同種粒子 第 2 量子化

矢野 隆之

Last Update: 2020 年 5 月 12 日

1　第 2 量子化ってなんなん?

第 2 量子化 → 第 2? ... 第 1 は?

第 1 量子化 (ざっくり)

N 個のテンソル積

$$\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle$$

を考えて, これにボソンであれば対称になるように, フェルミオンであれば反対称になるように制限を加えて扱う.
ボソンであれば,

$$\hat{\mathscr{S}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{\sigma\in S_N}\left|\varphi_{n_{\sigma(1)}}\right\rangle\left|\varphi_{n_{\sigma(2)}}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_{\sigma(N)}}\right\rangle$$

フェルミオンであれば,

$$\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{\sigma\in S_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\left|\varphi_{n_{\sigma(1)}}\right\rangle\left|\varphi_{n_{\sigma(2)}}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_{\sigma(N)}}\right\rangle$$

N 個のテンソル積を考えるので今までやってきたことと同じ.

第 2 量子化 (ざっくり)

生成・消滅演算子 $\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_n$ を導入して, N 個の粒子がある系を考える. 粒子が 1 つもない状態 $|0\rangle$ に生成演算子 $\hat{a}_n^\dagger$ を N 個作用させた状態として N 体系を記述する.
演算子も生成・消滅演算子を使って表す.
ボソン, フェルミオンの特徴が生成・消滅演算子の交換関係に現れる.

ボソン	フェルミオン
$[\hat{a}_m,\hat{a}_n^\dagger]=\hat{a}_m\hat{a}_n^\dagger-\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m=\delta_{m,n}$	$\{\hat{a}_m,\hat{a}_n^\dagger\}=\hat{a}_m\hat{a}_n^\dagger+\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m=\delta_{m,n}$
$[\hat{a}_m,\hat{a}_n]=\hat{a}_m\hat{a}_n-\hat{a}_n\hat{a}_m=0$	$\{\hat{a}_m,\hat{a}_n\}=\hat{a}_m\hat{a}_n+\hat{a}_n\hat{a}_m=0$
$[\hat{a}_m^\dagger,\hat{a}_n^\dagger]=\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n^\dagger-\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m^\dagger=0$	$\{\hat{a}_m^\dagger,\hat{a}_n^\dagger\}=\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n^\dagger+\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m^\dagger=0$

2　ボソンの第 2 量子化

自分が読んでいて何をやっているのか理解するのに苦労したのではじめに猪木川合のあらすじを整理.

1. N ボソン系の状態空間 V_B^N と $V_0^{(N)}$ (調和振動子の空間 V_0 のうち数演算子 $\hat{\mathscr{N}}=\sum_{n=1}^\infty\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_n$ の固有値が N であるもの全体) が同型 (1 対 1 対応).
2. 調和振動子で用いた生成・消滅演算子はボソンの多体系でも使える.
3. N ボソン系での生成・消滅演算子は粒子の生成・消滅の作用を持つ.
4. 力学的変数を意味する演算子を生成・消滅演算子を使って表す (場の演算子).

2.1　多自由度の調和振動子

多自由度 f の調和振動子のハミルトニアンは,

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{f}\hat{P}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{f}\omega_i^2\hat{Q}_i^2 \tag{1}$$

と書くことができ, 各モード i に関する生成・消滅演算子 $\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i$ を,

$$\begin{aligned} \hat{a}_i^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{\omega_i}\hat{Q}_i - i\frac{1}{\sqrt{\omega_i}}\hat{P}_i\right) \\ \hat{a}_i &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{\omega_i}\hat{Q}_i + i\frac{1}{\sqrt{\omega_i}}\hat{P}_i\right) \end{aligned} \tag{2}$$

と定義する. 交換関係

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \delta_{i,j} \\ [\hat{a}_i, \hat{a}_j] &= 0 \\ [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

をみたす. 数演算子 $\hat{\mathscr{N}}$ を

$$\hat{\mathscr{N}} = \sum_{i=1}^{f}\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i = \sum_{i=1}^{f}\hat{n}_i \tag{4}$$

で定義する.

$$\begin{aligned} [\hat{n}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \delta_{i,j}\hat{a}_j^\dagger \\ [\hat{n}_i, \hat{a}_j] &= -\delta_{i,j}\hat{a}_j \end{aligned} \tag{5}$$

より, $\hat{a}_i^\dagger$ は $\hat{n}_i$ の固有値を 1 だけ増やし, $\hat{a}_i$ は $\hat{n}_i$ の固有値を 1 だけ減らす生成・消滅演算子であることが確認できる. また, この固有値は非負であるから,

$$\hat{a}_i\left|0\right\rangle = 0 \tag{6}$$

となる (どの消滅演算子をかけても 0 になる) ような状態 $|0\rangle$ の存在もわかる. 以上から, 数演算子 $\hat{\mathscr{N}}$ によって $|0\rangle$ にかかっている生成演算子の数を数えられることがわかる:

$$\hat{\mathscr{N}}(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}\cdots(\hat{a}_f^\dagger)^{n_f}\left|0\right\rangle = (n_1+n_2+\cdots+n_f)(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}\cdots(\hat{a}_f^\dagger)^{n_f}\left|0\right\rangle \tag{7}$$

数演算子 $\hat{\mathscr{N}}$ の固有値が N であるような固有空間 $V_0^{(N)}$ の基底として,

$$\left\{\hat{a}_{n_1}^\dagger\hat{a}_{n_2}^\dagger\cdots\hat{a}_{n_N}^\dagger\left|0\right\rangle; n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_N\right\} \tag{8}$$

がとれる.

2.2　ボソンの第 2 量子化

2.2.1　調和振動子との対応

ある種類のボソンが 1 つだけあるときの状態空間 V の正規直交基底を $\{|\varphi_n\rangle; n = 1, 2, \cdots\}$ とする. このボソンが N 個あるときの状態空間 V_B^N は

$$\mathscr{S}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{\sigma\in S_N}\left|\varphi_{n_{\sigma(1)}}\right\rangle\left|\varphi_{n_{\sigma(2)}}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_{\sigma(N)}}\right\rangle\ (n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_N) \tag{9}$$

の形の状態ベクトルではられる (S_N は $\{1, 2, \cdots, N\}$ の置換の集合の全体).

(8) 式と (9) 式を見ると, この 2 式は形式的には同じ形をしており, 数演算子 $\hat{\mathscr{N}}$ の固有値が N であるような調和振動子の空間 $V_0^{(N)}$ と N ボソン系 V_B^N の間には 1 対 1 対応があることがわかる. $V_0^{(N)}$ から V_B^N への線形写像 σ を次をみたすものとして定義する.

$$\sigma\left(\hat{a}_{n_1}^\dagger \hat{a}_{n_2}^\dagger \cdots \hat{a}_{n_N}^\dagger |0\rangle\right) = \hat{\mathscr{S}}\left(|\varphi_{n_1}\rangle |\varphi_{n_2}\rangle \cdots |\varphi_{n_N}\rangle\right) \tag{10}$$

$V_0^{(N)}$ と V_B^N が同型 $\rightarrow N$ ボソン系でも生成・消滅演算子 $\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_n$ が使えそう.

2.2.2　生成・消滅演算子の導入

次の交換関係をみたす生成・消滅演算子 $\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_n$ を N ボソン系にも導入する.

$$\begin{aligned} [\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger] &= \delta_{m,n} \\ [\hat{a}_m, \hat{a}_n] &= 0 \\ [\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_n^\dagger] &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

また,

$$\forall n \ \hat{a}_n |0\rangle = 0 \tag{12}$$

を仮定する. 数演算子 $\hat{\mathscr{N}}$ を調和振動子のときと同じように定義する.

$$\hat{\mathscr{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \tag{13}$$

(11) より,

$$[\hat{\mathscr{N}}, \hat{a}_n^\dagger] = \hat{a}_n^\dagger \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \because\ [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] &= [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i^\dagger]\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = \hat{a}_i^\dagger \\ [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger]\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \end{aligned}$$

これと, $\hat{\mathscr{N}} |0\rangle = 0$ から,

$$\hat{\mathscr{N}} \hat{a}_{n_1}^\dagger \hat{a}_{n_2}^\dagger \cdots \hat{a}_{n_k}^\dagger |0\rangle = k \hat{a}_{n_1}^\dagger \hat{a}_{n_2}^\dagger \cdots \hat{a}_{n_k}^\dagger |0\rangle \tag{15}$$

が成り立ち, $\hat{\mathscr{N}}$ が生成演算子 $\hat{a}_n^\dagger$ の数を数える演算子であることが確認できる.

$V_0^{(N)}$ と V_B^N の間に 1 対 1 対応があることから生成・消滅演算子 $\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_n$ を導入したが, ボソン系でこれらが何を意味するか? (名前からして, 粒子の生成・消滅を意味するのは大体分かるが...)

$$\hat{a}_n^\dagger \left(\hat{a}_{n_1}^\dagger \hat{a}_{n_2}^\dagger \cdots \hat{a}_{n_N}^\dagger\right) |0\rangle = \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n_1}^\dagger \hat{a}_{n_2}^\dagger \cdots \hat{a}_{n_N}^\dagger |0\rangle \tag{16}$$

$$\hat{a}_{n_j} \left(\hat{a}_{n_1}^\dagger \hat{a}_{n_2}^\dagger \cdots \hat{a}_{n_N}^\dagger\right) |0\rangle = \hat{a}_{n_1}^\dagger \hat{a}_{n_2}^\dagger \cdots \cancel{\hat{a}_{n_j}^\dagger} \cdots \hat{a}_{n_N}^\dagger |0\rangle \tag{17}$$

より[1],

$$\sigma \hat{a}_n^\dagger \sigma^{-1} \hat{\mathscr{S}}\left(|\varphi_{n_1}\rangle |\varphi_{n_2}\rangle \cdots |\varphi_{n_N}\rangle\right) = \sigma \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n_1}^\dagger \hat{a}_{n_2}^\dagger \cdots \hat{a}_{n_N}^\dagger |0\rangle = \hat{\mathscr{S}}\left(|\varphi_n\rangle |\varphi_{n_1}\rangle |\varphi_{n_2}\rangle \cdots |\varphi_{n_N}\rangle\right) \tag{18}$$

$$\sigma \hat{a}_{n_j} \sigma^{-1} \hat{\mathscr{S}}\left(|\varphi_{n_1}\rangle |\varphi_{n_2}\rangle \cdots |\varphi_{n_N}\rangle\right) = \sigma \hat{a}_{n_j} \hat{a}_{n_1}^\dagger \hat{a}_{n_2}^\dagger \cdots \hat{a}_{n_N}^\dagger |0\rangle = \hat{\mathscr{S}}\left(|\varphi_{n_1}\rangle |\varphi_{n_2}\rangle \cdots \cancel{|\varphi_{n_j}\rangle} \cdots |\varphi_{n_N}\rangle\right) \tag{19}$$

となる.[2] これから, 生成演算子 $\hat{a}_n^\dagger$ は状態 $|\varphi_n\rangle$ の粒子を 1 つ生成し, 消滅演算子 $\hat{a}_n$ は状態 $|\varphi_n\rangle$ の粒子を 1 つ消滅させる演算子であることが分かった.

[1] 消滅演算子 $\hat{a}_n$ の作用は正確には $\hat{a}_n\left(\hat{a}_{n_1}^\dagger \hat{a}_{n_2}^\dagger \cdots \hat{a}_{n_N}^\dagger\right)|0\rangle = \sum_{j=1}^N \delta_{n,n_j} \hat{a}_{n_1}^\dagger \hat{a}_{n_2}^\dagger \cdots \hat{a}_{n_N}^\dagger |0\rangle$.

[2] 消滅演算子 $\hat{a}_n$ の作用は正確には $\sigma \hat{a}_n \sigma^{-1} \hat{\mathscr{S}}\left(|\varphi_{n_1}\rangle |\varphi_{n_2}\rangle \cdots |\varphi_{n_N}\rangle\right) = \sum_{j=1}^N \delta_{n,n_j} \hat{\mathscr{S}}\left(|\varphi_{n_1}\rangle |\varphi_{n_2}\rangle \cdots |\varphi_{n_N}\rangle\right)$.

2.2.3　演算子の第 2 量子化 (場の演算子)

さて, これで生成・消滅演算子の導入は終わったが, 今の所, 数演算子 $\mathscr{N}$ で粒子の数を数えるくらいしかできない. ハミルトニアンなどを生成・消滅演算子で表現できるとうれしい. 実際, 調和振動子のときは生成・消滅演算子を使ってハミルトニアンを

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) \tag{20}$$

と書くことができた.

具体的に Coublomb 相互作用のハミルトニアン:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\hat{\boldsymbol{p}}_i^2}{2m} + \sum_{1\le i<j\le N}\frac{e^2}{\left|\hat{\boldsymbol{r}}_i - \hat{\boldsymbol{r}}_j\right|} \tag{21}$$

を見てみると, 1 体の部分 $\sum_{i=1}^{N}\frac{\hat{\boldsymbol{p}}_i^2}{2m}$ と 2 体の部分 $\sum_{1\le i<j\le N}\frac{e^2}{|\hat{\boldsymbol{r}}_i-\hat{\boldsymbol{r}}_j|}$ から成り立っていることがわかる. このことから, 生成・消滅演算子を使ってハミルトニアンを書き表すためには, 1 つの粒子に作用する演算子, 2 つの粒子に作用する演算子, $\cdots$, n 個の粒子に作用する演算子を生成・消滅演算子を使って表すことができればよさそうである.

まず, 1 体の演算子 $\sum_i \hat{o}_i^{(1)}$ を生成・消滅演算子を用いて表すこと (第 2 量子化) を考える. 天下り的ではあるが, $\hat{a}_n^\dagger$, $\hat{a}_m$ に関して双 1 次であるような演算子[3]

$$\hat{O}^{(1)} = \sum_{n,m}\hat{a}_n^\dagger o_{n,m}^{(1)}\hat{a}_m \;(o_{n,m}\text{は任意の複素数}) \tag{22}$$

を考える.

$$[\hat{A}, \hat{B}_1\hat{B}_2\cdots\hat{B}_n] = [\hat{A},\hat{B}_1]\hat{B}_2\cdots\hat{B}_n + \hat{B}_1[\hat{A},\hat{B}_2]\hat{B}_3\cdots\hat{B}_n + \cdots + \hat{B}_1\hat{B}_2\cdots\hat{B}_{n-1}[\hat{A},\hat{B}_n] \tag{23}$$

$$[\hat{O}^{(1)}, \hat{a}_k^\dagger] = \sum_n o_{n,k}^{(1)}\hat{a}_n^\dagger \tag{24}$$

$$\because\ [\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m, \hat{a}_k^\dagger] = \hat{a}_n^\dagger[\hat{a}_m,\hat{a}_k^\dagger] + [\hat{a}_n^\dagger,\hat{a}_k^\dagger]\hat{a}_m = \hat{a}_n^\dagger\delta_{m,k}$$

$$\hat{O}^{(1)}\left|0\right\rangle = 0 \tag{25}$$

を使うと,

$$\begin{aligned}
\hat{O}^{(1)}\hat{a}_{n_1}^\dagger\cdots\hat{a}_{n_N}^\dagger\left|0\right\rangle &= \hat{O}^{(1)}\hat{a}_{n_1}^\dagger\cdots\hat{a}_{n_N}^\dagger\left|0\right\rangle - \hat{a}_{n_1}^\dagger\cdots\hat{a}_{n_N}^\dagger\hat{O}^{(1)}\left|0\right\rangle \\
&= [\hat{O}^{(1)}, \hat{a}_{n_1}^\dagger\cdots\hat{a}_{n_N}^\dagger]\left|0\right\rangle \\
&= [\hat{O}^{(1)}, \hat{a}_{n_1}^\dagger]\hat{a}_{n_2}^\dagger\cdots\hat{a}_{n_N}^\dagger\left|0\right\rangle \\
&\quad + \hat{a}_{n_1}^\dagger[\hat{O}^{(1)}, \hat{a}_{n_2}^\dagger]\hat{a}_{n_3}^\dagger\cdots\hat{a}_{n_N}^\dagger\left|0\right\rangle \\
&\qquad\vdots \\
&\quad + \hat{a}_{n_1}^\dagger\cdots\hat{a}_{n_{N-1}}^\dagger[\hat{O}^{(1)}, \hat{a}_{n_N}^\dagger]\left|0\right\rangle \\
&= \left(\textstyle\sum_n o_{n,n_1}^{(1)}\hat{a}_n^\dagger\right)\hat{a}_{n_2}^\dagger\cdots\hat{a}_{n_N}^\dagger\left|0\right\rangle \\
&\quad + \hat{a}_{n_1}^\dagger\left(\textstyle\sum_n o_{n,n_2}^{(1)}\hat{a}_n^\dagger\right)\hat{a}_{n_3}^\dagger\cdots\hat{a}_{n_N}^\dagger\left|0\right\rangle \\
&\qquad\vdots \\
&\quad + \hat{a}_{n_1}^\dagger\cdots\hat{a}_{n_{N-1}}^\dagger\left(\textstyle\sum_n o_{n,n_N}^{(1)}\hat{a}_n^\dagger\right)\left|0\right\rangle
\end{aligned} \tag{26}$$

---

[3] 行列のアナロジーを考えると分かりやすい.

$${}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = (A_1A_2\cdots A_N)\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1N} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N1} & X_{N2} & \cdots & X_{NN}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N\end{pmatrix} = \sum_{n,m} A_n X_{n,m} A_m$$

となり, (10) 式の対応から,

$$
\begin{aligned}
\hat{O}^{(1)}\mathscr{S}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) = \mathscr{S}\Big\{&\left(\textstyle\sum_n o^{(1)}_{n,n_1}\left|\varphi_n\right\rangle\right)\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle \\
&+\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left(\textstyle\sum_n o^{(1)}_{n,n_2}\left|\varphi_n\right\rangle\right)\left|\varphi_{n_3}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle \\
&\vdots \\
&+\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_{N-1}}\right\rangle\left(\textstyle\sum_n o^{(1)}_{n,n_N}\left|\varphi_n\right\rangle\right)\Big\}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

となる. 演算子 $\hat{o}^{(1)}$ を

$$
\hat{o}^{(1)}\left|\varphi_n\right\rangle = \sum_m o^{(1)}_{m,n}\left|\varphi_m\right\rangle \tag{28}
$$

と定義すれば,

$$
\begin{aligned}
\hat{O}^{(1)}\mathscr{S}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) = \mathscr{S}\Big\{&\left(\hat{o}^{(1)}\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\right)\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle \\
&+\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left(\hat{o}^{(1)}\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\right)\left|\varphi_{n_3}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle \\
&\vdots \\
&+\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_{N-1}}\right\rangle\left(\hat{o}^{(1)}\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right)\Big\} \\
= \mathscr{S}\Big\{&\left(\textstyle\sum_{i=1}^N \hat{o}^{(1)}_i\right)\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\Big\}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

と書けて ($\hat{o}^{(1)}_i$ は i 番目にはたらく演算子 $\hat{o}^{(1)}$), $\hat{O}^{(1)}$ は各粒子にはたらく 1 体演算子の和 $\sum_{i=1}^N \hat{o}^{(1)}_i$ を表していることがわかる. つまり, 1 体演算子 $\sum_{i=1}^N \hat{o}^{(1)}_i$ は生成・消滅演算子を使って,

$$
\hat{O}^{(1)} = \sum_{n,m}\hat{a}^\dagger_n\left\langle\varphi_n\right|\hat{o}^{(1)}\left|\varphi_m\right\rangle\hat{a}_m \tag{30}
$$

と双 1 次な形で表せることが分かる.

1 体演算子と同じように 2 体演算子を生成・消滅演算子を使って表すと,

$$
\hat{O}^{(2)} = \frac{1}{2!}\sum_{a,b,n,m}\hat{a}^\dagger_a\hat{a}^\dagger_b o^{(2)}_{ab;nm}\hat{a}_m\hat{a}_n \tag{31}
$$

となる. 実際に確かめてみる:

$$
\begin{aligned}
\hat{O}^{(2)}\hat{a}^\dagger_{n_1}\hat{a}^\dagger_{n_1}\cdots\hat{a}^\dagger_{n_N}\left|0\right\rangle &= \left(\frac{1}{2!}\sum_{a,b,n,m}\hat{a}^\dagger_a\hat{a}^\dagger_b o^{(2)}_{ab;nm}\hat{a}_m\hat{a}_n\right)\hat{a}^\dagger_{n_1}\hat{a}^\dagger_{n_1}\cdots\hat{a}^\dagger_{n_N}\left|0\right\rangle \\
&\quad \hat{a}^\dagger_n,\hat{a}^\dagger_m \text{を消して} \hat{a}^\dagger_b,\hat{a}^\dagger_a \text{を増やす} \\
&\quad \hat{a}^\dagger_b,\hat{a}^\dagger_a \text{をもともと} \hat{a}^\dagger_n,\hat{a}^\dagger_m \text{があった場所に動かす.} \\
&\quad o^{(2)}_{ab;nm} = o^{(2)}_{ba;nm} \text{なので} \frac{1}{2!} \text{が消える.} \\
&= \sum_{1\le i<j\le N}\sum_{a,b} o^{(2)}_{ab;n_in_j}\hat{a}^\dagger_{n_1}\cdots\underset{i\text{ 番目}}{\utilde{\hat{a}^\dagger_a}}\cdots\underset{j\text{ 番目}}{\utilde{\hat{a}^\dagger_b}}\cdots\hat{a}^\dagger_{n_N}\left|0\right\rangle
\end{aligned}
\tag{32}
$$

より, 2 体演算子の和

$$
\hat{o}^{(2)} = \left|\varphi_n\right\rangle\left|\varphi_m\right\rangle = \sum_{a,b} o^{(2)}_{ab;nm}\left|\varphi_a\right\rangle\left|\varphi_b\right\rangle \tag{33}
$$

を使えば,

$$
\begin{aligned}
\hat{O}^{(2)}\mathscr{S}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) &= \mathscr{S}\left(\sum_{1\le i<j\le N}\sum_{a,b} o^{(2)}_{ab;n_in_j}\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\cdots\underbrace{\left|\varphi_a\right\rangle}_{i\text{ 番目}}\cdots\underbrace{\left|\varphi_b\right\rangle}_{j\text{ 番目}}\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) \\
&= \mathscr{S}\left(\sum_{1\le i<j\le N}\hat{o}^{(2)}_{ij}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right)\right) \\
&= \sum_{1\le i<j\le N}\hat{o}^{(2)}_{ij}\mathscr{S}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right)
\end{aligned}
\tag{34}
$$

と表せて, (31) は確かに 2 体演算子を表している.

3 体以上の演算子も同様にして生成・消滅演算子を使って表すことが出来て, 3 体の演算子は

$$
\hat{O}^{(3)} = \frac{1}{3!}\sum_{a,b,c,k,l,m}\hat{a}^\dagger_a\hat{a}^\dagger_b\hat{a}^\dagger_c o^{(3)}_{abc;klm}\hat{a}_m\hat{a}_l\hat{a}_k \tag{35}
$$

と書けて, n 体の演算子は,

$$
\hat{O}^{(n)} = \frac{1}{n!}\sum_{\substack{a_1,\cdots,a_n\\ m_1,\cdots,m_n}}\underbrace{\hat{a}^\dagger_{a_1}\hat{a}^\dagger_{a_2}\cdots\hat{a}^\dagger_{a_n}}_{n\text{ 個}}\, o^{(n)}_{\substack{a_1,\cdots,a_n;\\ m_1,\cdots,m_n}}\underbrace{\hat{a}_{m_n}\hat{a}_{m_{n-1}}\cdots\hat{a}_{m_1}}_{n\text{ 個}} \tag{36}
$$

と書ける.

2.3　具体例:Coulomb 相互作用

Coulomb 相互作用をしているスピン 0 のボソン N 個の系を考える. ハミルトニアンは

$$
\hat{H} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\hat{\boldsymbol{p}}_i^2}{2m} + \sum_{1\le i<j<\le N}\frac{e^2}{\left|\hat{\boldsymbol{r}}_i-\hat{\boldsymbol{r}}_j\right|} \tag{37}
$$

と表せて, 1 粒子系の正規直交基底として $\{|\boldsymbol{r}\rangle;\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^3\}$ をとる:

$$
|\varphi_n\rangle \to |\boldsymbol{r}\rangle \tag{38}
$$

(n ではなく) 空間座標 $\boldsymbol{r}$ でラベルされることに注意して, 生成・消滅演算子を $\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}), \hat{\psi}(\boldsymbol{r})$ と書く. このときみたされる交換関係は

$$
\begin{aligned}
[\hat{\psi}(\boldsymbol{r}),\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')] &= \delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\
[\hat{\psi}(\boldsymbol{r}),\hat{\psi}(\boldsymbol{r}')] &= 0 \\
[\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}),\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')] &= 0
\end{aligned}
\tag{39}
$$

となる. ハミルトニアンを 1 体部分 $\hat{H}^{(1)} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\hat{\boldsymbol{p}}_i^2}{2m}$, 2 体部分 $\hat{H}^{(2)} = \sum_{1\le i<j<\le N}\frac{e^2}{|\hat{\boldsymbol{r}}_i-\hat{\boldsymbol{r}}_j|}$ とに分けて, (30),(31) を用いて, 第 2 量子化すると,

$$
\begin{aligned}
\hat{H}^{(1)} &= \int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{r}'\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\langle\boldsymbol{r}|\frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m}|\boldsymbol{r}'\rangle\hat{\psi}(\boldsymbol{r}') \\
&= \int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{r}'\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\langle\boldsymbol{r}|\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)|\boldsymbol{r}'\rangle\hat{\psi}(\boldsymbol{r}') \\
&= \int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{r}'\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\hat{\psi}(\boldsymbol{r}') \\
&= \int d\boldsymbol{r}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\nabla^2\hat{\psi}(\boldsymbol{r}) \\
&\qquad\text{(表面項が 0 になるように境界条件を設定して部分積分)} \\
&= \int d\boldsymbol{r}\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}))\cdot(\nabla\hat{\psi}(\boldsymbol{r}))
\end{aligned}
\tag{40}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{H}^{(2)} &= \int d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}'d\boldsymbol{r}''d\boldsymbol{r}'''\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')\left\langle\boldsymbol{r}\right|\left\langle\boldsymbol{r}'\right|\frac{e^2}{\left|\hat{\boldsymbol{r}}_i-\hat{\boldsymbol{r}}_j\right|}\left|\boldsymbol{r}''\right\rangle\left|\boldsymbol{r}'''\right\rangle\hat{\psi}(\boldsymbol{r}'')\hat{\psi}(\boldsymbol{r}''') \\
&= \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}'\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')\frac{e^2}{\left|\hat{\boldsymbol{r}}_i-\hat{\boldsymbol{r}}_j\right|}\hat{\psi}(\boldsymbol{r})\hat{\psi}(\boldsymbol{r}')
\end{aligned}
\tag{41}
$$

となるから, ハミルトニアンの第 2 量子化はこの和をとって

$$
\hat{H} = \int d\boldsymbol{r}\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}))\cdot(\nabla\hat{\psi}(\boldsymbol{r})) + \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}'\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')\frac{e^2}{\left|\hat{\boldsymbol{r}}_i-\hat{\boldsymbol{r}}_j\right|}\hat{\psi}(\boldsymbol{r})\hat{\psi}(\boldsymbol{r}')
\tag{42}
$$

となる.

$$
\hat{\rho}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N}\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\hat{\boldsymbol{r}}_i)
\tag{43}
$$

という 1 体演算子を第 2 量子化すると,

$$
\hat{\rho}(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{r}'\int d\boldsymbol{r}''\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')\left\langle\boldsymbol{r}'\right|\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\hat{\boldsymbol{r}})\left|\boldsymbol{r}''\right\rangle\hat{\psi}(\boldsymbol{r}'') = \hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\psi}(\boldsymbol{r})
\tag{44}
$$

となり, 全粒子数の演算子 $\hat{\mathscr{N}}$ は

$$
\hat{\mathscr{N}} = \int d\boldsymbol{r}\hat{\rho}(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{r}\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\hat{\psi}(\boldsymbol{r})
\tag{45}
$$

と導かれ, これは数演算子 (13) と一致する.

3 フェルミオンの第 2 量子化

3.1 生成・消滅演算子の導入

ボソンのときと同じように考えていく. ある種類のフェルミオンが 1 つだけあるときの状態空間 V の正規直交基底を $\{\left|\varphi_n\right\rangle; n=1,2,\cdots N\}$ とする. ボソンのときと違って, あるフェルミオンが N 個あるときの状態空間 V_F^N は

$$
\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{\sigma\in S_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\left|\varphi_{n_{\sigma(1)}}\right\rangle\left|\varphi_{n_{\sigma(2)}}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_{\sigma(N)}}\right\rangle\ (n_1<n_2<\cdots<n_N)
\tag{46}
$$

の形の状態ベクトルではられ, $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を含んでいる点が異なる. また, ボソンのときは交換関係 (11) からスタートしたが, フェルミオンの生成・消滅演算子の交換関係は後で導く.

生成・消滅演算子 $\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_n$ を (18),(19) と同じように定義する:

$$
\hat{a}_n^\dagger\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) = \hat{\mathscr{A}}\left(\underset{\sim}{\left|\varphi_n\right\rangle}\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right)
\tag{47}
$$

$$
\hat{a}_n\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) = \sum_{i=1}^{N}\delta_{n,n_i}(-1)^{i-1}\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\cancel{\left|\varphi_{n_i}\right\rangle}\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right)
\tag{48}
$$

次に, フェルミオンの生成・消滅演算子の交換関係を求める. $\hat{a}_n\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n$ を $\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right)$ に作用させると,

$$
\begin{aligned}
&\hat{a}_n\hat{a}_m^\dagger\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) \\
&= \hat{a}_n\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_m\right\rangle\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) \\
&= \delta_{n,m}\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N}(-1)^{i-1}\delta_{n,n_i}\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_m\right\rangle\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\cancel{\left|\varphi_{n_i}\right\rangle}\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right)
\end{aligned}
\tag{49}
$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n \hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) \\
&= \hat{a}_m^\dagger \sum_{i=1}^{N}(-1)^{i-1}\delta_{n,n_i}\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\cancel{\left|\varphi_{n_i}\right\rangle}\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N}(-1)^{i-1}\delta_{n,n_i}\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{m}\right\rangle\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\cancel{\left|\varphi_{n_i}\right\rangle}\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right)
\end{aligned} \tag{50}
$$

(49) + (50) より,

$$
(\hat{a}_n\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n)\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) = \delta_{n,m}\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) \tag{51}
$$

となるから,

$$
\{\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger\} = \hat{a}_n\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n = \delta_{n,m} \tag{52}
$$

ただし, $\{A, B\}$ は $\{A, B\} \equiv AB + BA$ によって定義される反交換子. 次に $\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m^\dagger$, $\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n^\dagger$ を $\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right)$ に作用させると,

$$
\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m^\dagger\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) = \hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n}\right\rangle\left|\varphi_{m}\right\rangle\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) \tag{53}
$$

$$
\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n^\dagger\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) = \hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{m}\right\rangle\left|\varphi_{n}\right\rangle\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) = -\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n}\right\rangle\left|\varphi_{m}\right\rangle\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) \tag{54}
$$

となるから, この 2 式を足して,

$$
\{\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_m^\dagger\} = \hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n^\dagger = 0 \tag{55}
$$

が得られる. このエルミート共役を取って,

$$
\{\hat{a}_n, \hat{a}_m\} = \hat{a}_n\hat{a}_m + \hat{a}_m\hat{a}_n = 0 \tag{56}
$$

も得られる. (52), (55), (56) をまとめると, フェルミオンの生成・消滅演算子は次の反交換関係をみたすことがわかった.

$$
\begin{aligned}
\{\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger\} &= \hat{a}_n\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n = \delta_{n,m} \\
\{\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_m^\dagger\} &= \hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n^\dagger = 0 \\
\{\hat{a}_n, \hat{a}_m\} &= \hat{a}_n\hat{a}_m + \hat{a}_m\hat{a}_n = 0
\end{aligned} \tag{57}
$$

以上の議論では $|0\rangle$ に対する消滅演算子の作用については何も言っていないので, $|0\rangle$ に対する消滅演算子の作用を

$$
\forall m \ \hat{a}_m |0\rangle = 0 \tag{58}
$$

と定義することで, 状態空間 V_F 全体で反交換関係 (57) は成り立ち, ボソンのときと同じように $|0\rangle$ に生成演算子 $\hat{a}_n^\dagger$ をいくつかかけて任意の状態を表すことができる:

$$
\hat{\mathscr{A}}\left(\left|\varphi_{n_1}\right\rangle\left|\varphi_{n_2}\right\rangle\cdots\left|\varphi_{n_N}\right\rangle\right) = \hat{a}_{n_1}^\dagger\hat{a}_{n_1}^\dagger\cdots\hat{a}_{n_N}^\dagger |0\rangle \tag{59}
$$

ここで, ボソン, フェルミオンの生成・消滅演算子の交換関係をまとめると, 表 1 のようになる.

表 1　ボソン, フェルミオンの交換関係

ボソン	フェルミオン
$[\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger] = \hat{a}_m\hat{a}_n^\dagger - \hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m = \delta_{m,n}$	$\{\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger\} = \hat{a}_m\hat{a}_n^\dagger + \hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m = \delta_{m,n}$
$[\hat{a}_m, \hat{a}_n] = \hat{a}_m\hat{a}_n - \hat{a}_n\hat{a}_m = 0$	$\{\hat{a}_m, \hat{a}_n\} = \hat{a}_m\hat{a}_n + \hat{a}_n\hat{a}_m = 0$
$[\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_n^\dagger] = \hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n^\dagger - \hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m^\dagger = 0$	$\{\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_n^\dagger\} = \hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n^\dagger + \hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m^\dagger = 0$

ボソンのときと同じように数演算子 $\hat{\mathscr{N}}$ を

$$
\hat{\mathscr{N}} = \sum_n \hat{a}_n^\dagger\hat{a}_n \tag{60}
$$

と定義すれば,

$$
\begin{aligned}
[\hat{\mathscr{N}}, \hat{a}_m^\dagger] &= \sum_n (\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \hat{a}_m^\dagger - \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n) \\
&= \sum_n (\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n) \\
&= \sum_n \hat{a}_n^\dagger (\hat{a}_n \hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n) \\
&= \sum_n \hat{a}_n^\dagger \delta_{n,m} \\
&= \hat{a}_m^\dagger
\end{aligned}
\tag{61}
$$

となり, $\hat{\mathscr{N}}$ は $|0\rangle$ にかかっている生成演算子の数を数える演算子となっている.

3.2 フェルミオンの場の演算子

ボソンのときと同じように 1 体演算子は,

$$
\hat{O}^{(1)} = \sum_{a,b} \hat{a}_a^\dagger \langle \varphi_a | \hat{o}^{(1)} | \varphi_b \rangle \hat{a}_b \tag{62}
$$

2 体演算子は,

$$
\hat{O}^{(2)} = \frac{1}{2!} \sum_{a,b,k,l} \hat{a}_a^\dagger \hat{a}_b^\dagger \langle \varphi_a | \langle \varphi_b | \hat{o}^{(2)} | \varphi_k \rangle | \varphi_l \rangle \hat{a}_l \hat{a}_k \tag{63}
$$

となる.

4 ボソンとフェルミオンの両方がある系

ボソン A が N_A 個, フェルミオン B が N_B 個ある系を考える. 粒子 A(ボソン) が 1 つあるときの状態空間 V_A の正規直交基底を $\{|\xi_n\rangle ; n = 1, 2, \cdots\}$, 粒子 B(フェルミオン) が 1 つあるときの状態空間 V_B の正規直交基底を $\{|\eta_n\rangle ; n = 1, 2, \cdots\}$ とする. ボソン A の入れ替えに関しては完全対称, フェルミオン B の入れ替えに関しては完全反対称なものに制限 (第 1 量子化) すると,

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mathscr{S}}_A \hat{\mathscr{A}}_B \left(\left|\xi_{n_1}\right\rangle \left|\xi_{n_2}\right\rangle \cdots \left|\xi_{n_{N_A}}\right\rangle \left|\eta_{m_1}\right\rangle \left|\eta_{m_2}\right\rangle \cdots \left|\eta_{m_{N_B}}\right\rangle \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N_A! N_B!}} \sum_{\sigma \in S_{N_A}} \sum_{\tau \in S_{N_B}} \mathrm{sgn}(\tau) \left|\xi_{n_{\sigma(1)}}\right\rangle \cdots \left|\xi_{n_{\sigma(N_A)}}\right\rangle \left|\eta_{m_{\tau(1)}}\right\rangle \cdots \left|\eta_{m_{\tau(N_B)}}\right\rangle \\
&(n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_{N_A}, m_1 < m_2 < \cdots < m_{N_B})
\end{aligned}
\tag{64}
$$

のかたちの状態ベクトルではられる. 次に第 2 量子化のために生成・消滅演算子 $\hat{a}_n^{(A)\dagger}, \hat{a}_n^{(A)}, \hat{a}_m^{(B)\dagger}, \hat{a}_m^{(B)}$ を次のように定義する:

$$
\begin{aligned}
&\hat{a}_n^{(A)\dagger} \hat{\mathscr{S}}_A \hat{\mathscr{A}}_B \left(\left|\xi_{n_1}\right\rangle \left|\xi_{n_2}\right\rangle \cdots \left|\xi_{n_{N_A}}\right\rangle \left|\eta_{m_1}\right\rangle \left|\eta_{m_2}\right\rangle \cdots \left|\eta_{m_{N_B}}\right\rangle \right) \\
&= \hat{\mathscr{S}}_A \hat{\mathscr{A}}_B \left(\left|\xi_n\right\rangle \left|\xi_{n_1}\right\rangle \left|\xi_{n_2}\right\rangle \cdots \left|\xi_{n_{N_A}}\right\rangle \left|\eta_{m_1}\right\rangle \left|\eta_{m_2}\right\rangle \cdots \left|\eta_{m_{N_B}}\right\rangle \right)
\end{aligned}
\tag{65}
$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{a}_n^{(A)} \hat{\mathscr{S}}_A \hat{\mathscr{A}}_B \left(\left|\xi_{n_1}\right\rangle \left|\xi_{n_2}\right\rangle \cdots \left|\xi_{n_{N_A}}\right\rangle \left|\eta_{m_1}\right\rangle \left|\eta_{m_2}\right\rangle \cdots \left|\eta_{m_{N_B}}\right\rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N_A} \delta_{n,n_i} \hat{\mathscr{S}}_A \hat{\mathscr{A}}_B \left(\left|\xi_{n_1}\right\rangle \left|\xi_{n_2}\right\rangle \cdots \cancel{\left|\xi_{n_i}\right\rangle} \cdots \left|\xi_{n_{N_A}}\right\rangle \left|\eta_{m_1}\right\rangle \left|\eta_{m_2}\right\rangle \cdots \left|\eta_{m_{N_B}}\right\rangle \right)
\end{aligned}
\tag{66}
$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{a}_m^{(B)\dagger} \hat{\mathscr{S}}_A \hat{\mathscr{A}}_B \left(\left|\xi_{n_1}\right\rangle \left|\xi_{n_2}\right\rangle \cdots \left|\xi_{n_{N_A}}\right\rangle \left|\eta_{m_1}\right\rangle \left|\eta_{m_2}\right\rangle \cdots \left|\eta_{m_{N_B}}\right\rangle \right) \\
&= \hat{\mathscr{S}}_A \hat{\mathscr{A}}_B \left(\left|\xi_{n_1}\right\rangle \left|\xi_{n_2}\right\rangle \cdots \left|\xi_{n_{N_A}}\right\rangle \left|\eta_m\right\rangle \left|\eta_{m_1}\right\rangle \left|\eta_{m_2}\right\rangle \cdots \left|\eta_{m_{N_B}}\right\rangle \right)
\end{aligned}
\tag{67}
$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{a}_m^{(B)} \hat{\mathscr{S}}_A \hat{\mathscr{A}}_B \left(\left|\xi_{n_1}\right\rangle \left|\xi_{n_2}\right\rangle \cdots \left|\xi_{n_{N_A}}\right\rangle \left|\eta_{m_1}\right\rangle \left|\eta_{m_2}\right\rangle \cdots \left|\eta_{m_{N_B}}\right\rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N_B} (-1)^{i-1} \delta_{m,m_i} \hat{\mathscr{S}}_A \hat{\mathscr{A}}_B \left(\left|\xi_{n_1}\right\rangle \left|\xi_{n_2}\right\rangle \cdots \left|\xi_{n_{N_A}}\right\rangle \left|\eta_{m_1}\right\rangle \left|\eta_{m_2}\right\rangle \cdots \cancel{\left|\eta_{m_i}\right\rangle} \cdots \left|\eta_{m_{N_B}}\right\rangle \right)
\end{aligned}
\tag{68}
$$

$\hat{a}_n^{(A)\dagger}$, $\hat{a}_n^{(A)}$ はボソン A に対してのみはたらき, $\hat{a}_m^{(B)\dagger}$,$\hat{a}_m^{(B)}$ はフェルミオン B に対してのみはたらく. $\hat{a}_n^{(A)\dagger}$, $\hat{a}_n^{(A)}$ はボソンの交換関係を, $\hat{a}_m^{(B)\dagger}$,$\hat{a}_m^{(B)}$ はフェルミオンの交換関係をみたす. また, A の生成・消滅演算子と B の生成・消滅演算子との間の交換関係は

$$
[\hat{a}_n^{(A)}, \hat{a}_m^{(B)}] = [\hat{a}_n^{(A)}, \hat{a}_m^{(B)\dagger}] = [\hat{a}_n^{(A)\dagger}, \hat{a}_m^{(B)}] = [\hat{a}_n^{(A)\dagger}, \hat{a}_m^{(B)\dagger}] = 0 \tag{69}
$$

となり, A に関する演算子と B に関する演算子は可換になる.

しかし, 生成・消滅演算子の定義を

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_n^{(A)\prime} &= \hat{a}_n^{(A)} \\
\hat{a}_m^{(B)\prime} &= (-1)^{\hat{\mathscr{N}}_A} \hat{a}_m^{(B)}
\end{aligned}
\tag{70}
$$

$$
\left(\hat{\mathscr{N}}_A = \sum_n \hat{a}_n^{(A)\dagger} \hat{a}_n^{(A)} \text{は粒子 A の数演算子} \right)
$$

と変えてみると,

$$
\begin{aligned}
\{\hat{a}_m^{(B)\prime}, \hat{a}_n^{(B)\prime}\} &= (-1)^{2\hat{\mathscr{N}}_A} \{\hat{a}_m^{(B)}, \hat{a}_n^{(B)}\} = 0 \\
\{\hat{a}_m^{(B)\prime}, \hat{a}_n^{(B)\prime\dagger}\} &= (-1)^{2\hat{\mathscr{N}}_A} \{\hat{a}_m^{(B)}, \hat{a}_n^{(B)\dagger}\} = \delta_{m,n}
\end{aligned}
\tag{71}
$$

より, もとの $\hat{a}_m^{(B)}$, $\hat{a}_m^{(B)\dagger}$ と同じ反交換関係を示すが,

$$
\{\hat{a}_n^{(A)\prime}, \hat{a}_m^{(B)\prime}\} = 0 \tag{72}
$$

が導かれる. これは, $\hat{a}_n^{(A)\prime}$ と $\hat{a}_m^{(B)\prime}$ が反交換であることを意味する. つまり, 異種粒子 (A↔B, ボソン ↔ フェルミオン) の場の演算子は可換でも反可換でもよいということになる. ただし, 相対論的な場の量子論では,

ボソン ↔ ボソン	可換
フェルミオン ↔ フェルミオン	反可換
ボソン ↔ フェルミオン	可換

とするのが自然であることが分かっている. また, $-1 = e^{i\pi}$ であることに気をつけると, $\hat{a}_m^{(B)\prime}$ は,

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_m^{(B)\prime} &= (-1)^{\hat{\mathscr{N}}_A} \hat{a}_m^{(B)} = e^{i\pi\hat{\mathscr{N}}_A} \hat{a}_m^{(B)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\pi\hat{\mathscr{N}}_A)^n}{n!} \hat{a}_m^{(B)} \\
&= \left(1 + i\pi\hat{\mathscr{N}}_A - \frac{1}{2}\pi^2 \hat{\mathscr{N}}_A^2 + \cdots \right) \hat{a}_m^{(B)}
\end{aligned}
\tag{73}
$$

と表せ, このように定義するのはあまり自然ではない.