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \gamma) = \sum_l \Gamma_l(r, R, \gamma) \sum_m Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{R}}), \quad (2.82)$$

$$\Gamma_l(r, R, \gamma) = 4\pi \left(\frac{2\gamma}{\pi} \right)^{3/4} i_l(2\gamma Rr) e^{-\gamma(r^2+R^2)}. \quad (2.83)$$

ここで $i_l(2\gamma Rr)$ は変形球 Bessel 関数である。よって、球面調和関数の直交性に注意して、部分波 l に対する GCM 方程式 (即ち角運動量 l の固有状態の模型波動関数に対する GCM 方程式) は次のように与えられる：

$$\int dR [H_l^{\text{GCM}}(R', R) - EN_l^{\text{GCM}}(R', R)] f_l(R) = 0, \quad (2.84)$$

$$H_l^{\text{GCM}} = \langle \Gamma_l(r, R', \gamma) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \phi(C_1) \phi(C_2) | H | \mathcal{A}[\Gamma_l(r, R, \gamma) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \phi(C_1) \phi(C_2)] \rangle, \quad (2.85)$$

$$N_l^{\text{GCM}} = \langle \Gamma_l(r, R', \gamma) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \phi(C_1) \phi(C_2) | \mathcal{A}[\Gamma_l(r, R, \gamma) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \phi(C_1) \phi(C_2)] \rangle. \quad (2.86)$$

2.4 RGM 法

GCM では、エネルギーの極小値付近の状態に関して重ね合わせることで真の状態への良い近似を実現していた。本章では、これと異なった (だが同等な) アプローチである共鳴群法 (RGM) を紹介する。ここでは系の全角運動量 J に着目する。系が特定の角運動量さえ持っていれば良いので、このような状態は複数存在すると考えられる。このとき、実際に実現する状態はそれらの重ね合わせで表現されるべきであろう。後は GCM と同様に、変分原理を用いて考えればよい。

以下では、GCM と同様、あるパラメータに対する重み関数を決定する RGM 方程式を導く。また、GCM と RGM の関係について言及し、GCM と RGM が実は等価であることを証明する。

2.4.1 RGM 方程式

多体クラスター系への拡張はほぼ自明であるので、以下では 2 体クラスター系について RGM 方程式を導く。前述のように、全系の波動関数は様々な内部状態 (チャンネル) の重ね合わせで表現される：

$$\Psi_J^{\text{RGM}} = \sum_k \Psi_{k,J}^{\text{RGM}}, \quad (2.87)$$

$$\Psi_{k,J}^{\text{RGM}} = \mathcal{A} \left[\chi_{k,L_k}(\mathbf{r}_k) [\phi(C_{k_1}; I_{k_1}) \phi(C_{k_2}; I_{k_2})]_{I_k} \right]_J. \quad (2.88)$$

ここで (C_{k_1}, C_{k_2}) は、第 1 のクラスターの内部状態が k_1 で第 2 のクラスターの内部状態が k_2 であることを意味している。また ϕ はクラスターの内部波動関数であり、 χ はクラスター間の相対波動関数である。このとき系の全角運動量 J はクラスターの内部スピンと相対スピンの合成で表されるので、(2.88) 式の L_k, I_k の合成スピンは J である。したがって、チャンネル番号 k とは $(C_{k_1}, C_{k_2}, I_{k_1}, I_{k_2}, I_k, L_k)$ をひとまとめに表示したものであると考えられる。

実際に方程式を導出する前に、どのようなチャンネルが結合するのか見ておこう。例として、閉殻核クラスターからなる 2 クラスター系を考えてみよう。 $\alpha + \alpha, \alpha + {}^{16}\text{O}$ などがこれにあたり、殻模型の記法の下

で、それぞれ α は $(0s)^4$, ^{16}O は $(0s)^4(0p)^{12}$ なので、共に内部スピンは 0 である。よって $I_{k_1} = I_{k_2} = 0$ なので $I_k = 0$ となり、取りうるチャンネルは $J = L_k$ の場合のみとなる。クラスターに回転バンドがある場合には複数のチャンネルが生まれる。例えば、 $\alpha + ^{12}\text{C}$ などは、 ^{12}C に内部励起状態として回転バンドが存在する。射影法で導いたように、 ^{12}C には $I = 0, 2, 4, \dots$ といった回転バンドが存在するので、 $I_{k_1} = 0$, $I_{k_2} = 0, 2, 4, \dots$ となり $I_k = 0, 2, 4$ が得られる。(簡単のため $I_{k_2} = 0, 2, 4$ とした) よって、 $J = 0$ に対して許されるチャンネルは $(I_k, L_k) = (0, 0), (2, 2), (4, 4)$ の 3 通りがあり、また $J = 1$ に対して許されるチャンネルは $(I_k, L_k) = (0, 1), (2, 1), (2, 3), (4, 3), (4, 5)$ の 5 通りが存在する。

さて、 χ は未知関数であることに注意する。これを決定する方法として、RGM 方程式を導出する。相対波動関数を $\chi_{k,L_k} = (u_k(r_k)/r_k)Y_{L_k M_k}(\theta_k, \varphi_k)$ とすると、(2.87) 式は

$$\Psi_J^{\text{RGM}} = \sum_k \mathcal{A}'_k \left[\frac{u_k(r_k)}{r_k} h_k^J \right], \quad (2.89)$$

$$h_k^J = \left[Y_{L_k}(\theta_k, \varphi_k) [\phi(C_{k_1}; I_{k_1}) \phi(C_{k_2}; I_{k_2})]_{I_k} \right]_J \quad (2.90)$$

で書き換えられる。ここで \mathcal{A}'_k はクラスター C_{k_1} に属する核子と C_{k_2} に属する核子を交換する演算子 (に適切な規格化定数を掛けたもの) である。系のエネルギーに対して変分原理を用いることにより、相対波動関数 $u_k(r_k)$ を決定しよう。GCM の時と同様に考えると、求める RGM 方程式は次のように定まる：

$$\begin{aligned} \delta \langle \Psi_J^{\text{RGM}} | H - E | \Psi_J^{\text{RGM}} \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \delta \left\langle \sum_k \left[\frac{u_k(r_k)}{r_k} h_k^J \right] \middle| H - E \middle| \sum_{k'} \left[\frac{u_{k'}(r_{k'})}{r_{k'}} h_{k'}^J \right] \right\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \delta \sum_{k,k'} \int da_k db_{k'} u_k(a_k) u_{k'}(b_{k'}) \left\langle \mathcal{A}'_k \left[\frac{\delta(r_k - a_k)}{r_k} h_k^J \right] \middle| H - E \middle| \mathcal{A}'_{k'} \left[\frac{\delta(r_{k'} - b_{k'})}{r_{k'}} h_{k'}^J \right] \right\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \delta \sum_{k,k'} \int da_k db_{k'} u_k(a_k) u_{k'}(b_{k'}) G_{kk'}(a_k, b_{k'}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k'} \int db_{k'} u_{k'}(b_{k'}) G_{kk'}(a_k, b_{k'}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$G_{kk'}(a_k, b_{k'}) = \left\langle \mathcal{A}'_k \left[\frac{\delta(r_k - a_k)}{r_k} h_k^J \right] \middle| H - E \middle| \mathcal{A}'_{k'} \left[\frac{\delta(r_{k'} - b_{k'})}{r_{k'}} h_{k'}^J \right] \right\rangle. \quad (2.92)$$

ここで (2.91) 式の導出に関して、反対称化演算子に対する以下のような関係式を 3 段目で用いた：

$$\mathcal{A}[f(r)g(r, y)] = \int da f(a) \mathcal{A}[\delta(r - a)g(r, y)]. \quad (2.93)$$

(2.92) 式は RGM 方程式の積分核であり、これは異なるチャンネル間の相関を表していると見ることができ。

ここで、積分核の中の特に局所的になる部分を抜き出して、RGM 方程式の見通しを良くしよう。積分核が局所的になるのは $k = k'$ なる弾性的過程であるので、そこで $G_{kk}(a_k, b_k)$ を次のように 2 つの部分に分ける：

$$G_{kk}(a_k, b_k) = G_{kk}^{\text{D}}(a_k, b_k) + G_{kk}^{\text{ex}}(a_k, b_k), \quad (2.94)$$

$$G_{kk}^{\text{D}}(a_k, b_k) = \left\langle \frac{\delta(r_k - a_k)}{r_k} h_k^J \middle| H - E \middle| \frac{\delta(r_k - b_k)}{r_k} h_k^J \right\rangle, \quad (2.95)$$

$$G_{kk}^{\text{ex}}(a_k, b_k) = \left\langle \frac{\delta(r_k - a_k)}{r_k} h_k^J \middle| (H - E)(\mathcal{A}_k - 1) \middle| \frac{\delta(r_k - b_k)}{r_k} h_k^J \right\rangle. \quad (2.96)$$

(2.95), (2.96) 式では (2.80) 式を用いたことに注意する。次に系のハミルトニアンを書き下そう。ハミルトニアンはクラスター間の相対運動による項とクラスター内部運動による項に分解できるだろう。よって、以下のよう表される：

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu_k} \frac{1}{r_k} \left(\frac{\partial}{\partial r_k} \right)^2 r_k + \frac{\hbar^2}{2\mu_k r_k^2} \hat{L}_k^2 + \sum_{i \in C_{k_1} j \in C_{k_2}} v_{ij} + H_{k_1} + H_{k_2}. \quad (2.97)$$

ここに $\mu_k = (A_{k_1} A_{k_2} / A) M$ であり、また H_{k_1}, H_{k_2} は 2 つのクラスターの内部ハミルトニアンである。相対運動の項はクラスターの内部状態に影響されないことに注意すると、 G_{kk}^D は

$$G_{kk}^D(a_k, b_k) = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu_k} \left(\frac{\partial}{\partial b_k} \right)^2 + \frac{\hbar^2 L_k (L_k + 1)}{2\mu_k b_k^2} + V_{kk}^D(b_k) - E_{rk} \right] \delta(a_k - b_k), \quad (2.98)$$

$$V_{kk}^D(b_k) = \langle h_k^J | \sum_{i \in C_{k_1} j \in C_{k_2}} v_{ij} | h_k^J \rangle, \quad (2.99)$$

$$E_{rk} = E - (E_{k_1} + E_{k_2}), E_{k_i} = \langle \phi_{k_i}(C_{k_i}) | H_{k_p} | \phi_{k_i}(C_{k_i}) \rangle \quad (2.100)$$

と、通常の Schrödinger 方程式の形に変形できることが分かる。また、 E_{rk} は全系のエネルギー E から 2 つのクラスターの内部エネルギー ($E_{k_1} + E_{k_2}$) を差し引いた、2 つのクラスターへの分解しきい値から測った相対運動のエネルギーである。 V_{kk}^D は直接ポテンシャルと呼ばれる。(2.98) 式から明らかなように、 G_{kk}^D は局所的である。一方で、 G_{kk}^{ex} は一般には局所的ではない。

結局、(2.92), (2.94), (2.98) 式より、RGM 方程式は

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu_k} \left(\frac{\partial}{\partial b_k} \right)^2 + \frac{\hbar^2 L_k (L_k + 1)}{2\mu_k b_k^2} + V_{kk}^D(b_k) - E_{rk} \right] u_k(a_k) \\ & + \int db_k G_{kk}^{\text{ex}}(a_k, b_k) u_k(b_k) = - \sum_{k' \neq k} \int db_{k'} G_{kk'}(a_k, b_k) u_{k'}(b_{k'}) \end{aligned} \quad (2.101)$$

と表される。単一チャンネルのような場合は (2.101) 式で右辺はなくなり、第 2 項の交換項を含む微分方程式になる。さらに第 1 項のみを拾った場合は直接ポテンシャルの下での相対運動の Schrödinger 方程式となる。

2.4.2 RGM と GCM の同等性

GCM にせよ RGM にせよ、元々の目標は系がクラスター状態を成しているという前提の下で、クラスター内部波動関数を殻模型を用いて表し、(近似的に) クラスター間のダイナミクスを把握することであった。即ち、これらは共にクラスター間の相対運動を記述するための手段であると言える。よって、これらは本質的には同じ相対波動関数を異なったアプローチで決定しようとしているに過ぎないと考えられるべきであるだろう。本節ではこの視点から、GCM と RGM で求めている関数が等価であることを示す。

以下では 2 クラスター系を用いて、内部波動関数が調和振動子殻模型で記述され、さらに振動子パラメータが等しいものとして考察する。

GCM では $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ を生成座標とし、 $\mathbf{R}_G = 0$ となるように座標原点を設定する。このとき、GCM 方程式は

$$\Psi^{\text{GCM}} = \int d\mathbf{R} f(\mathbf{R}) \Psi(\mathbf{R}), \quad (2.102)$$

$$\Psi(\mathbf{R}) = \left(\frac{2A\nu}{\pi} \right)^{3/4} e^{-A\nu \mathbf{X}_G^2} \mathcal{A} \left[\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \gamma) \phi(C_1) \phi(C_2) \right] \quad (2.103)$$

となる．(Γ, ϕ などは以前に定義した通り) ここで (2.103) 式にある \mathbf{R} は反対称化演算子の影響を全く受けないことに注意する．(\mathbf{R} は初めに与えられたパラメータであったので) このとき, (2.102), (2.103) 式より, GCM 波動関数は

$$\psi^{\text{GCM}} = \left(\frac{2A\nu}{\pi} \right)^{3/4} e^{-A\nu \mathbf{x}_G^2} \mathcal{A} \left[\int d\mathbf{R} f(\mathbf{R}) \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \gamma) \phi(C_1) \phi(C_2) \right] \quad (2.104)$$

で与えられる．(2.88) 式の RGM 波動関数と (2.104) 式の GCM 波動関数を比較してみよう．まず, RGM では相対波動関数にのみ注目していたので, (2.104) 式における重心関数を取り除いた関数を考える．さらに, GCM は自明に各チャンネルに拡散可能なので, (2.88) 式で特に単一チャンネルの場合を考えればよい．このとき, GCM 波動関数におけるクラスター間の相対波動関数 χ は, (2.104) 式より

$$\chi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{R} f(\mathbf{R}) \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \gamma) \quad (2.105)$$

と関連付けられる．(2.105) 式は, GCM と RGM がそれぞれ未知関数と置いていた式が, 既知の関数との畳み込み積分によって関連していることを示している．これは GCM と RGM が等価であることに他ならない．

先にも述べたとおり, 目標はクラスター間の相対運動の波動関数を知ることであった．その意味で, χ は我々が求めるものそのものである．しかし, RGM 方程式は実際解くのは非常に困難である．そこで, より計算が容易な GCM 方程式が有力な手段となる．即ち, 予め GCM の積分核を求めておき, それを RGM の積分核に変換してやればよい．このように, GCM を用いて χ を求めることが容易になった．

3 実験

3.1 Experimental Details

今回、大阪大学核物理研究センター (RCNP) の東実験室、ENN コースの大型散乱槽において実験を行なった。散乱槽に標的、検出器を設置し、AVF サイクロトロンで加速されたビームを用いて、測定した。RCNP の施設図を図 9 に表す。

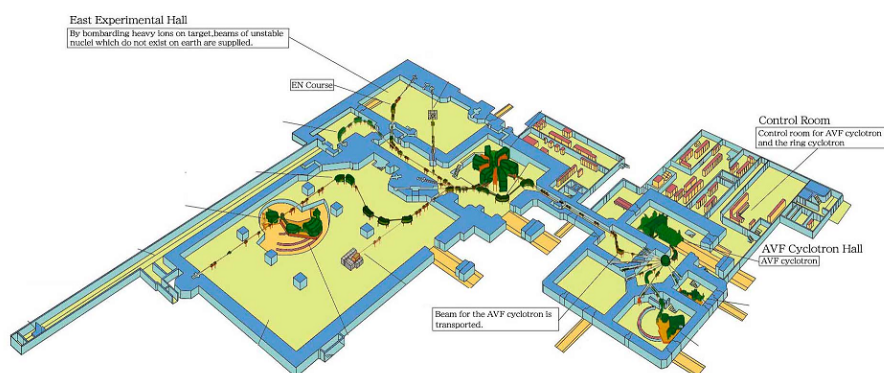


図 9 RCNP 施設図

3.1.1 実験セットアップ

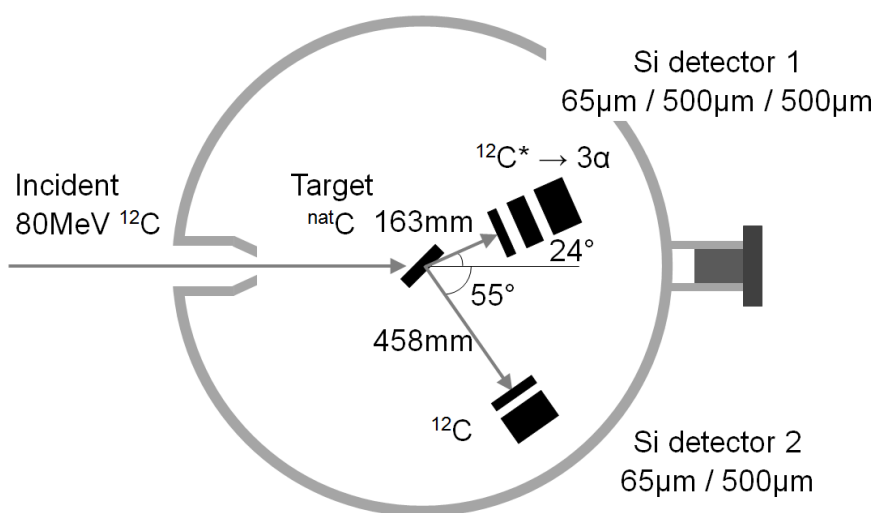


図 10 実験装置配置

実験装置の略図を図 10、実際の散乱層内の写真を 11 に示した。AVF サイクロトロンで加速された ^{12}C ビーム (A) を ^{nat}C 標的 (B) に照射し、前方に散乱される励起された $^{12}\text{C}(C^*)$ から崩壊した 3つの α 粒子を

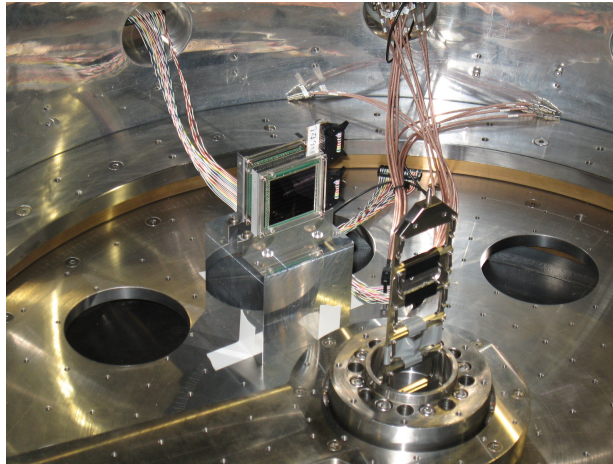


図 11 実験装置配置の写真

検出器 1 で測定した。さらに、反跳された $^{12}\text{C}(\text{D})$ を検出器 2 で測定した。

3.1.2 検出器

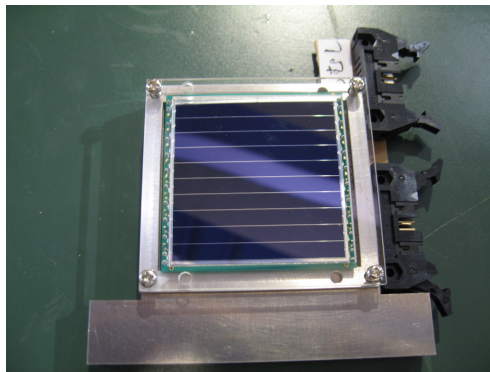


図 12 検出器

検出器 1 には $65\ \mu\text{m} + 500\ \mu\text{m} + 500\ \mu\text{m}$ の Si 検出器を 3 枚重ねて使用した。それぞれの Si 検出器は $50\ \text{mm} \times 50\ \text{mm}$ の有感領域を持ち、順に 16 分割の $65\ \mu\text{m}$ 検出器、10 分割のストリップ型 $500\ \mu\text{m}$ 検出器、分割の無い Pad 型 $500\ \mu\text{m}$ 検出器を用いた。 $65\ \mu\text{m}$ 検出器は水平方向の位置を、ストリップ型の $500\ \mu\text{m}$ 検出器は鉛直方向の位置をそれぞれ測定できるように設置した。一方、検出器 2 については 16 分割の $65\ \mu\text{m}$ ストリップ型検出器と Pad 型の $500\ \mu\text{m}$ 検出器を重ねて使用した。 $65\ \mu\text{m}$ 検出器は水平方向の散乱角度を測定できるように設置した。

今回はシリコン検出器のチャンネル数が多いため、フラットケーブルを用いて真空の散乱槽からまとめて信号を取り出そうと考えた。しかし、フラットケーブルと接合可能な真空対応のコネクタが入手できなかったため、通常のコネクタを用いて真空中から信号を取り出せるように、検出器に取り付けるソケットを自作し、真空フランジにソケットを取り付ける際、真空を保つために接着剤で隙間を埋めた。(図 13)

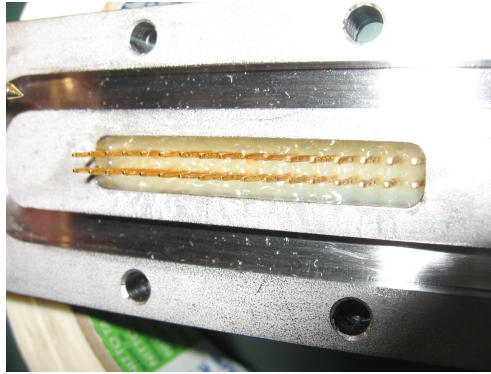


図 13 接着剤で埋めた結合部分

3.1.3 標的

All mm の板を用いて、標的を作成した。本実験では 15ϕ , 0.030 mg/cm^2 の ^{nat}C を標的として用いた。

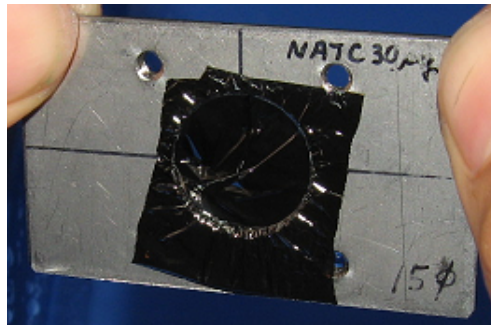


図 14 標的

ラダーに標的と線源 ^{241}Am を取り付け、高さ、角度を調節してビームライン上に実験目的に合わせて調節した。検出器 1 と標的の距離を 163 mm, 検出器 2 は標的から 458 mm の位置に設置した。

3.1.4 入射エネルギー

^{12}C から崩壊した α 粒子が検出器 1 の $500 \mu\text{m}$ 検出器の中で停止するように要請すると α 粒子のエネルギーは約 20 MeV となるので、 C^* の運動エネルギーは約 60 MeV とするべきであると考えた。一方、D の運動エネルギーが 10 MeV 以上となるのが望ましいと考えた。注目する ^{12}C の励起エネルギーが約 10 MeV であることを考慮して、入射エネルギーを 80 MeV と決めた。

過去の R. G. Stokstad らの実験で測定された入射エネルギー約 80 MeV (78.85 MeV) における 2_1^+ 状態 ($E_x = 4.44 \text{ MeV}$) の角度分布を図 15 に示す。(この実験では D が励起されている)。 2_1^+ への断面積は $\Delta\theta_{cm} \sim 8.3^\circ$ の間隔で極大と極小を繰り返しており、 2_2^+ 状態を探索する上では 2_1^+ への励起断面積が極大となる角度で測定する必要がある。先の段落で述べた運動条件 ($T_A = 80 \text{ MeV}$, $T_C = 60 \text{ MeV}$, $T_D = 10 \text{ MeV}$, $E_x = 10 \text{ MeV}$) を実現しつつ 2_1^+ 状態への断面積が極大となるのは 4 回目のピーク ($\theta_{cm} = 50^\circ$) であり、このときの運動量移行は 2.8 fm^{-1} である。 2_1^+ 状態への微分断面積が極大となる運動量移行と 2_2^+ 状態への微分断面積が極大となる運動量移行が同じであると仮定し、検出器 1 を 24° (lab 系) に、検出器 2 を 55°

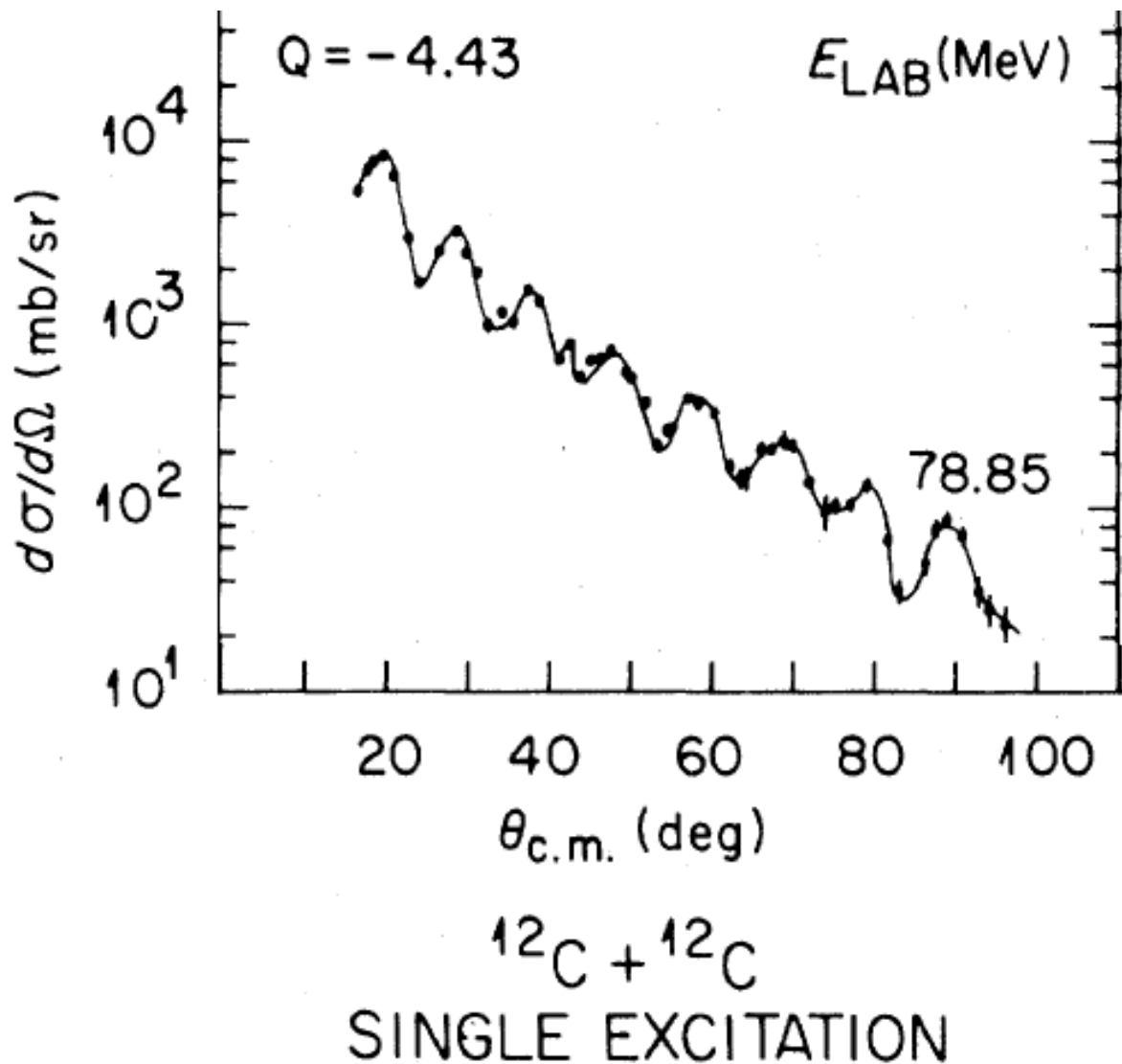


図 15 2_1^+ 状態の角度分布

(lab 系) に設置した.

3.1.5 ビームタイム推定

取量の推定にあたっては、 ^{12}C の 2_1^+ 状態に対する微分断面積と 2_2^+ 状態に対する微分断面積はビームの種類およびエネルギーによらず、比例関係にあると仮定した. M. Itoh et al. の論文によるとその比は 30 倍であるから、 2_2^+ 状態に対する微分断面積は入射エネルギー 80 MeV での 2_1^+ 状態における微分断面積を約 1/30 倍であると推定した. ここでは入射エネルギー 78.85 MeV における 2_1^+ 状態における微分断面積の 4 回目のピークにおける実験値 6.6 mb/sr(cm 系) を用いて、 2_2^+ 状態に対する微分断面積は 0.22 mb/sr(cm 系) と推定した.

散乱粒子数は微分断面積 (lab 系)(cm^2/sr) \times 入射粒子数 (/h) \times 標的の単位面積当たりの粒子数 (/ cm^2) \times

立体角 (sr) で求めた。ここではビーム量を 10 pnA とした。また、前述のシミュレーションから 3 つの α 粒子を全て検出できる確率は 2 割程度であると期待されたので、以上から 1 時間当たりの取量は約 600 イベントと予測した。5000 イベント集めるには約 8 時間の測定が必要である。本研究では、 $2\frac{1}{2}$ の微分断面積が極大となる角度とその前後で極小となる角度の計 3 つの角度について測定を行ったので、合計 24 時間の測定時間を必要とした。

3.1.6 検出器と ADC, TDC の対応

検出器の各 ch と ADC, TDC の対応表を表 1 に示す。

表 1 検出器と ADC, TDC の対応表

	$\alpha 65 \mu\text{m}$	$^{12}\text{C}65 \mu\text{m}$	$\alpha 500 \mu\text{m}$	$^{12}\text{C}500 \mu\text{m Pad}$	$\alpha 500 \mu\text{m Pad}$	DEAD
全 ch 数	(16)	(16)	(10)	(1)	(1)	(4)
ADC	16-1	32-17	33-42	47	48	43-46
TDC	64-49	80-65	81-90	91	92	93-96

$65 \mu\text{m}$ の検出器はコネクタの都合により、シグナルが逆転していることに注意した。DEAD は読み取れなかった ch を示している。

3.2 モジュール

3.2.1 規格

- CAMAC 規格

CAMAC 規格とは、コンピュータを使用してデータを計測するにあたって原子核・素粒子分野で一般的に用いられるモジュール群の規格である。

これは背面にバス (カードコネクタによる接続部) を持つ箱 (クレート) と差し込み式のモジュールとで設計されたものであり、このバスを通じてコマンドや信号のやりとりや電源の供給を行う。

クレートには最大で 25 のモジュール差込口があるが、右端のスロットにはコントロール専用のクレートコントローラが取り付けられる。

- NIM 規格

NIM 規格とは Nuclear Instrument Modules の略であり、米国原子力委員会 (AEC) によって定められた信号レベルやコネクタの形状などについての標準規格を指す。

この規格に準拠した回路は NIM モジュールと呼ばれ、NIM ピンと呼ばれる電源クレートに装着し背面から電気を供給して用いられる。

以下ではクレートに取り付ける個々のモジュールについて解説する。

3.2.2 モジュール

- 独立したモジュール

以下のモジュールは前述の規格とは別に、独立して作動するモジュールである。

– Mesytec MSI-8 (Pre Amp)

Mesytec MSI-8 は 8ch の入力を持つ小型のプリアンプであり、integrated timing filter amplifiers としての機能も持つモジュールである。MSI-8 は NIM 及び CAMAC のどちらの規格でもなく独立して動作する。また信号の出入力には全て Lemo ケーブルを用いる。

今回の実験では Si500 μm の検出器から送られてくる信号を増幅するために 2 台の MSI-8 を用いている。図 16 が実際に使用した 2 台の MSI-8 の写真である。

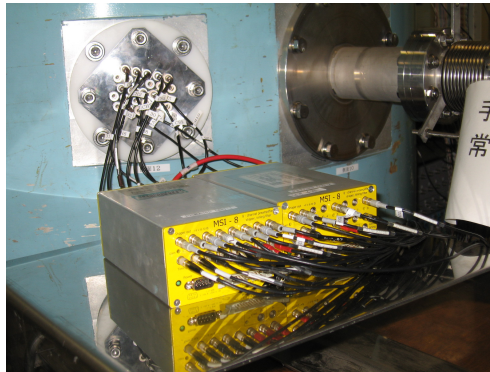


図 16 MSI-8

– Mesytec MPR-32 (Pre Amp)

MPR-32 は 32ch の入力を持つプリアンプであり、ストリップの多い Si 検出器を使用する場合に用いられる。

MSI-8 同様、MPR-32 も NIM 及び CAMAC のどちらの規格でもなく独立して動作するモジュールである。16ch のフラットケーブルに対応している。

今回の実験では Si65 μm の検出器から送られてくる信号を増幅するために用いている。

● NIM モジュール

以下のモジュールは NIM 規格に沿ったモジュールである。

– Mesytec STM-16+ (Discriminator)

ある一定のしきい値を超えた高さのアナログ信号を、ロジックパルスに変換し出力するモジュールをディスクリミネータと呼ぶ。STM-16+ は 16ch のフラットケーブルに対応したディスクリミネータであり、同時にアンプとしての機能も持つ。今回の実験では上述の MPR-32 と合わせて、MSI-8 と同様の動きをさせている。

– Phillips 715 (Discriminator)

Phillips 715 とは CFD(Constant Fraction Discriminator) という方式のディスクリミネータである。

送られてきたシグナルのタイミングを観測するにあたって、図 17 のように立ち上がりの位置を一定の高さを越えた時とするとシグナルの大きさによってズレが生じて時間分解能が悪くなってしまふ恐れがある。そのため図 18 のように波高に対して一定の割合に達した地点をシグナルの立ち上がりの位置とすることが望ましい。そこでこのモジュールでは以下の操作を行って時間分解能を高

めている。

図 19 で示されているように、まず入力された信号 (波高を V_a とする) は 2 つの信号を作る。一つは一定の割合 kV_a から波高 V_a までにかかる時間 t だけ遅らせた信号 V_d (図 19 上段の波) であり、もう一つは $-k$ をかけて逆符号にした信号 V_c (図 19 中段の波) である。この 2 つの信号 V_d と V_c を足し合わせた信号 $V_d + V_c$ (図 19 下段の波) の 0V の位置を読み取ることで、時間分解能を高めている。この手法によって ± 20 ps 程度の精度で計測することを可能にしている。

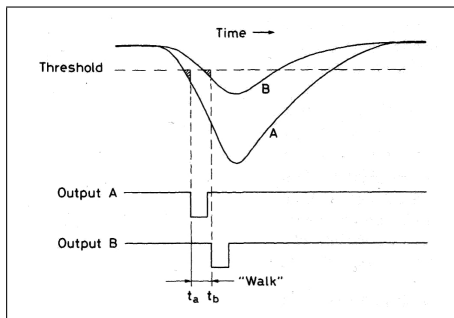


図 17 波高の絶対値で判別した場合の立ち上がり位置

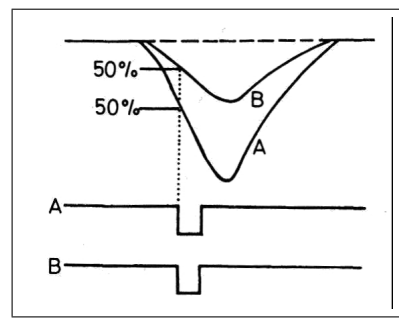


図 18 波高の割合で判別した場合の立ち上がり位置

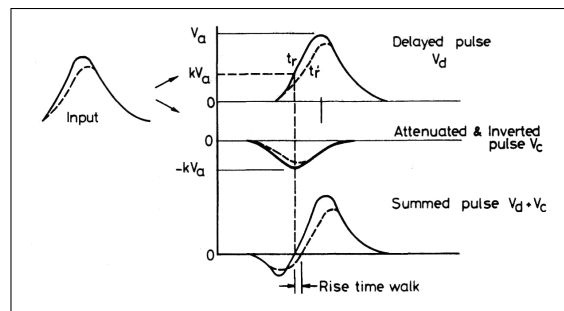


図 19 CFD での立ち上がり位置の判別方法

図 17～図 19 は参考文献 [?] より引用

– LeCroy 429A (Logic fan-in & fan-out)

出力するロジック信号を複数に分岐したり，入力する複数のロジック信号の論理和をとることに用いられるモジュール。

NIM 信号は後述の通り、電流でロジックが規定されている。そのため 429A を用いなければ信号を分岐 (合流) させることはできない。

– LeCroy 4616 (NIM-ECL Converter)

NIM 信号から ECL 信号 (あるいはその逆) に変換するためのモジュールであり，同時に 16ch 分の信号を変換することができる。

LeCroy 4303 の入力には ECL 信号が用いられるのだが、アンプに MPR-32 ではなく MSI-8 を用いた場合ディスクリミネータからは NIM 信号が出力される。そのためこのモジュールを用いて NIM 信号から ECL 信号への変換を行っている。

* NIM 信号

NIM 信号は、NIM 規格に基づいた原子核・素粒子物理分野において広く一般的に用いられている信号である。

* ECL 信号

ECL とは Emitter Coupled Logic の略であり、高エネルギー分野において広く使われるようになっている信号である。差動増幅回路という 2 つの入力信号の差を一定の割合で増幅する回路を用いることで、高速性を実現している。

NIM 信号と ECL 信号はそれぞれ図 20 のような深さのロジック信号であり、表 2 及び表 3 にある通り電圧が深くなっている箇所が YES を意味している。

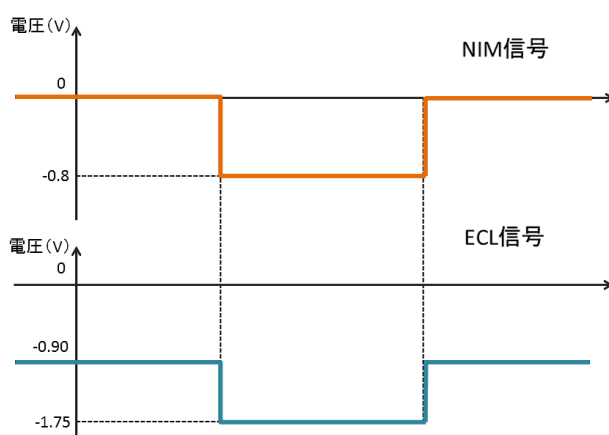


図 20 NIM 信号と ECL 信号

信号の種類	電流	電圧の大きさ (50 Ω)
1 (YES)	-16 mA	-0.8 V
0 (NO)	0 mA	0 V

表 2 NIM 信号の電圧

信号の種類	電圧の大きさ (50 Ω)
1 (YES)	-1.75 V
0 (NO)	-0.90 V

表 3 ECL 信号の電圧

– テクノランド N-OR 425 (Visual Scaler)

図 21 で示されているテクノランド社製の Visual Scaler を実験中用いた。このモジュールは 1ch につき 8 桁の値を表示し、全部で 8ch 分の値を同時に計測することのできる高速スケーラーであ

る。設置した箇所に送られてきた信号をカウントし LED で表示する。
カウンターがオーバーフローしたときは、CARRY OUT を出力すると共にオーバーフローフラグ（7セグ最下位桁の右下）を点灯させるようになっている。
このモジュールの設置場所と役割に関しては、次節の図 26 にて触れる。



図 21 Visual Scaler

- CAMAC モジュール

以下に示すモジュールは CAMAC 規格に沿ったモジュールである。

- LeCroy 3351 (Analog to Digital Converter)

LeCroy 3351 は今回の実験に用いたピークを検知する ADC(Analog to Digital Converter) であり、アナログで送られてくる信号をデジタルな値に変換する。

3351 内部にはアナログ波高をデジタル値に変換する回路は 1 台しか搭載されていないが、入力信号の波高を記録する 8 つのアナログメモリを利用することで 8ch の処理を逐次行っている。

また 3351 には ULD や LLD といった設定した数値以上 (以下) の信号を無視する機能や、DC offset によって入力信号に一定値を加算する機能などが組み込まれているが今回の実験では利用していない。

- LeCroy 4303 (Time to FERA Converter)

4303 は TFC(Time to FERA Converter) という種類のもので、図 22 の橙のように、start シグナルを受信してから stop シグナルを受信するまでのあいだ一定の電流を流し続けるモジュールである。

16ch を同時に処理することが可能であり、共通の start からそれぞれの stop(あるいはそれぞれの start から共通の stop) まで電流を流してゲートを生成する。

LeCroy 4300 と組み合わせることで TDC(Time to Digital Converter) と同様の働きをするが、こ

のモジュールを用いたほうが単体の TDC と比べて精度よく計測することができる。

– LeCroy 4300 (Fast Encording Readout ADC)

入力された電荷を積分した値を返すモジュールであり、実験では 4303 によって流れる定格電流を積分する。図 22 では FERA によって積分される箇所を橙斜線で示している。

ここで本実験では積分するゲートの深さを 42 mV に設定した。これは次の信号が来るまでの時間 (width : 600 ns) を積分したときにぎりぎりオーバーフローを起こさないように設定した結果決められた値である。

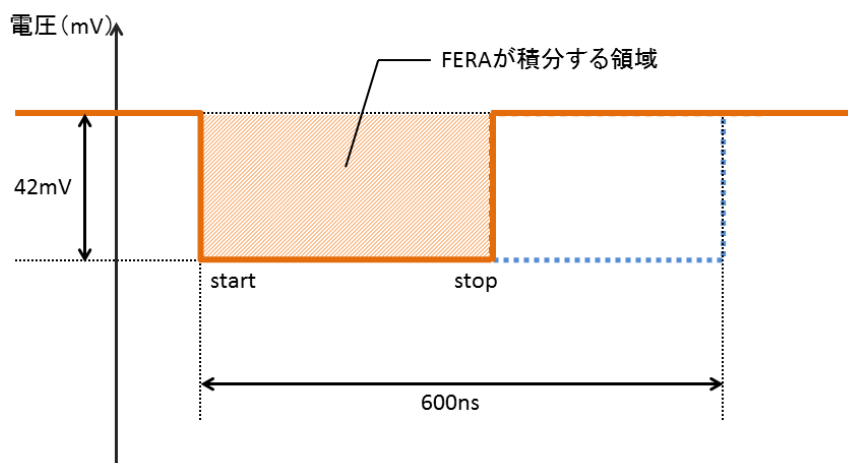


図 22 4303 から送られる電流と FERA の積分範囲

図 23～図 25 は Lecroy4616、Lecroy4303 及び FERA の写真である。

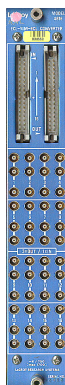


図 23 Lecroy 4616



図 24 Lecroy 4303

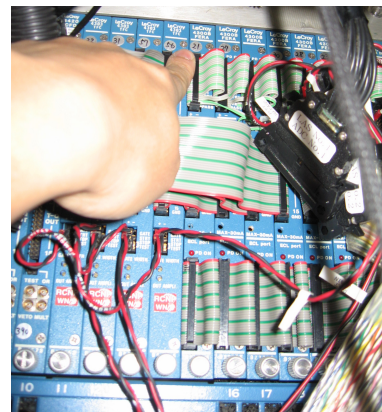


図 25 LeCroy 4303 及び FERA

3.3 回路の流れ

本実験では図 26 に示す回路を組んで実験を行った。

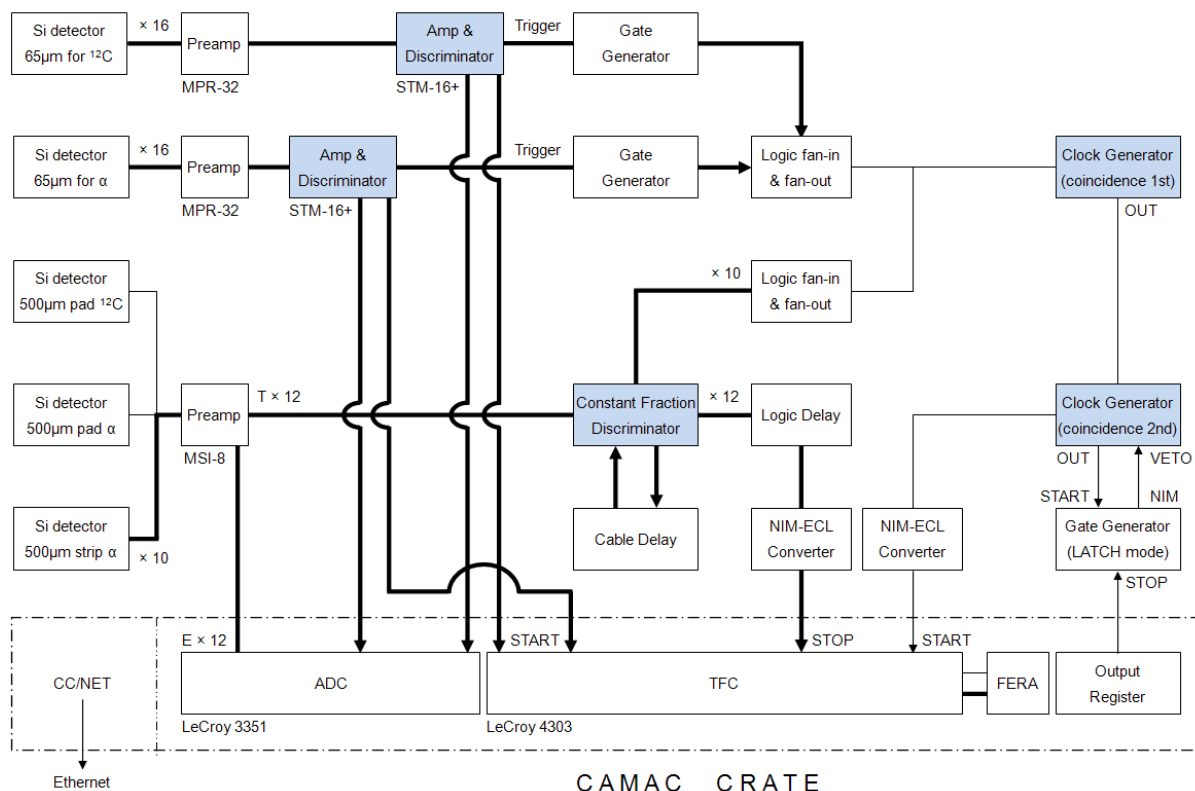


図 26 回路図

図 26 の中で一点鎖線で囲まれた部分は CAMAC CRATE(及び CAMAC モジュール) を、青く示されたモジュールは Visual Scaler を設置した箇所を示している。Visual Scaler を用いれば、設置したモジュールに入ってくるカウント数を実験中にも確認することができる。

さらに同じく図中の「T×12」「E×16」といった印は、それぞれタイミング情報を伝える配線が 12 本、エネルギー情報を伝える配線が 16 本束になっている様子を指している。

以下ではどのような目的で回路が組まれているかについて記述する。

- エネルギー情報

エネルギーに関する情報をもつアナログ信号は各検出器からつながるアンプ(プリアンプ)を経由して、3351(ADC)に送られる。

3351 でアナログ信号の波高はデジタル値に変換されデータとして蓄積される。

- タイミング情報

タイミングに関する情報は Clock Generator でコインシデンスをとられ TFC に送られる。
この信号が届いた時だけ観測する (この信号をゲートとする) よう回路を組むことによって、それぞれの検出器に同時に粒子が入射した事象のみ観測することができる。

- CAMAC 処理中のシグナル停止

2つ目の Clock Generator は CAMAC の処理中に次のシグナルが入ってくることを防ぐ役割を持つ。
具体的には、1つ目の Clock Generator から直接送られてきた信号 (信号 A) が Gate Generator を経由して送られてきた veto 信号 (信号 B) によって制御されている。

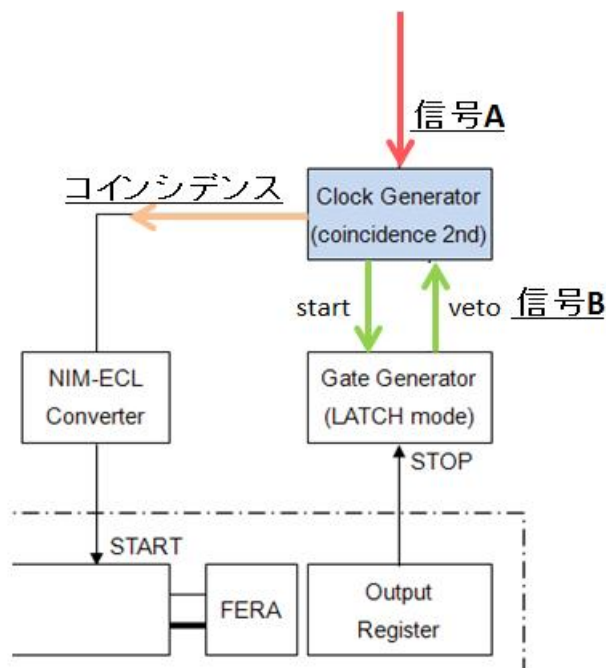


図 27 信号のコインシデンスと Output Register

信号 A が図 27 の Gate Generator(coincidence 2nd)(以下 GG2nd) に入ると GG2nd が Gate Generator(LATCH mode)(以下 GGlatch) を作動させ、信号 B で GG2nd に veto がかかる。veto がかかっている間は GG2nd は信号を出力しないため、トリガーがかからなくなる。また GGlatch は Output Register からの解除信号によって LATCH が解除される。

以上の仕組みから Output Register からの解除を CAMAC の処理の終了に伴わせることによって、CAMAC の処理中に Clock Generator が信号を送らない回路を構築している。

- トリガー

検出器のトリガーには ^{12}C 65 μm の信号を用いている。

3.4 検出器のスリットと角度の対応

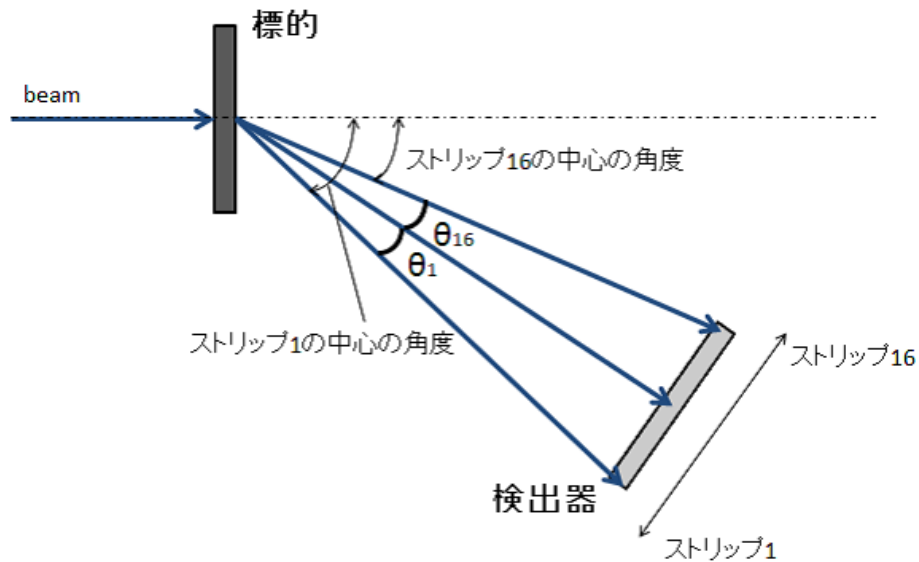


図 28 同一検出器内でのスリットによる角度の違い

概図 28 のようにスリットごとに角度が異なるため、計算しておく必要がある。

ここで検出器中心からの角度のズレ (図 28 では θ_1, θ_{16}) は、標的からの距離と検出器中心からの距離のズレから三角比でもとめることができる。

従って、スリットごとの角度は検出器中心の角度からのズレを考慮することによって求めることができる。

^{12}C の検出器の位置は標的から距離 458 mm, 角度 55°

α 粒子の検出器の位置は標的から距離 150 mm, 角度 24°

スリット間の間隔は 3.135 mm

以上の実験条件から、各スリットごとの角度を表にまとめたものが次の表である。

距離 458 armの位置(°) 55
スリット間隔 3.125

スリット	検出器中心からのズレ(mm)	検出器中心からのズレ(°)	スリット中心の角度(°)
1	23.44	2.93	57.93
2	20.31	2.54	57.54
3	17.19	2.15	57.15
4	14.06	1.76	56.76
5	10.94	1.37	56.37
6	7.81	0.98	55.98
7	4.69	0.59	55.59
8	1.56	0.20	55.20
9	-1.56	-0.20	54.80
10	-4.69	-0.59	54.41
11	-7.81	-0.98	54.02
12	-10.94	-1.37	53.63
13	-14.06	-1.76	53.24
14	-17.19	-2.15	52.85
15	-20.31	-2.54	52.46
16	-23.44	-2.93	52.07

表4 65 μm 検出器 (¹²C) のストリップと角度の対応表

距離 150 armの位置(°) 24
スリット間隔 3.125

スリット	検出器中心からのズレ(mm)	スリット中心からのズレ(°)	スリット中心の角度(°)
1	23.44	8.88	32.88
2	20.31	7.71	31.71
3	17.19	6.54	30.54
4	14.06	5.36	29.36
5	10.94	4.17	28.17
6	7.81	2.98	26.98
7	4.69	1.79	25.79
8	1.56	0.60	24.60
9	-1.56	-0.60	23.40
10	-4.69	-1.79	22.21
11	-7.81	-2.98	21.02
12	-10.94	-4.17	19.83
13	-14.06	-5.36	18.64
14	-17.19	-6.54	17.46
15	-20.31	-7.71	16.29
16	-23.44	-8.88	15.12

表5 65 μm 検出器 (α 粒子) のストリップと角度の対応表

4 Simulation

4.1 目的

本実験でのシミュレーションの目的は、主に以下の2点である。

- 検出器設置位置の妥当性の検証
- 検出効率の見積もり

また、適当に誤差を乗せた模擬データを作成し、解析の予行演習を行った。

なお、本章の”検出器”は、特に指定が無い場合、 3α を検出する3枚の連続したシリコン検出器群を指す。

4.2 概略

検出器の設置角度、 ^{12}C 用の検出器群の距離は、前節において決定された。ここでは、ビーム衝突位置からの、 3α 用の検出器の設置距離を決定する。

ハードウェア、ソフトウェアの両側面より、検出された全イベントを用いることができない。具体的な条件は以下の通り。

- 検出器がオーバーレンジしてしまう場合があるため、また、解析手順が煩瑣になるため、2つ以上の α 粒子が1つのストリップに入る場合は除外する
- エネルギー分解能を保証するため、ちょうど3つの α 粒子が飛んでくるイベントのみを選ぶ

ちょうど3つの α 粒子を検出する確率と、 α 粒子がばらばらのストリップに入る確率は、設置距離に関して、トレードオフの関係にある。

4.2.1 アルゴリズム

次に、実装したアルゴリズムについて簡単に述べる。

■**3体分裂** 連続した2回の2体分裂として実装した。2体分裂後の粒子のエネルギーは、エネルギー保存則・運動量保存則より導いた。2回の分裂過程でその位置は変わらないものとし、(重心系での)見込み角 θ 、回転角 ϕ はランダムとした。返り値は実験室系での速度ベクトルである。

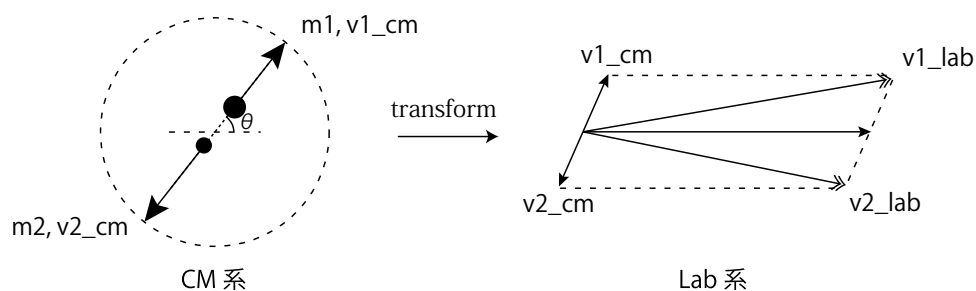


図 29 2体分裂概念図

$m_1, m_2, \theta, \phi, \Delta E$ を与え, 粒子 1,2 のエネルギーを得るのに用いた計算式:

$$|\mathbf{p}|^2 = 2\Delta E \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.1)$$

$$E_{1,cm} = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m_1} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{E}_{1,cm,rot} = E_{1,cm} \cdot [\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta] \quad (4.3)$$

$$\mathbf{E}_{2,cm,rot} = \mathbf{E}_{1,cm,rot} \cdot \left(-\frac{m_1}{m_2} \right) \quad (4.4)$$

エネルギー保存則より, 実験室系での速度ベクトルを求めた.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{\text{initial}} + \sqrt{\frac{E_{1,cm,rot}}{m_1}} \frac{\mathbf{E}_{1,cm,rot}}{|\mathbf{E}_{1,cm,rot}|} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\text{initial}} + \sqrt{\frac{E_{2,cm,rot}}{m_2}} \frac{\mathbf{E}_{2,cm,rot}}{|\mathbf{E}_{2,cm,rot}|} \quad (4.6)$$

以下, 同様の計算を ${}^8\text{Be}$ に対して行い, 3 つの α 粒子の速度ベクトルを得た.

■**模擬データ化** 上で得られた α 粒子の速度ベクトルを, 検出されるであろうデータに変換した. すなわち, 1 つの速度ベクトル $[v_x, v_y, v_z]$ を $[x, y, \text{energy}]$ に変換し, x, y は, 検出器のストリップの中心位置のいずれかの値を取るようにした. また, energy には計測誤差として, 80 keV の幅を持たせた.

■**invariant mass の計算** 模擬データから, ${}^{12}\text{C}, {}^8\text{Be}$ の invariant mass を, 次式 (${}^{12}\text{C}$ の場合) に従って計算した. 添字の i は 3 つの α 粒子に対応する.

$$\mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_i/c^2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.7)$$

$$E_i = \sqrt{M_\alpha^2 + c^2|\mathbf{p}_i|^2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.8)$$

$$E_{\text{sum}} = \sum_i E_i \quad (4.9)$$

$$\mathbf{p}_{\text{sum}} = \sum_i \mathbf{p}_i \quad (4.10)$$

$$\text{invariant mass} = \sqrt{E_{\text{sum}}^2 - c^2|\mathbf{p}_{\text{sum}}|^2} \quad (4.11)$$

これに従って, エネルギー分解能を求めたところ, 次図のようになった.

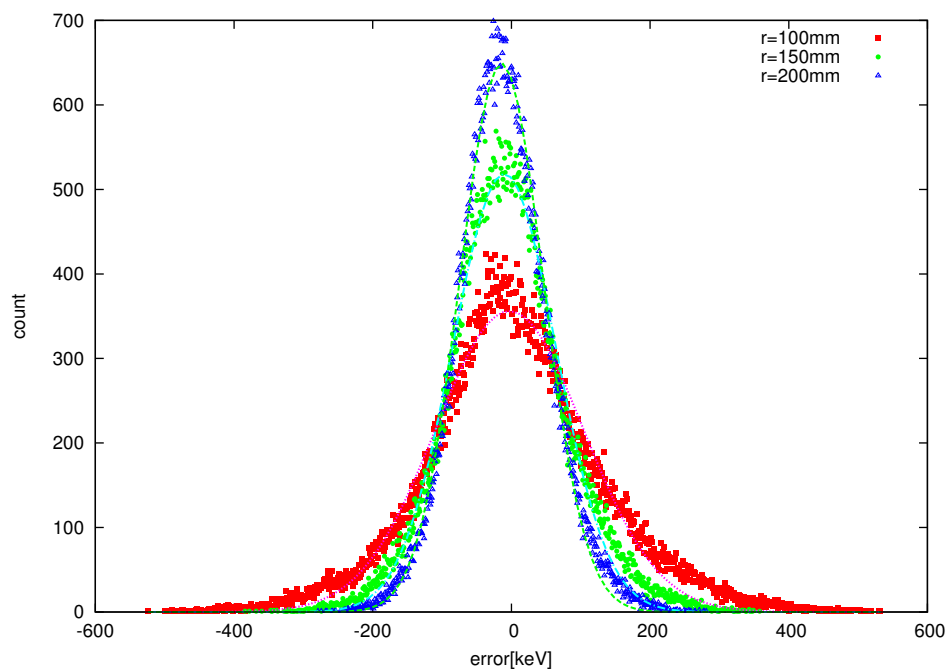


図 30 設置距離に対する ^{12}C の不変質量のエネルギー分解能 ($\text{Be } 0^+$ 経路)

4.3 結果

検出器の breakup point からの距離に対して, (1) 同じストリップに 2 個以上入らない確率, (2) 3 つの α 粒子を検出する確率, (3) およびこれらの Intersection を, モンテカルロ法により求めた. 結果を次に示す (図 31, 32).

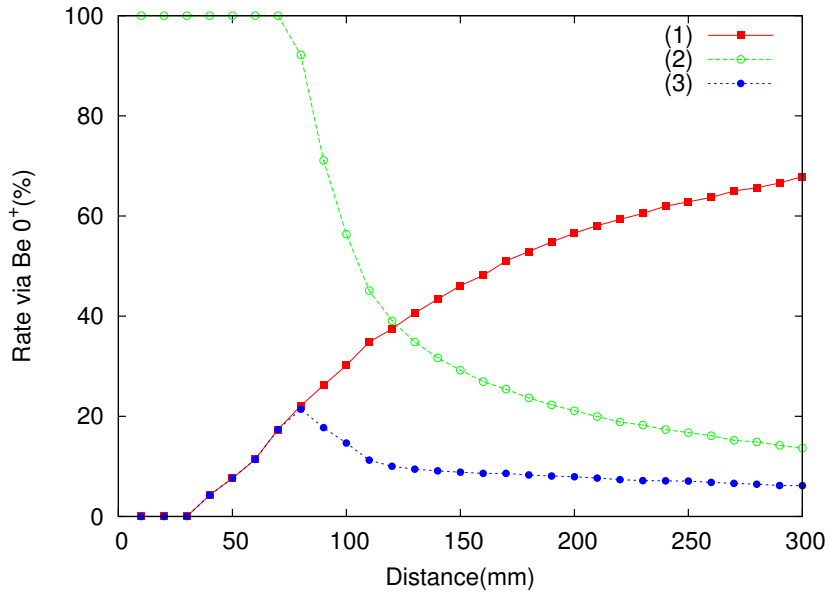


図 31 設置距離に対する検出効率 (Be 0⁺ 経由)

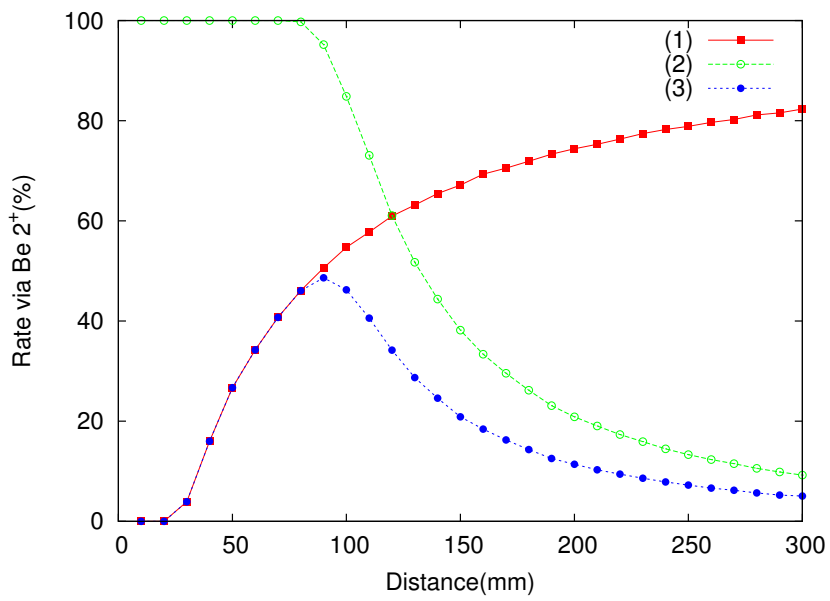


図 32 設置距離に対する検出効率 (Be 2⁺ 経由)

これより、100 mm-300 mmの間では検出効率はさほど変わらないことが分かる。

次に、設置位置を 150 mm に決定した理由を述べる。

本実験の解析段階では、 3α の invariant mass の分解能に 200 keV を要求した。検出器の位置が 150 mm 位置よりも近いと、この分解能が得られない。

ところで、本シミュレーションでは ^{12}C , 3α の重心の軌跡は、それぞれに対する検出器の中心を通るものとしている。実際には、運動学に従って、 ^{12}C のエネルギーによって 3α の重心の軌跡は変化する。したがって、位置が遠いと、両検出器群の coincidence をとることが困難になり、収率は図 31, 32 よりも下がる。

以上を鑑み、検出器の設置距離は breakup point から 150 mm の位置とした。

5 解析

5.1 解析手順

解析には anapaw というソフトを用いる。このソフトでは測定したデータを用いてプログラム上で計算した値をヒストグラムで表示することができる。

解析として、まず次のことを行う。

(1) 測定データを Energy Calibration と Time Calibration により物理的な値に変換する。

Energy Calibration には ^{241}Am から放射される 5.49 MeV の α 線を基準とした。さらにパルサーを用いて 1 V ずつかける電圧を増やして測定を行い、電圧と測定値が比例すると仮定し Calibration に線形性を持たせた。Time Calibration には 40 ns ごとにパルスを出す Tcal モジュールを用いた。

この変換により測定された物理量は、それぞれのストリップに来た粒子のエネルギーと検出器 2 にはじめに粒子が来てからそれぞれのストリップに粒子が来るまでの時間となる。ストリップに粒子がこない場合はエネルギー、時間ともに 0 となるように設定しておく。

(2) 1 枚目の検出器 2 のスペクトルを見て検出器 1 に向かう ^{12}C が 7.2 MeV~12 MeV 程度の励起エネルギーをもつような部分のみを選ぶ。

これは検出器 1 に向かう ^{12}C が 10.3 MeV 程度の励起エネルギーをもつことを想定しているからである。運動学により、検出器 1 に向かう ^{12}C の励起エネルギーと飛んでくる角度を決めると、検出器 2 に向かう ^{12}C の飛んでくる角度が定まればその ^{12}C のもつエネルギーは定まる。測定された検出器 2 のスペクトルを図 33 に示す。図 33 においてエネルギーが 10 MeV から 13 MeV 程度までの比較的大きな山は 9.64 MeV の励起状態を表し、その右の小さな山は 7.65 MeV、さらに右の大きな山は 4.44 MeV の励起状態を表す。これによると、図 33 においてエネルギーが 10 MeV から 16 MeV までを選択すればよいことがわかる。

(3) 得られた値のうち 1 枚目の検出器 2 に 1 つだけ粒子が来ているものを選ぶ。

粒子が来ているかどうかはそれぞれのストリップに時間の測定値が存在するかどうかで判断する。なお、ここでは粒子が ^{12}C であるかどうかは特定しない。

(4) (3) で選ばれたデータのうち 1 枚目の検出器 1 と 2 枚目の検出器 1 に粒子がいくつ来たかをカウントする。

(5) (4) で選ばれたデータのうち 1 枚目と 2 枚目の検出器 1 に粒子がそれぞれ同じ数だけ来ている場合のものから、1 枚目と 2 枚目の検出器 1 のエネルギーを用いて 65 μm の Si におけるエネルギーロスの計算から測定された粒子が α 粒子であるものを選び、測定された α 粒子のエネルギーを計算する。

エネルギーロスの計算にはベーテ・ブロッホの式を用いる [?]. 65 μm の Si に α 粒子がやってきてロスするエネルギーとロスした後にまだもっているエネルギーの相関図を図 34 に示す。本実験においてロスした後のエネルギーは 2 枚目の検出器 1 で測定している。

1 枚目と 2 枚目の検出器 1 で測定されたエネルギーが図 34 の曲線の関係になっていれば測定された粒子は

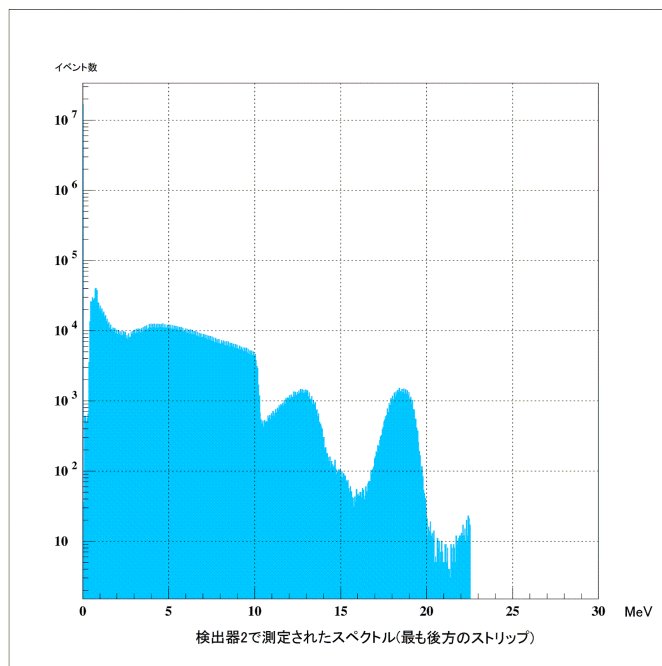


図 33 1 枚目の検出器 2 で測定されたスペクトル (最も後方のストリップ)

α 粒子である。実際にはエネルギーロスにおけるエネルギーストラグリングの効果と検出器のエネルギー分解能により、データは曲線のまわりに広がって分布する。図 35 は α 粒子が 1 つ来た場合のエネルギーロスの相関図である。この相関を基に粒子が複数個来た場合の α 粒子の特定を行う。

また、図 34 によると 1 枚目の検出器 1 でロスするエネルギーが多いと 2 枚目で測定されるエネルギーが少ない。この関係から 1 枚目で測定された 3 つのエネルギーと 2 枚目で測定された 3 つのエネルギーがそれぞれどう対応するかがわかる。図 36 のように、1 枚目の検出器 1 で測定された最も大きいエネルギーと 2 枚目の検出器 1 で検出された最も小さいエネルギーがそれぞれ同じ粒子を示し、同様に 1 枚目において最も小さいエネルギーと 2 枚目において最も大きいエネルギーが対応している。以上により測定された 3 つの α 粒子のエネルギーがわかる。

(6) (5) で選ばれた α 粒子が検出された検出器 1 のストリップ位置と標的から検出器 1 までの距離から α 粒子の運動量を決定し、invariant mass を計算する。

5.2 解析結果

α 粒子の個数ごとに測定されたイベント数を表 6 に示す。

同時にシミュレーションによる計算値も示した。これは 4 章におけるシミュレーションで得られた収率に加えて、実験で用いたビーム中の粒子数やターゲットの厚さ、密度、さらに文献から得た ^{12}C の 2_1^+ における微分断面積を用いて計算したものである [?]. なお、実験において 1 枚目の検出器 1 のストリップが使えなかったが、シミュレーションにおいてはそのことも考慮している。表 6 によると、シミュレーション結果と実験値は大きく異なっている。また、粒子数が増加するにつれて値のずれは大きくなっている。

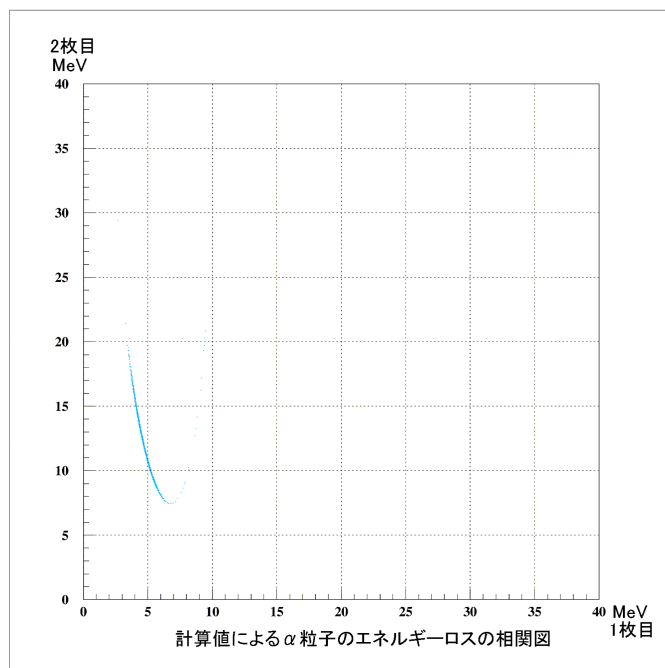


図 34 計算値による α 粒子のエネルギーロスの相関図

5.3 考察

結果によると α 粒子を 3 つ捕えたイベントは 3 つしかないので invariant mass は組まない。そこで、考察として 1 枚目と 2 枚目の検出器 1 で粒子数が異なる場合も考える。粒子数が異なるので α 粒子の特定は行わない。結果を表 7 に示す。

	実験値	シミュレーション値	実験値 / シミュレーション値
α 粒子が 1 つ	2463	17073	14 %
α 粒子が 2 つ	233	10801	2.2 %
α 粒子が 3 つ	3	2629	0.11 %

表 6 実験結果

	1 枚目が 0 こ	1 枚目が 1 こ	1 枚目が 2 こ	1 枚目が 3 こ
2 枚目が 0 こ	2913	43449	60	0
2 枚目が 1 こ	2390	13057	234	0
2 枚目が 2 こ	2254	2647	943	3
2 枚目が 3 こ	145	536	764	3

表 7 粒子数が異なる場合も含めた解析結果 (粒子は特定しない)

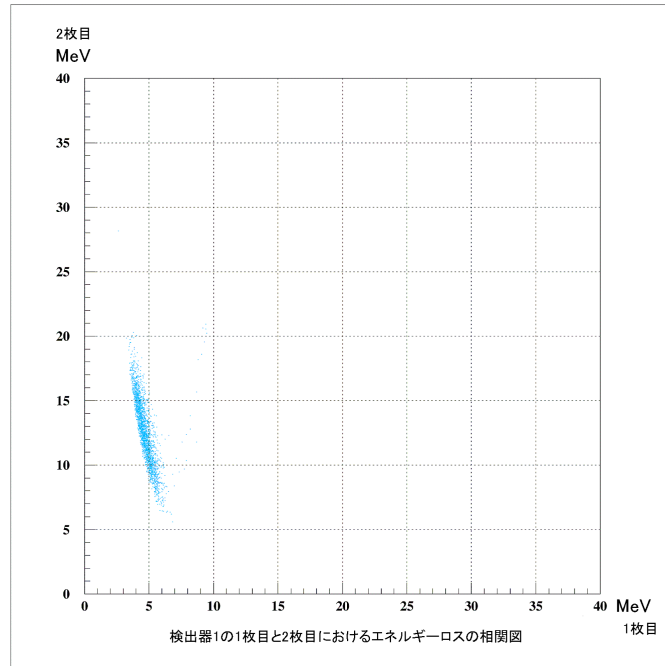


図 35 検出器 1 に α 粒子が 1 つ来た場合のエネルギーロスの相関図

	実験値	シミュレーション値	実験値/シミュレーション値
α 粒子が 1 つ	2473	17073	14 %
α 粒子が 2 つ	1047	10801	9.7 %
α 粒子が 3 つ	24	2629	0.91 %

表 8 とりこぼしとクロストークを考慮した解析結果

これによると、1 枚目の検出器 1 で 1 つの粒子を捕えて 2 枚目の検出器 1 で 2 つの粒子を捕えたイベントは 2647 イベントあり、同様に 1 枚目の検出器 1 で 2 つの粒子を捕えて 2 枚目の検出器 1 で 3 つの粒子を捕えたイベントは 764 イベントある。これは 1 枚目の検出器 1 がとりこぼしをしていることを示している。

とりこぼしの中に α 粒子を捕えたイベントがないかどうかを調べる。1 枚目と 2 枚目の検出器 1 で捕えた粒子が α 粒子であると仮定したときに想定される 2 枚目の検出器 1 で捕えるエネルギーが実際に測定されたエネルギーと一致してかつ、2 枚目の検出器 1 で捕えた残りのエネルギーが α 粒子が 2 枚目の検出器 1 で捕えるエネルギー (MeV から MeV の間) であれば、 α 粒子であると考えられる。

また、1 枚目の検出器 1 で 2 つの粒子を捕えて 2 枚目の検出器 1 で 1 つの粒子を捕えたイベントは 234 イベントあり、同様に 1 枚目の検出器 1 で 3 つの粒子を捕えて 2 枚目の検出器 1 で 2 つの粒子を捕えたイベントは 3 イベントある。これは 1 つの粒子が 1 枚目の検出器 1 の隣り合う 2 つのストリップを通過していることを示す (クロストークと呼ぶ)。クロストークの中に α 粒子を捕えたイベントがないかどうかを調べる。1 枚目で通過したストリップが隣り合っている場合にその 2 つのストリップを 1 つの粒子が通過したと考えて α 粒子の特定を行う。

以上の考察を加えた数値を表 8 に示す。

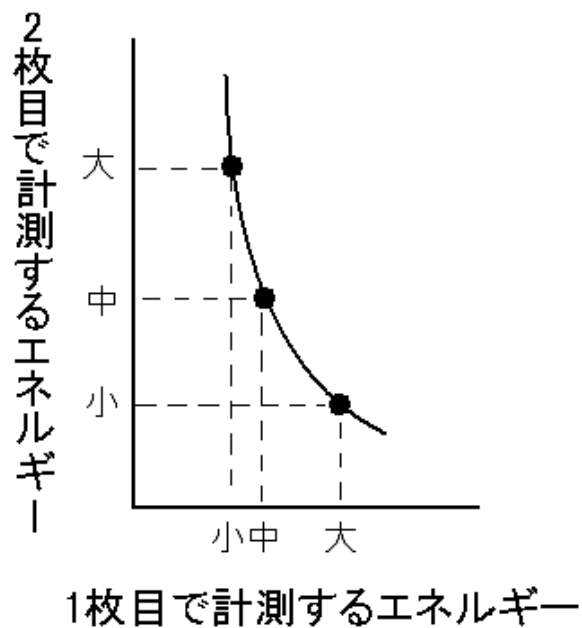


図 36 検出器 1 に 3 つ粒子が来た場合の 1 枚目と 2 枚目でそれぞれ計測されたエネルギーの対応

とりこぼしとクロストークの可能性を考慮してもシミュレーションと実験値は一致しない。この原因としてシミュレーションにおいて反応で生じる α 粒子の重心が常に検出器の真ん中であると仮定していることがあげられる。重心が広がることにより α 粒子の広がりも大きくなり、検出器の外に粒子が飛んでいったと考えられる。また、ストリップが 1 つ使えないことを考慮しても粒子をとりこぼしていることを説明できていないことから、1 枚目の検出器 1 が正常に動作していないことが考えられる。

6 謝辞

今回の卒業研究では、実験の立案から解析に至るまで、川畑准教授、TA の横田さんには全面的にサポートしていただきました。また、理論担当の教官である延與准教授、TA の中野さんにはクラスター理論を中心に、原子核物理学の基本から丁寧に教えていただきました。大阪大学での本実験を行うに当たって、RCNP の方々にはビームタイムを配分していただき、中でも銭廣さんは実験を手伝ってくださいました。RIKEN の青井さん、大津さん、黒川さんはシリコン検出器と回路を貸してくださいました。皆様のご協力に心から感謝致します。

参考文献

- [1] 高田健次郎, 池田清美: 原子核構造論 (朝倉書店, 2002) 第 4 章.
- [2] E. Uegaki, Prog. Theor. Phys. **57** (1977) 4.
- [3] M. Kamimura, Nucl. Phys. **A351** (1981) 456–480.
- [4] A. Tohsaki *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 19.
- [5] M. Itoh *et al.*, Nucl. Phys. **A738** (2004) 268–272.
- [6] O. U. Fynbo *et al.*, NATURE **433** (2005) 136–139.
- [7] R. G. Stokstad *et al.*, Phys. Rev. C **20** (1979) 655–669.
- [8] William R. Leo: Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments: A How-To Approach (1994).