

チャネル結合法と光学ポテンシャルの起源

『量子散乱理論への招待』¹ §7.6-7.9

矢野 隆之

2021年12月29日

7.6 流束の保存と S 行列のユニタリティ

いま考えている反応系の波動関数は

$$\Psi(\xi, \mathbf{R}) = \chi_0(\mathbf{R})\Phi_0(\xi) + \chi_1(\mathbf{R})\Phi_1(\xi) \quad (1)$$

と表せた。ここで、 $\Phi_0(\xi)$, $\Phi_1(\xi)$ は原子核の基底状態、励起状態の波動関数、 $\chi_0(\mathbf{R})$, $\chi_1(\mathbf{R})$ は対応する中性子-原子核の散乱波、 ξ は原子核に含まれる A 個の核子の自由度をまとめて表したものである。さらにアイコナル近似を用いると、散乱波 χ_c ($c = 0$ or 1) は、

$$\chi_0(\mathbf{R}) = \psi_0(b, z) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}} = \psi_0(b, z) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{iK_0 z} \quad (2)$$

$$\chi_1(\mathbf{R}) = \psi_1(b, z) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{R}} = \psi_1(b, z) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{iK_1 z} \quad (3)$$

と表現できた。

ここで流束の保存について考える。境界条件:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \psi_1(b, z) = 0 \quad (4)$$

から、入射流束 j_{in} は

$$j_{\text{in}} = \text{Re} \frac{\hbar}{\mu i} \left(\frac{e^{iK_0 z}}{(2\pi)^{3/2}} \right)^* \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{iK_0 z}}{(2\pi)^{3/2}} \right) = \frac{\hbar K_0}{(2\pi)^3 \mu} \quad (5)$$

一方、

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \psi_0(b, z) = S_0^{\text{EK}}(b) \quad (6)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \psi_1(b, z) = \sqrt{\frac{K_0}{K_1}} S_1^{\text{EK}}(b) \quad (7)$$

より、弾性チャネルの放出流束 $j_{0\text{out}}(b)$ は、

$$j_{0\text{out}}(b) = \text{Re} \frac{\hbar}{\mu i} \left(S_0^{\text{EK}}(b) \frac{e^{iK_0 z}}{(2\pi)^{3/2}} \right)^* \frac{\partial}{\partial z} \left(S_0^{\text{EK}}(b) \frac{e^{iK_0 z}}{(2\pi)^{3/2}} \right) = \frac{\hbar K_0}{(2\pi)^3 \mu} |S_0^{\text{EK}}(b)|^2 \quad (8)$$

となり、非弾性チャネルの放出流束 $j_{1\text{out}}(b)$ は

$$\begin{aligned} j_{1\text{out}}(b) &= \text{Re} \frac{\hbar}{\mu i} \left(\sqrt{\frac{K_0}{K_1}} S_1^{\text{EK}}(b) \frac{e^{iK_1 z}}{(2\pi)^{3/2}} \right)^* \frac{\partial}{\partial z} \left(\sqrt{\frac{K_0}{K_1}} S_1^{\text{EK}}(b) \frac{e^{iK_1 z}}{(2\pi)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{\hbar K_1}{(2\pi)^3 \mu} \frac{K_0}{K_1} |S_1^{\text{EK}}(b)|^2 = \frac{\hbar K_0}{(2\pi)^3 \mu} |S_1^{\text{EK}}(b)|^2 \end{aligned} \quad (9)$$

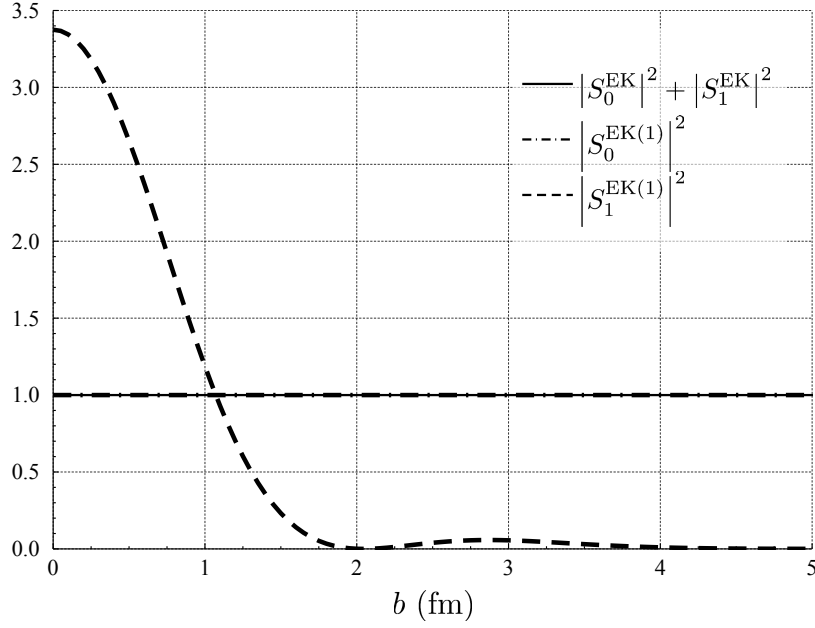


図 1: 弾性チャンネル, 非弾性チャンネルアイコナール S 行列の絶対値の 2 乗和と 1 次摂動による各チャンネルのアイコナール S 行列の絶対値の 2 乗. 全ての b において $|S_0^{EK}|^2 + |S_1^{EK}|^2 = 1$ を満たしていることが見てとれる. 1 次の摂動計算によって得られたアイコナール S 行列がユニタリティを満たしていないことも確認できる.

となる. いま, ポテンシャルは虚部を持たないので流束は消失しない. したがって,

$$j_{\text{in}} = j_{0\text{out}}(b) + j_{1\text{out}}(b) \quad (10)$$

が成り立つ. これに (5), (8), (9) を代入すると,

$$|S_0^{EK}(b)|^2 + |S_1^{EK}(b)|^2 = 1 \quad (11)$$

を得る. この関係式をアイコナール S 行列のユニタリティと呼ぶ. $0 \leq b \leq 5$ での $|S_0^{EK}(b)|^2 + |S_1^{EK}(b)|^2$ をプロットしたものが図 1 中の実線である. これから S 行列のユニタリティが成り立っていることが分かる. いまは非弾性チャンネルが 1 チャンネルしか存在しない場合を考えているが, 非弾性チャンネルが複数 (n 個) 存在する場合にも同様に,

$$\sum_{i=0}^n |S_i^{EK}(b)|^2 = 1 \quad (12)$$

が成立することが知られている. ただし, S 行列のユニタリティが成立するのは流束の消失がない, すなわち吸収が存在しない場合に限られる. また, 1 次摂動の計算結果^{*1} は一般にユニタリティを満たさない. テキストに掲載されている計算の例では,

$$|S_0^{EK(1)}(b)|^2 = 1 \quad (13)$$

となっており, $|S_1^{EK(1)}(b)|^2$ の分だけ, 流束の保存が破れている. 図 1 中の一点鎖線, 破線は $0 \leq b \leq 5$ に対する $|S_0^{EK(1)}(b)|^2, |S_1^{EK(1)}(b)|^2$ をプロットしたものである. この図から 1 次摂動の計算結果の S 行列がユニタリティを満たしていないことが分かる.

^{*1} アイコナールチャンネル結合方程式を反復法で解くときに, 試行回数を 1 回とした場合の計算結果を指す. 上付きの (1) を付与して表現している.

! Note

1次摂動の計算結果において $\left|S_0^{\text{EK}(1)}(b)\right|^2 = 1$ となるのは $\psi_1(b, z)$ の初期解として,

$$\psi_1^{(0)}(b, z) = 0$$

を設定していることによる. 図2はアイコナルチャネル結合方程式 ($b = 0 \text{ fm}$) を反復法で解いてときの各試行回数における解のプロットを並べたものである. §7.4でも指摘した通り, (いまの場合)1次摂動 ($n = 1$) の計算結果は ψ_0 は $n = 0$ のものと同じであり, ψ_1 のみが変わる. いま $\left|\psi_0^{(0)}(b, z)\right|^2 = 1$ を満たす初期解を与えているため,

$$\left|S_0^{\text{EK}(1)}(b)\right|^2 = \left|\lim_{z \rightarrow \infty} \psi_0^{(1)}(b, z)\right|^2 = \left|\lim_{z \rightarrow \infty} \psi_0^{(0)}(b, z)\right|^2 = 1$$

となる. 一方, ψ_1 は初期解 $\psi_1^{(0)} = 0$ から変化しているため, $\left|S_1^{\text{EK}(1)}(b)\right|^2$ の分だけユニタリティを破ることになる. したがって, $\psi_1^{(0)}(b, z)$ の設定次第によっては $\left|S_0^{\text{EK}(1)}(b)\right|^2 = 1$ とはならないので注意.

7.7 動的偏極ポテンシャル

チャネル結合法の視点に立って光学ポテンシャルの理論的な基礎付けを試みる. 前章 (Ch.6) までは, 弾性散乱以外のチャネルを全て一括りに吸収として光学ポテンシャルの虚部に押しつけてきた. これに対して, 本章のチャネル結合法では, ブラックボックスのように光学ポテンシャルの虚部に押しつけた弾性散乱以外のチャネルを陽に扱う. この結果, 前節で見たように (当然のことだが) チャネル結合法では流束は保存し, 吸収は存在しない (実ポテンシャルしか存在しない).

光学ポテンシャルとチャネル結合法の大きな違いは次の点である.

光学ポテンシャル 弾性散乱チャネルのみを見ている

チャネル結合法 すべてのチャネルを見ている.

したがって, 光学ポテンシャルの虚部による吸収の効果をチャネル結合法の視点で再現するためには弾性チャネルのみを見ればよい. アイコナルチャネル結合方程式とその形式解は次のようであった.

$$i\hbar v_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi_0(b, z) = V_{00}(b, z) \psi_0(b, z) + V_{01}(b, z) \psi_1(b, z) e^{i(K_1 - K_0)z} \quad (14)$$

$$i\hbar v_1 \frac{\partial}{\partial z} \psi_1(b, z) = V_{11}(b, z) \psi_1(b, z) + V_{10}(b, z) \psi_0(b, z) e^{i(K_0 - K_1)z} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \psi_0(b, z) = & \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^z dz' V_{00}(b, z')\right) \\ & \times \left\{ \int_{-\infty}^z dz' \left[\frac{1}{i\hbar v_0} V_{01}(b, z') \psi_1(b, z') e^{i(K_1 - K_0)z'} \exp\left(-\frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^{z'} dz'' V_{00}(b, z'')\right) \right] + 1 \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(b, z) = & \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^z dz' V_{11}(b, z')\right) \\ & \times \left\{ \int_{-\infty}^z dz' \left[\frac{1}{i\hbar v_1} V_{10}(b, z') \psi_0(b, z') e^{i(K_0 - K_1)z'} \exp\left(-\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^{z'} dz'' V_{11}(b, z'')\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

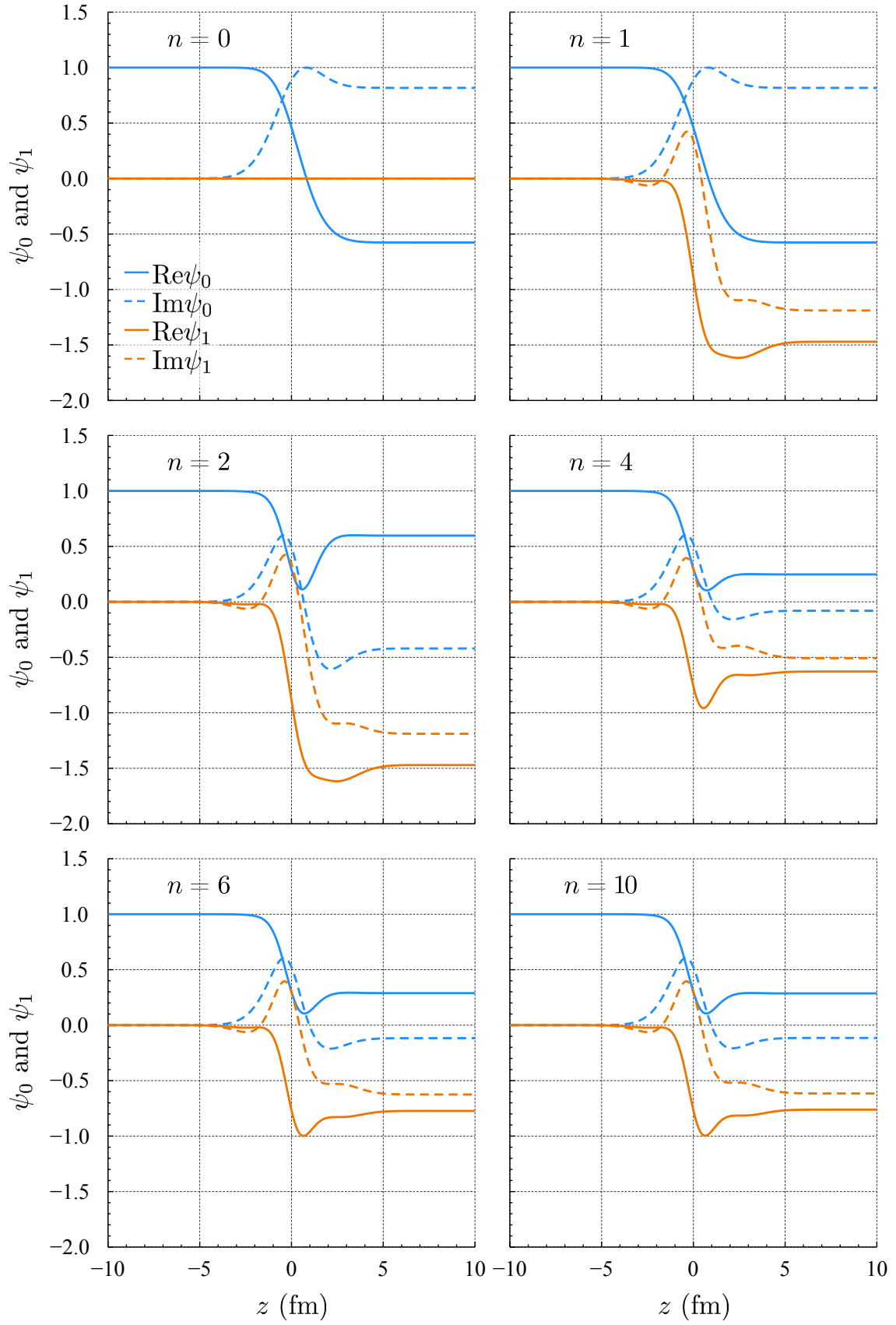


図 2: 反復法によって求めたアイコナルチャンネル結合方程式の解の試行回数による変化. 青の実線, 破線は $\psi_0(z, b=0)$ の実部と虚部を, オレンジ色の実線, 破線は $\psi_1(z, b=0)$ の実部と虚部を表す.

(14) の右辺の ψ_1 に形式解 (17) を代入すると,

$$i\hbar v_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi_0(b, z) = V_{00}(b, z) \psi_0(b, z) + V_{01}(b, z) \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^z dz' V_{11}(b, z')\right) \times \left\{ \int_{-\infty}^z dz' \left[\frac{1}{i\hbar v_1} V_{10}(b, z') \psi_0(b, z') e^{i(K_0 - K_1)z'} \exp\left(-\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^{z'} dz'' V_{11}(b, z'')\right) \right] \right\} e^{i(K_1 - K_0)z} \quad (18)$$

$\psi_1(b, z)$ の形式解

を得る. この中に ψ_1 はなく, 弾性チャンネルのみに注目した式となっている. (18) だけを見れば, ψ_1 が存在しないため, 非弾性チャンネルの影響を考慮していないようにも見える. しかし, ψ_0, ψ_1 は (14), (15) の解であり, チャンネルの結合の効果が ψ_0, ψ_1 の中にすでに取り入れられているということに留意すべきである. ゆえに, (18) は非弾性チャンネルの効果も考慮した上で弾性チャンネルのみを見た式となっている. この弾性チャンネルとそれ以外のチャンネルの結合の効果を表現するポテンシャルを動的偏極ポテンシャル (dynamical polarization potential) と呼び, (18) の第 2 項がこれに相当し, 動的偏極ポテンシャル演算子 \hat{U}_{DP} は次のように定義できる.

$$i\hbar v_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi_0(b, z) = V_{00}(b, z) \psi_0(b, z) + \hat{U}_{DP} \psi_0(b, z) \quad (19)$$

$$\hat{U}_{DP} \psi_0(b, z) = V_{01}(b, z) \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^z dz' V_{11}(b, z')\right) \times \left\{ \int_{-\infty}^z dz' \left[\frac{1}{i\hbar v_1} V_{10}(b, z') \psi_0(b, z') e^{i(K_0 - K_1)z'} \exp\left(-\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^{z'} dz'' V_{11}(b, z'')\right) \right] \right\} e^{i(K_1 - K_0)z} \quad (20)$$

ここからは, 動的偏極ポテンシャルの物理的な意味を調べていく. (20) を階段関数 Θ :

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (21)$$

を使って書き換えると,

$$\begin{aligned} \hat{U}_{DP} \psi_0(b, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz' \left\{ \Theta(z - z') V_{01}(b, z) \right. \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^z dz'' V_{11}(b, z'')\right) \exp\left(-\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^{z'} dz'' V_{11}(b, z'')\right) \\ &\quad \times \left. \frac{1}{i\hbar v_1} V_{10}(b, z') \psi_0(b, z') e^{i(K_0 - K_1)z'} e^{i(K_1 - K_0)z} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz' \left\{ \Theta(z - z') V_{01}(b, z) \right. \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{z'}^z dz'' V_{11}(b, z'')\right) e^{iK_1(z - z')} V_{10}(b, z') \psi_0(b, z') e^{iK_0 z'} e^{-iK_0 z} \left. \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

となる. (22) に $e^{iK_0 z} / (2\pi)^{3/2}$ を乗じて散乱波:

$$\chi_0(b, z) = \psi_0(b, z) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{iK_0 z} \quad (23)$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} \hat{U}_{DP} \chi_0(b, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz' \left\{ \begin{array}{l} V_{01}(b, z) \\ \text{z で弾性チャンネルへ遷移} \end{array} \right. \\ &\quad \times \underbrace{\Theta(z - z') \frac{1}{i\hbar v_1} \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{z'}^z dz'' V_{11}(z'')\right) e^{iK_1(z - z')}}_{=G_{11}(z', z): z' \text{ から } z \text{ まで非弾性チャンネルを伝播}} \\ &\quad \left. \times V_{10}(b, z') \chi_0(b, z') \right\}_{z' \text{ で非弾性チャンネルへ遷移}} \quad (24) \end{aligned}$$

を得る。(24)の右辺の積分を詳しく見ると、弾性チャンネルの散乱波 χ_0 から出発して反応系が非弾性チャンネルを経由して弾性チャンネルに戻る様子が動的偏極ポテンシャル \hat{U}_{DP} によって表現されていることが分かる:

1. ある点 z' において、 χ_0 は相互作用 V_{10} を受けて非弾性チャンネルに遷移する。
2. 非弾性チャンネルに移行した中性子は非弾性チャンネルの対角ポテンシャル V_{11} の下で z' から z まで伝播する。
3. z で相互作用 V_{01} を受けて非弾性チャンネルから弾性チャンネルへ遷移する。

(24)を見れば分かるように、弾性チャンネルから非弾性チャンネルへの遷移は任意の $z' < z$ で起きてよい。このため、 \hat{U}_{DP} は非局所 (non-local) ポテンシャルとなる。また、 \hat{U}_{DP} は必ずエネルギー (K_1) に依存する複素ポテンシャルとなる。

7.8 光学ポテンシャルの正体

ψ_0 に関するアイコンナルチャンネル方程式は \hat{U}_{DP} を使って

$$i\hbar v_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi_0(b, z) = V_{00}(b, z) \psi_0(b, z) + \hat{U}_{DP} \psi_0(b, z) \quad (19 \text{ 再})$$

と書けた。そして、この \hat{U}_{DP} は非局所ポテンシャルであることを前節で見た。しかし、実際には現象論的に決められた局所ポテンシャル U_L が使われることが多い。局所ポテンシャル U_L を使うとき、(19)は

$$i\hbar v_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi_{0L}(b, z) = [V_{00}(b, z) + U_L] \psi_{0L}(b, z) \quad (25)$$

と書き換えられる。 ψ_{0L} は ψ_0 と同じように弾性散乱を記述し、 U_L を等価局所ポテンシャル (equivalent local potential) と呼ぶ。等価局所ポテンシャルのうち、最も簡単なものは

$$\bar{U}_{DP}(b, z) = \frac{1}{\psi_0(b, z)} [\hat{U}_{DP} \psi_0(b, z)] \quad \psi_{0L} = \psi_0 \quad (26)$$

である。 \bar{U}_{DP} を自明な等価局所ポテンシャル (trivially equivalent local potential) と呼ぶ。自明な等価局所ポテンシャル (26) を使ったとき、(25)は

$$i\hbar v_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi_0(b, z) = [V_{00}(b, z) + \bar{U}_{DP}] \psi_0(b, z) \quad (27)$$

となる。これは一体ポテンシャルの下でアイコンナル近似を用いた散乱を記述した方程式:

$$i\hbar v \frac{\partial}{\partial z} \psi_{b,z} = U(R) \psi(b, z) \quad (5.13)$$

と同じである。したがって、弾性散乱を記述する光学ポテンシャル U_{opt} は

$$U_{opt}(b, z) = V_{00}(b, z) + \bar{U}_{DP}(b, z) \quad (28)$$

と解釈できる。 \bar{U}_{DP} はチャンネル結合方程式の解を利用したものであるから、相互作用 $V_{c'c}$ は実数であり、前述の通り失われる流束は存在しない。また、すべてのチャンネルが取り入れられていれば、 \bar{U}_{DP} の具体形を書き下すことも可能である。図3に本章で考えている2チャンネル結合問題の \bar{U}_{DP} のプロットを示す。青色の実線、破線は \bar{U}_{DP} の実部、虚部を、緑色の実線は弾性チャンネルの対角ポテンシャル V_{00} を、オレンジ色の実線は $V_{00} + \text{Re } \bar{U}_{DP}$ を表す。図3から、動的偏極ポテンシャルに斥力型の実ポテンシャルと吸収をもたらす虚数ポテンシャルが現れていることが分かる。

いまは、仮想的な2チャンネル結合問題を考え、チャンネル結合方程式から \bar{U}_{DP} を計算して光学ポテンシャル U_{opt} を定めたが、弾性散乱を記述する一体ポテンシャル U_{opt} を現象論的に決定するという立場もある。この場合、 \bar{U}_{DP} の実体は直接の興味の対象とはならず、 \bar{U}_{DP} の関数としての性質:

1. \bar{U}_{DP} は複素ポテンシャル。
2. エネルギー依存性を持つ

が尊重される。したがって、現象論的に決定された U_{opt} はこの \bar{U}_{DP} の性質を引き継ぐことになる。以上が原子核の反応計算に非エルミートのポテンシャルが登場する本質的な理由である。

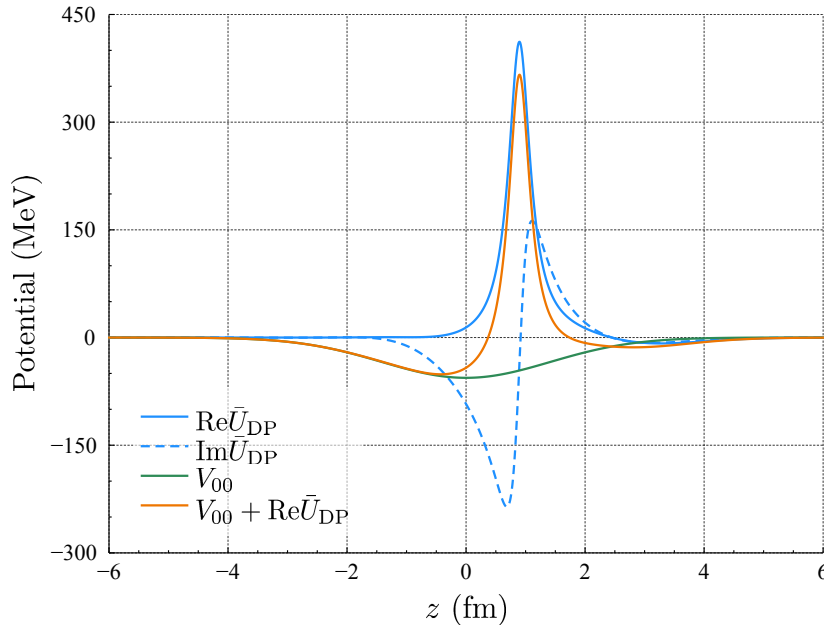


図 3: $b = 0 \text{ fm}$ における \bar{U}_{DP} の振る舞い. 青色の実線, 破線はそれぞれ \bar{U}_{DP} の実部と虚部を表す. 緑色の実線は対角ポテンシャル V_{00} . オレンジ色の実線は対角ポテンシャル V_{00} と $\text{Re } \bar{U}_{\text{DP}}$ の和.

! Note

図 4 に示すように, \bar{U}_{DP} は b に依存する複雑な関数であるため, (28) を完全に満たす U_{opt} を現象論的に決定することは極めて困難である. $V_{00} + \bar{U}_{\text{DP}}$ を解いて得た解を再現するように U_{opt} を決定することは可能であると期待される. 実際, この方針に則った光学ポテンシャルに対する現象論的アプローチは成功している. ただし, 現象論的に得た U_{opt} を用いて求めた散乱波が相互作用領域において正しいかどうかは自明ではない. 特に, ポテンシャルが本来持っている非局所性の取り扱いには注意が必要である.

いまは弾性チャンネル, 非弾性チャンネルの 2 チャンネルのみが存在する仮想的なチャンネル結合問題を考えたが, 一般の多チャンネル問題の場合にも同じように考えることができ, フェッシュバツハ (Herman Feshbach) の射影演算子の方法²として知られている. フェッシュバツハの方法は光学ポテンシャルに対する理論的基礎付けとして重要である. しかし, 実際の反応現象では, 関与するチャンネル数が膨大であるため, それら全てを取り入れたチャンネル結合計算はごく少数の例外を除いて事実上不可能である. つまり, 動的偏極ポテンシャルの具体形を書き下すことは現実的には不可能である. したがって, 原子核反応研究では, 多くの場合, 現象論的に決定された光学ポテンシャルを核力ポテンシャルとして利用する. その光学ポテンシャルでは記述できない特定の遷移をチャンネル結合法によって取り扱う.^{*2}

多重散乱理論⁴に基づいたアプローチはフェッシュバツハの射影演算子の方法とは異なる形で光学ポテンシャルの理論的な基礎付けを行う^{5,6}. 多重散乱理論は核子と原子核の散乱現象を, 入射核子と核内核子の衝突の集積として書き下す厳密理論である. 多重散乱理論のポイントは多体問題の複雑さを 2 核子間の (多体中での) 相互作用に集約させるということである. この相互作用にある種の近似を施すことによって光学ポテンシャルを実効的かつ微視的に構築することができる. 今まで採用してきた畳み込み模型はこの多重散乱理論の考え方に基づいたものである. 多重散乱理論によって求めたポテンシャルを微視的光学ポテンシャルと呼ぶ. 微視的光学ポテンシャルで計算した微分断面積をプロットしたものが図 5 である. 図 5 の計算は現象論的な調整パラメータを一切含んでいないにもかかわらず, 実験結果と良い一致を見せている. 図 5 についての詳細は Toyokawa *et al.*⁷ を参照. 微視的光学ポテンシャルの研究は近年進展を遂げているらしく, 図 5 の Toyokawa *et al.*⁷ の他の成功例として Amos *et al.*⁸, Furumoto *et al.*⁹ が挙げられている.

*2 『原子核反応論』³3.6 に Feshbach 理論による光学ポテンシャルの理論的基礎付けの説明がある.

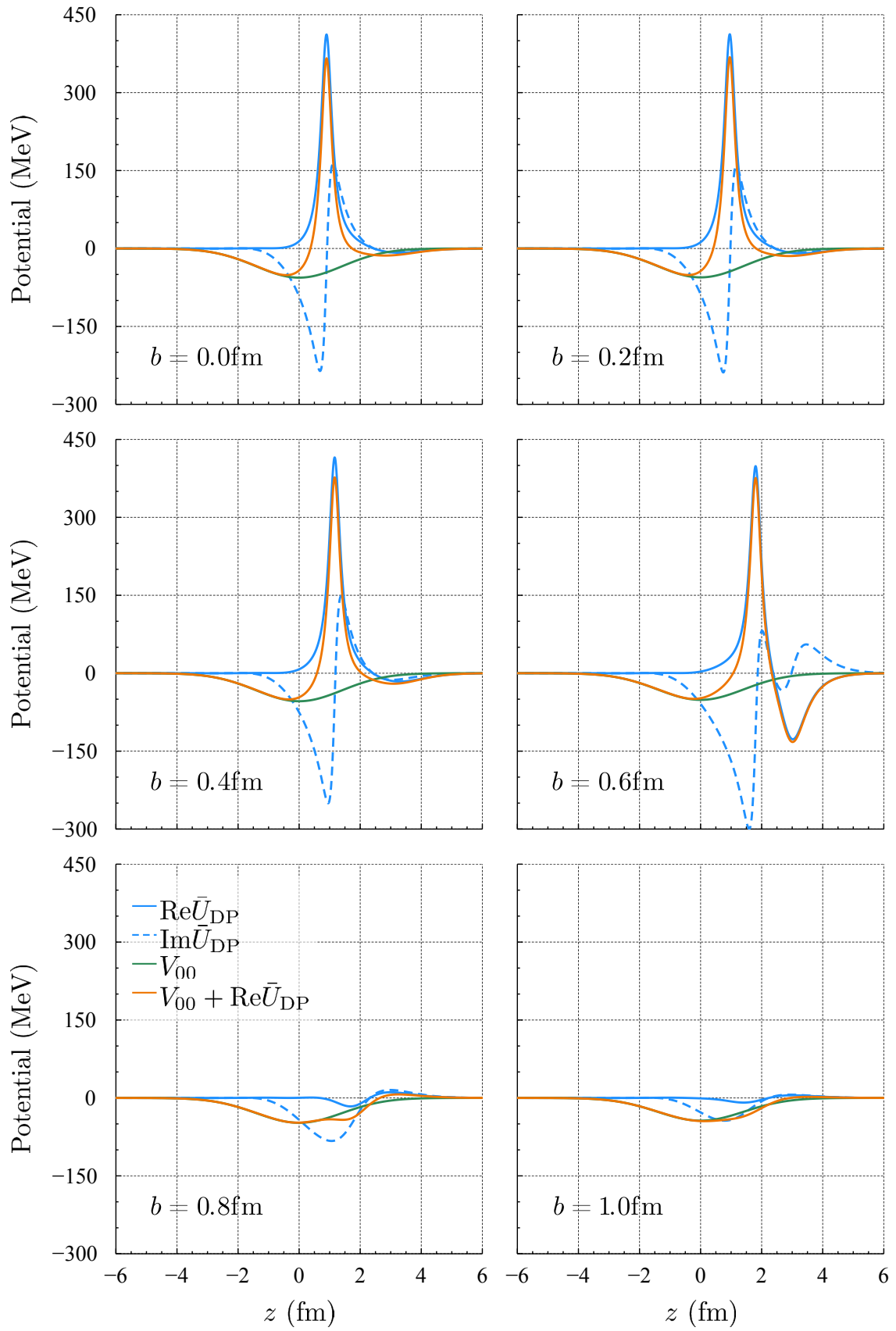


図4: 仮想的な2チャンネル結合問題の $\bar{U}_{\text{DP}}(b, z)$ の b 依存性.

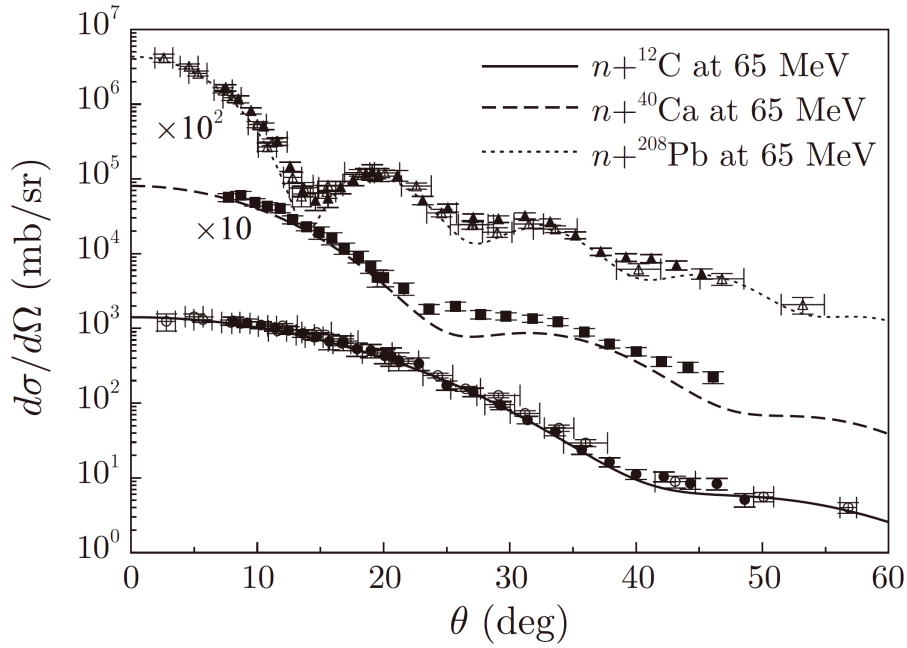


図 5: 多重散乱理論に基づく光学ポテンシャルを用いて計算した 65 MeV の中性子の弾性散乱角分布. 実線, 破線, 点線はそれぞれ ^{12}C , ^{40}Ca , ^{208}Pb 標的に対応する. 『量子散乱理論への招待』p.146 より引用. 詳細は Toyokawa *et al.*⁷ を参照.

7.9 歪曲波ボルン近似

チャンネル結合法の結果を単純化して非弾性散乱を 1 段階の遷移過程として記述することを考える. 非弾性チャンネルの S 行列, 遷移行列はアイコナル近似の下で,

$$S_1^{\text{EK}}(b) = \sqrt{\frac{K_1}{K_0}} \lim_{z \rightarrow \infty} \psi_1(b, z) \quad (29)$$

$$T_1(\theta) = \frac{i\hbar v_1}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{K_0}{K_1}} \int_0^\infty db J_0(K_1 b \theta) S_1^{\text{EK}}(b) b \quad (30)$$

と表せた. ここで, J_0 は 0 次の第 1 種 Bessel 関数である. この式の中の ψ_1 を

$$\psi_1(b, z) \rightarrow \psi_1^{(1)}(b, z) \quad (31)$$

と取り替えれば, S 行列, 遷移行列は 1 段階遷移のものになる:

$$S_1^{\text{EK}} \rightarrow S_1^{\text{EK}(1)} \quad T_1 \rightarrow T_1^{(1)} \quad (32)$$

アイコナルチャンネル方程式:

$$\begin{aligned} \psi_0(b, z) &= \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^z dz' V_{00}(b, z')\right) \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^z dz' \left[\frac{1}{i\hbar v_0} V_{01}(b, z') \psi_1(b, z') e^{i(K_1 - K_0)z'} \exp\left(-\frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^{z'} dz'' V_{00}(b, z'')\right) \right] + 1 \right\} \end{aligned} \quad (16 \text{ 再})$$

$$\begin{aligned} \psi_1(b, z) &= \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^z dz' V_{11}(b, z')\right) \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^z dz' \left[\frac{1}{i\hbar v_1} V_{10}(b, z') \psi_0(b, z') e^{i(K_0 - K_1)z'} \exp\left(-\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^{z'} dz'' V_{11}(b, z'')\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (17 \text{ 再})$$

を思い出せば, 無摂動の波動関数 $\psi_0^{(0)}$:

$$\psi_0^{(0)} = \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^z dz' V_{00}(b, z')\right) \quad (33)$$

を使って, 1 次摂動の波動関数 $\psi_1^{(1)}$ は,

$$\begin{aligned} \psi_1^{(1)}(b, z) &= \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^z dz' V_{11}(b, z')\right) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{z'} dz' \left[\frac{1}{i\hbar v_1} V_{10}(b, z') \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^{z'} dz'' V_{00}(b, z'')\right) \right. \\ &\quad \quad \quad \left. \times e^{i(K_0 - K_1)z'} \exp\left(-\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^{z'} dz'' V_{11}(b, z'')\right) \right] \end{aligned} \quad (34)$$

と表せる. 動的偏極ポテンシャルのときと同じようにして階段関数 Θ を使うと,

$$\begin{aligned} \psi_1^{(1)}(b, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz' \left\{ \Theta(z - z') \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^z dz' V_{11}(b, z')\right) \right. \\ &\quad \times \frac{1}{i\hbar v_1} V_{10}(b, z') \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^{z'} dz'' V_{00}(b, z'')\right) \\ &\quad \times e^{i(K_0 - K_1)z'} \exp\left(-\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{-\infty}^{z'} dz'' V_{11}(b, z'')\right) \left. \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz' \left\{ \Theta(z - z') \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{z'}^z dz'' V_{11}(b, z'')\right) e^{-iK_1 z'} \right. \\ &\quad \times \frac{1}{i\hbar v_1} V_{10}(b, z') \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^{z'} dz'' V_{00}(b, z'')\right) e^{iK_0 z'} \left. \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

となるから, $S_1^{\text{EK}(1)}$ は

$$\begin{aligned} S_1^{\text{EK}(1)}(b) &= \sqrt{\frac{K_1}{K_0}} \lim_{z \rightarrow \infty} \psi_1^{(1)} \\ &= \sqrt{\frac{K_1}{K_0}} \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \left\{ \underbrace{\Theta(z - z')}_{\rightarrow 1(z \rightarrow \infty)} \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{z'}^z dz' V_{11}(b, z')\right) e^{-iK_1 z'} \right. \\ &\quad \times \frac{1}{i\hbar v_1} V_{10}(b, z') \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^{z'} dz'' V_{00}(b, z'')\right) e^{iK_0 z'} \left. \right\} \\ &= \sqrt{\frac{K_1}{K_0}} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \left\{ \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_{z'}^{\infty} dz'' V_{11}(b, z'')\right) e^{-iK_1 z'} \right. \\ &\quad \times \frac{1}{i\hbar v_1} V_{10}(b, z') \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^{z'} dz'' V_{00}(b, z'')\right) e^{iK_0 z'} \left. \right\} \end{aligned} \quad (36)$$

これを (30) に代入して, 1 段階の遷移過程として記述した非弾性チャネルへの遷移行列

$$\begin{aligned} T_1^{(1)} &\equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} b db J_0(K_1 b \theta) \int_{-\infty}^{\infty} dz \left\{ \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_z^{\infty} dz' V_{11}(b, z')\right) e^{-iK_1 z} \right. \\ &\quad \times V_{10}(b, z) \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^z dz' V_{00}(b, z')\right) e^{iK_0 z} \left. \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

を得る. ϕ_R 積分:

$$\int_0^{2\pi} d\phi_R \exp(-iK_1 b \theta \cos \phi_R) = 2\pi J_0(K_1 b \theta) \quad (38)$$

を実行する前に (37) を戻すと,

$$\begin{aligned}
T_1^{(1)} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\phi_R b db dz \left\{ e^{-iK_1 b \theta \cos \phi_R} \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_z^\infty dz' V_{11}(b, z')\right) e^{-iK_1 z} \right. \\
&\quad \left. \times V_{10}(b, z) \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^z dz' V_{00}(b, z')\right) e^{iK_0 z} \right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{R} \left\{ \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_z^\infty dz' V_{11}(b, z')\right) e^{-i\mathbf{K}'_1 \cdot \mathbf{R}} \right. \\
&\quad \left. \times V_{10}(b, z) \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^z dz' V_{00}(b, z')\right) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}} \right\} \quad (39)
\end{aligned}$$

となり, これは次のように解釈できる.

$$\begin{aligned}
T_1^{(1)} &= \left\langle \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{i\hbar v_1} \int_z^\infty dz' V_{11}(b, z')\right) e^{i\mathbf{K}'_1 \cdot \mathbf{R}} \middle| V_{10} \middle| \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^z dz' V_{00}(b, z')\right) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}} \right\rangle \\
&= \left\langle \chi_{\mathbf{K}'_1}^{\text{EK}(-)} \middle| V_{10} \middle| \chi_{\mathbf{K}_0}^{\text{EK}(+)} \right\rangle \equiv T_1^{\text{DWBA}} \quad (40)
\end{aligned}$$

ただし,

$$\chi_{\mathbf{K}'_1}^{\text{EK}(-)}(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{i\hbar v_1} \int_z^\infty dz' V_{11}(b, z')\right) e^{i\mathbf{K}'_1 \cdot \mathbf{R}} \quad (41)$$

$$\chi_{\mathbf{K}_0}^{\text{EK}(+)}(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_0} \int_{-\infty}^z dz' V_{00}(b, z')\right) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}} \quad (42)$$

である. 散乱波の漸近的な運動量の方向 $\mathbf{K}'_1, \mathbf{K}_0$ を χ に下付で付与し, また, 散乱波の伝播の方向を表す (\pm) を χ に上付で付与している. $\chi_{\mathbf{K}_0}^{\text{EK}(+)}, \chi_{\mathbf{K}'_1}^{\text{EK}(-)}$ はポテンシャル V_{00}, V_{11} によって入射, 放出平面波から歪められた波 (=歪曲波) であり, $\chi_{\mathbf{K}_0}^{\text{EK}(+)}$ が相互作用 V_{10} によって $\chi_{\mathbf{K}'_1}^{\text{EK}(-)}$ に遷移するというのが (40) の物理的な意味である. (41), (42) はポテンシャル V_{11}, V_{00} の下でのアイコナル近似による散乱波となっており, (チャンネル結合を無視したアイコナル近似の下で) V_{11}, V_{00} については無限次の効果を取り入れられている. 一方, V_{10} については 1 段階の遷移のみが取り入れられている. つまり, (40) は核力ポテンシャル V_{00}, V_{11} では表現できない残留相互作用 (residual interaction) V_{10} による 1 次の遷移過程を表現していると言える. 非弾性散乱のこのような記述の方法を歪曲波ボルン近似 (Distorted Wave Born Approximation: DWBA) と呼ぶ. DWBA はチャンネル結合法と比べてはるかに計算が簡単であり, 極めて多くの応用がある. 本章で考えてきた仮想的な 2 チャンネル結合問題においては, 図 6 中の inelastic(1step), 図 7 中の S_1^{EK} の 1step が DWBA による非弾性微分断面積, S 行列となる. 今回はアイコナル近似によって求めた歪曲波を用いたが, DWBA 計算と言った場合, 純量子力学的計算によって求められた歪曲波を用いるのが普通である. また, 各チャンネルの核力ポテンシャルとしては, それぞれのチャンネルの弾性散乱を記述する (と期待される) 複素ポテンシャル, 特に光学ポテンシャルを用いることが多い.

$\chi_{\mathbf{K}_0}^{\text{EK}(+)}, \chi_{\mathbf{K}'_1}^{\text{EK}(-)}$ のように伝播の方向を上付の (\pm) で表した. 最後にこの歪曲波の伝播の方向について述べる. (41), (42) を見るとわかるように, $\chi_{\mathbf{K}_0}^{\text{EK}(+)}$ が今まで扱ってきた散乱波と同じ形をしているのに対し, $\chi_{\mathbf{K}'_1}^{\text{EK}(-)}$ は歪曲関数 $\psi_1^{(-)}$ が

$$\psi_1^{(-)} \equiv \exp\left(-\frac{1}{i\hbar v_1} \int_z^\infty dz' V_{11}(b, z')\right) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_\infty^z dz' V_{11}(b, z')\right) \quad (43)$$

と定義され, ポテンシャル V_{11} の積分範囲が異なる. ∞ から z までの積分は歪曲関数の伝播が通常 ($-\infty$ から z まで) と逆向きであることを意味している. z 成分のみに注目すれば, $\psi_1^{(-)}$ は $z \rightarrow \infty$ の彼方から z まで伝播してきた波と解釈できる. 一般にこのような性質を持つ波は時間反転した波と呼ばれ, 時間反転演算子 $\hat{\theta}$ を用いて,

$$\chi_{\mathbf{K}'_1}^{(-)}(\mathbf{R}) \equiv \hat{\theta} \chi_{\mathbf{K}'_1}^{(+)}(\mathbf{R}) = \chi_{-\mathbf{K}'_1}^{(+)*}(\mathbf{R}) \quad (44)$$

と表せる.*³ この関係式は複素ポテンシャルが作用する場合もそのまま成立する. 重要な結論は, 遷移行列のブラ $\langle \beta |$ に現れる波には時間反転した散乱波を用いなければならないということである. 平面波の場合は (44) の変換に対して不

*³ 反応粒子のスピンを考えるともう少し複雑な形になる.

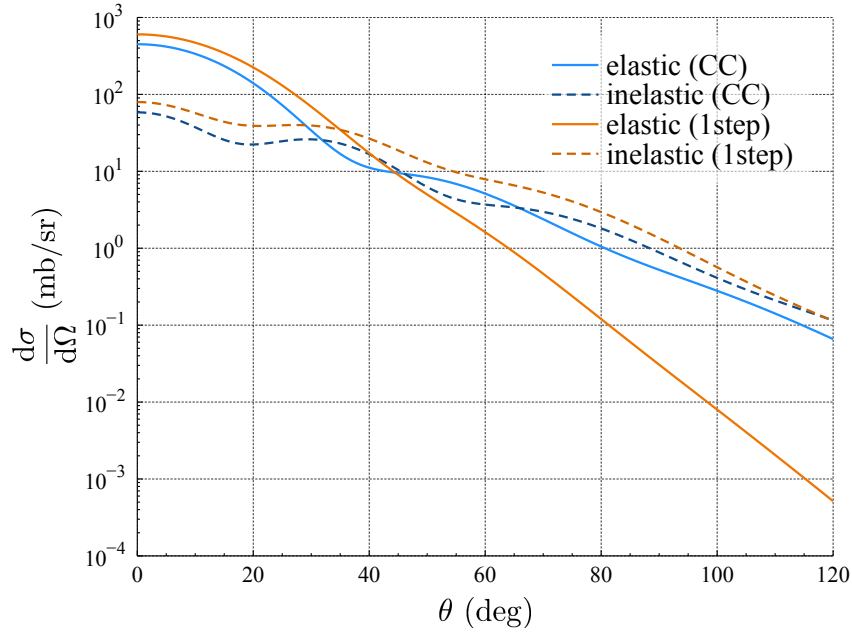


図 6: チャンネル結合法, 1 次の摂動計算によって得られた弾性散乱及び非弾性散乱の角分布. 実線, 破線は弾性散乱, 非弾性散乱を表し, 青色はチャンネル結合法による結果を, オレンジ色は 1 次の摂動計算の結果を表す.

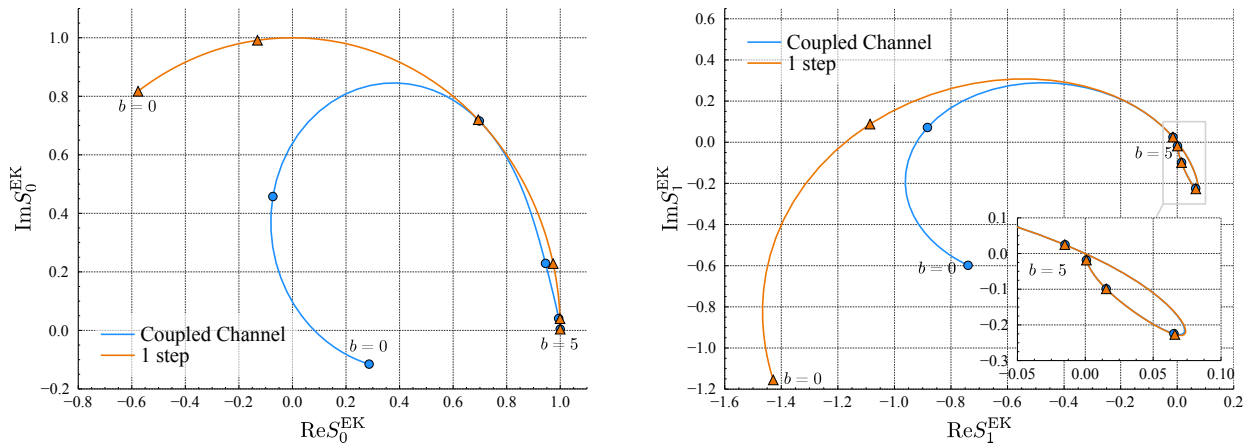


図 7: アイコナル S 行列の b による変化. 左が弾性チャンネル, 右が非弾性チャンネルの S 行列. 青色の実線はチャンネル結合法による計算結果, オレンジ色の実線は 1 次摂動の計算結果. $b = 0$ fm から 5 fm まで 1 fm 間隔でマーカーを表示している.

変であるから, (\pm) の区別の必要はない. これまでは $\langle \beta |$ に平面波を入れていたので, (\pm) を示す必要はなかったが, ポテンシャルの影響を取り入れた波を $\langle \beta |$ に用いる場合は伝播の方向 (\pm) に注意が必要である.

! Note

アイコナル近似を用いる場合に (44) を使って時間反転した波を考える. このとき, (44) が正確に成り立つのは, \mathbf{K}'_1 が z 軸に並行なときのみであることに注意が必要である. z 軸に反平行で大きさが K_1 の波数ベクトル $-\mathbf{K}_1$ で入射するとき, アイコナル近似の下, 散乱波は

$$\chi_{-\mathbf{K}_1}^{\text{EK}(+)}(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(\frac{1}{i\hbar v_1} \int_z^\infty dz' U_{11}(b, z')\right) e^{-i\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{R}} \quad (45)$$

となる。ここで、ポテンシャルは複素ポテンシャルを考えている。(44)に従って(45)の複素共役をとると、

$$\chi_{-\mathbf{K}_1}^{\text{EK}(+)*}(\mathbf{R}) = \chi_{\mathbf{K}_1}^{\text{EK}(-)}(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{i\hbar v_1} \int_z^\infty dz' U_{11}^*(b, z')\right) e^{i\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{R}} \quad (46)$$

となる。これは(41):

$$\chi_{\mathbf{K}'_1}^{\text{EK}(-)}(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{i\hbar v_1} \int_z^\infty dz' V_{11}(b, z')\right) e^{i\mathbf{K}'_1 \cdot \mathbf{R}} \quad (41 \text{ 再})$$

と平面波部分の波数ベクトルのみが異なる。(41)は $\mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}'_1$ の補正を行ったものであると解釈できる。歪曲関数の部分には何の補正も施していないので、 \mathbf{K}'_1 が z 軸から傾いている効果は($\mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}'_1$ によって)平面波部分にしか取り入れられていないことになる。これも前方散乱近似の一種と捉えることができる。

付録 A アイコナルチャネル結合方程式の数値解法

テキスト¹のプロットを再現する Jupyter Notebook を <https://github.com/yano404/CoupledChannelMethod> に置いてあります。Julia という言語を使ってコードは書いています。binder 上で実行できるようにしているのでローカルでの環境構築なしにブラウザ上で実行することができます。 <https://mybinder.org/v2/gh/yano404/CoupledChannelMethod/HEAD> をクリックあるいはブラウザに入力して試してみてください。

参考文献

- [1] 緒方 一介, 『量子散乱理論への招待』, フェムトの世界を見る物理 (共立出版, 2017).
- [2] H. Feshbach, *Annals of Physics* **5**, 357 (1958).
- [3] 河合 光路, 吉田 思郎, 『原子核反応論』, 朝倉物理学大系 19 (朝倉書店, 2002).
- [4] K. M. Watson, *Phys. Rev.* **89**, 575 (1953).
- [5] K. M. Watson, *Rev. Mod. Phys.* **30**, 565 (1958).
- [6] A. Kerman, H. McManus, and R. Thaler, *Annals of Physics* **8**, 551 (1959).
- [7] M. Toyokawa, M. Yahiro, T. Matsumoto, K. Minomo, K. Ogata, and M. Kohno, *Phys. Rev. C* **92**, 024618 (2015).
- [8] K. Amos, P. Dortmans, H. Von Geramb, S. Karataglidis, and J. Raynal, JW Negele and E. Vogt, editors **25**, 275 (2000).
- [9] T. Furumoto, Y. Sakuragi, and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. C* **78**, 044610 (2008).