

核力のメソン理論

矢野 隆之*

2021年6月16日

1 メソン

Coulomb 力は光子が荷電粒子の間にやりとりされることによって生じる。これと同じように、核子の間で中性の π^0 メソン,あるいは電荷を持った π^\pm メソンがやりとりされ(図1),この結果として核力が生じるというのが π メソン場の理論である。1935年に湯川秀樹氏によって提案された π メソン場の理論は,核力の多くの特徴を説明し,大きな成功を収めた。

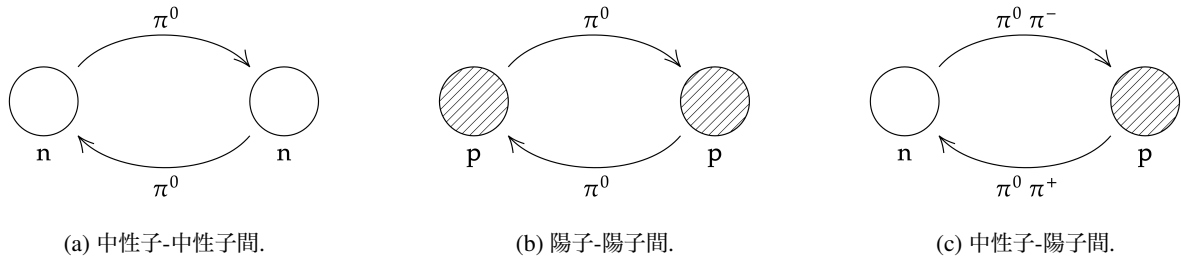


図1: π メソンのやりとりのイメージ.

π メソン場の理論から,核力の作用距離 a とメソンの質量 m_π の間には,

$$a = \frac{\hbar}{m_\pi c} \quad (1)$$

という関係が導かれる。これと1947年に実験から得られた $m_\pi = 274m_e = 140 \text{ MeV}$ を使うと,

$$a = 1.41 \text{ fm} \quad (2)$$

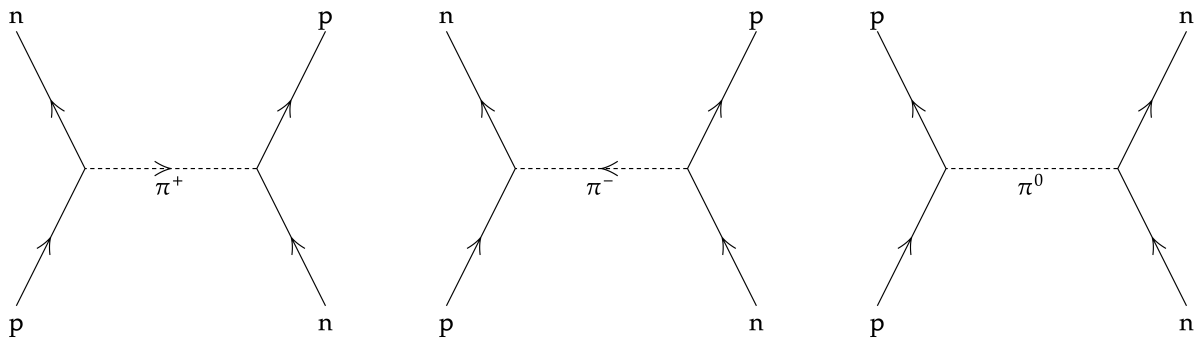
と妥当な値が得られる。電気素量 e は電子と電磁場の結びつきの強さを表す結合定数であり,電子が格子を放出,吸収する確率は e^2 に比例する。これと同じように π メソンの核子との結合の強さを表す f という定数がメソン場の理論では導入される。この f を $f \gg e$ とすれば,核力が電磁力に比べて非常に強いという事実を説明することができる。 π メソン場の理論は,核力の作用距離,強いという事実の説明だけでなく,

- 核力の荷電独立性
- 核力のスピン状態による違い
- テンソル力の存在

の説明にも成功した。

陽子と中性子の間に π メソンがやりとりされる場合を考える。核子が π メソンを放出,吸収する際に電荷の保存則が成り立つとすると,図2に示すように, π^\pm メソンの交換からは交換力が, π^0 メソンの交換からは非交換力が現れる。

* 最近腰痛に悩んでいる。カフェイン依存の疑いあり。



(a) π^+ メソンの交換, 交換力が現れる. (b) π^- メソンの交換, 交換力が現れる. (c) π^0 メソンの交換, 交換力が現れる.

図 2: π メソンのやりとり.

2 場の量子化

π メソンの交換によって核力を説明するためには場の量子論の知識を必要とする. π メソンによる核力の詳細をみていく前に, 後で使う事項と式について軽く説明する.

2.1 粒子と場の対応関係

粒子と場の関係は表 1 のようになっている. 今回扱う π^0, π^\pm メソンは中性スピン 0 ボソン, 荷電スピン 0 ボソンであるから, それぞれ実スカラー場と複素スカラー場が対応する. こういう関係があるのだと言い切ってしまうとそれまでだが, なんだかそれではゼミ発表担当としての責任を果たしていない気がするので, 表 1 の上 2 つの対応を示す.

表 1: 粒子と場の対応関係

粒子	場
スピン 0 ボソン	実スカラー場 $\phi(\mathbf{x}, t)$
荷電スピン 0 ボソン	複素スカラー場 $\phi(\mathbf{x}, t)$
スピン 1 質量 0 ボソン (光子)	実ベクトル場 $A_\mu(\mathbf{x}, t)$
スピン 1/2 フェルミオン (e^\pm , クォーク etc)	スピノール場 $\psi_r(\mathbf{x}, t)$

2.2 中性スピン 0 ボソン

2.2.1 中性スピン 0 ボソンに対応する場

運動量 \mathbf{k} のボソンの波動関数 $u_{\mathbf{k}}(x)$ は, Klein-Gordon 方程式:

$$(\square + \mu^2)u_{\mathbf{k}}(x) = 0 \quad (3)$$

に従う. ここで, \square はダランベルシアン

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \quad (4)$$

μ は

$$\mu = \frac{mc}{\hbar} \quad (5)$$

である。粒子が体積 $V = L^3$ の立方体中にあるとすると, (3) の解 $u_k(x)$ は

$$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (6)$$

である。ここで, $\omega_k, \mathbf{x}, \mathbf{k}$ は,

$$\omega_k = c\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2} \quad (7)$$

$$\mathbf{x} = (ct, x_1, x_2, x_3) \quad (8)$$

$$\mathbf{k} = \left(\frac{\omega_k}{c}, k_1, k_2, k_3 \right) \quad (9)$$

であり, $u_k(x)$ を (3) に代入すると, 解となっていることは容易に確認できる。以降, 自然単位系 $c = \hbar = 1$ で計算を進める。

$|\text{vac.}\rangle$ で粒子が 1 つも存在しない真空状態を表し, 運動量 \mathbf{k} の粒子が n 個ある状態を $|n_{\mathbf{k}}\rangle$ と表すことにする。また, 運動量が $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ の粒子が n_{k_1}, n_{k_2} 個ある状態を $|n_{k_1}, n_{k_2}\rangle$ のように表す。

次に, 運動量 \mathbf{k}_i のボソンを生成, 消滅させる演算子 $\hat{a}_{k_i}^\dagger, \hat{a}_{k_i}$ を定義する。 $\hat{a}_{k_i}^\dagger, \hat{a}_{k_i}$ は交換関係

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{k_i}, \hat{a}_{k_j}^\dagger] &= \delta_{k_i, k_j} \\ [\hat{a}_{k_i}, \hat{a}_{k_j}] &= 0 \\ [\hat{a}_{k_i}^\dagger, \hat{a}_{k_j}^\dagger] &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

と真空の定義

$$\hat{a}_{k_i} |\text{vac.}\rangle = 0, \quad \langle \text{vac.} | \text{vac.} \rangle = 1. \quad (11)$$

をみtasものとして定義することができる。生成, 消滅演算子の働きをわかりやすいように書けば, 次のようになる。

$$\hat{a}_{k_i}^\dagger |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_i}, \dots\rangle = \sqrt{n_{k_i} + 1} |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_i} + 1, \dots\rangle \quad (12)$$

$$\hat{a}_{k_i} |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_i}, \dots\rangle = \sqrt{n_{k_i}} |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_i} - 1, \dots\rangle \quad (n_{k_i} > 0) \quad (13)$$

この $\hat{a}_{k_i}^\dagger, \hat{a}_{k_i}$ を使って, 場の演算子 $\phi(x)$ は,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(x) \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} V}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right) \end{aligned} \quad (14)$$

と定義できる¹。(14) を見れば分かるように $\phi(x)$ も Klein-Gordon 方程式 (3) をみtas。

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \quad (15)$$

$\phi(x)$ はエルミートな演算子 ($\phi = \phi^\dagger$) であるので, 古典的には ($\hat{a}_{\mathbf{k}}$ をただの複素数とみなして) 実スカラー場と対応する。

2.2.2 中性自由スカラー場の Hamiltonian

この自由スカラー場の Lagrangian \mathcal{L} は

- Lorentz 不変である。
- Lagrangian から導かれる EOM が Klein-Gordon 方程式となる。

という要請から,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - m^2 \phi^2 \right) \quad (16)$$

¹ この $\phi(x)$ の物理的な意味は, \mathbf{x} に \mathbf{k} の粒子の生成と消滅の両方を行うということになる。

となる. 実際, (16) を Euler-Lagrange 方程式に代入してみると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} &= -m^2 \phi - \frac{1}{2} \partial_\nu \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu \phi)} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \nabla^2 \phi \right] \\ &= -(\square + m^2) \phi(x) = 0\end{aligned}\quad (17)$$

となり, Klein-Gordon 方程式をみたすことが分かる. $\phi(x)$ に対する正準共役運動量 $\pi(x)$ は

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi(x) \quad (18)$$

であるから, Hamiltonian \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} = \int d^3x \frac{1}{2} [\pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2] \quad (19)$$

となる. これに (14) を代入して,

$$\int d^3x \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (20)$$

に注意して計算すると,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k (\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k) \quad (21)$$

$[\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger] = 1$ より, $\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger = 1 + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ だから, \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} = \sum_k \omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) = \sum_k \omega_k \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \quad (22)$$

と書ける. \hat{N} は数演算子 $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ であり, \mathbf{k} のメソンの数を数えることに対応する演算子である. (22) の定数項 $\omega_k/2$ は真空状態のエネルギー²であるので, これを省略して,

$$\mathcal{H} = \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k = \sum_k \omega_k \hat{N} \quad (23)$$

と書く. (23) は, 運動量 \mathbf{k} のメソン 1 つのエネルギーは $\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ であり, 系全体のエネルギーは ω_k を粒子数の分だけ足し上げていったものということを意味している. これは直観的にも理解しやすい.

2.3 荷電スピン 0 ボソン

2.2 節では, 中性スピン 0 ボソンは実スカラー場と対応することを説明し, 自由実スカラー場の Hamiltonian を導いた. 次に興味があるのは, 中性ではなく電荷を持つボソンがどのような場と対応するかということである. この節では, 荷電スピン 0 ボソンが複素スカラー場と対応することを説明する.

2.3.1 複素スカラー場

実スカラー場 $\varphi_{\mathbb{R}}$ は

$$\varphi_{\mathbb{R}}(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} (a_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + a_k^* \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})) \quad (24)$$

² 真空エネルギー $\sum_k \omega_k$ は量子化において演算子の順序が一意的でないために生じる. つまり, 実スカラー場 φ を場の演算子 ϕ で置き換える際に, $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$ の順序を指定しないために生じてしまう. 古典的には $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ と $\frac{1}{2}(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger)$ は同じ意味になる. しかし, 量子的には真空エネルギーが 0 となる, つまり正しい演算子の形は $\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger$ であり, $\frac{1}{2}(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger)$ は正しい形ではない.

と表せた. これを複素に拡張し, 複素スカラー場 $\varphi_{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{C}}(x) &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} (b_k \exp(ik \cdot x) + c_{-k}^* \exp(-ik \cdot x)) \\ \varphi_{\mathbb{C}}^*(x) &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} (b_k^* \exp(-ik \cdot x) + c_{-k} \exp(ik \cdot x))\end{aligned}\quad (25)$$

を考える. $a_k \exp(ik \cdot x)$ と $a_k^* \exp(-ik \cdot x)$ が複素共役であるので, $\varphi_{\mathbb{R}}$ は実数となる. 一方, (25) を見て分かるように, $b_k \exp(ik \cdot x)$ と $c_{-k}^* \exp(-ik \cdot x)$ は複素共役になっていないので, $\varphi_{\mathbb{C}}$ は複素数となる. この $b_k, b_k^*, c_{-k}, c_{-k}^*$ を生成, 消滅演算子 $\hat{b}_k, \hat{b}_k^\dagger, \hat{c}_{-k}, \hat{c}_{-k}^\dagger$ に置き換えて, 場の演算子を構成する.

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} (\hat{b}_k \exp(ik \cdot x) + \hat{c}_{-k}^\dagger \exp(-ik \cdot x)) \\ \phi^\dagger(x) &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} (\hat{b}_k^\dagger \exp(-ik \cdot x) + \hat{c}_{-k} \exp(ik \cdot x))\end{aligned}\quad (26)$$

\hat{b}_k, \hat{c}_{-k} の交換関係は次のようである.

$$\begin{aligned}[\hat{b}_{k_i}, \hat{b}_{k_j}^\dagger] &= [\hat{c}_{-k_i}, \hat{c}_{-k_j}^\dagger] = \delta_{k_i, k_j} \\ [\hat{b}_{k_i}, \hat{b}_{k_j}] &= [\hat{c}_{-k_i}, \hat{c}_{-k_j}] = 0 \\ [\hat{b}_{k_i}^\dagger, \hat{b}_{k_j}^\dagger] &= [\hat{c}_{-k_i}^\dagger, \hat{c}_{-k_j}^\dagger] = 0 \\ [\hat{b}_{k_i}, \hat{c}_{-k_j}] &= [\hat{b}_{k_i}^\dagger, \hat{c}_{-k_j}^\dagger] = [\hat{b}_{k_i}, \hat{c}_{-k_j}^\dagger] = [\hat{b}_{k_i}^\dagger, \hat{c}_{-k_j}] = 0\end{aligned}\quad (27)$$

実スカラー場のときと同じように

- Lorentz 不変である.
- Lagrangian から導かれる EOM が Klein-Gordon 方程式となる.

という要請から, Lagrangian \mathcal{L} を考えると, 自由複素スカラー場の \mathcal{L} は,

$$\mathcal{L} = \partial_\nu \phi^\dagger \partial^\nu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (28)$$

となる. 実際にこれを Euler-Lagrange 方程式に代入してみると,

$$(\square - m^2)\phi^\dagger = (\square - m^2)\phi = 0 \quad (29)$$

となり, Klein-Gordon 方程式が得られる.

複素スカラー場の変換

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = \exp(-i\alpha)\phi \\ \phi^\dagger &\rightarrow \phi'^\dagger = \exp(i\alpha)\phi^\dagger\end{aligned}\quad (30)$$

を考えると, この変換のもとで \mathcal{L} は不変であることが分かる. つまり, 作用 S もこの変換に対して不変であり, ネーターの定理から保存量が存在することがわかる. α として微量ととると, 変換 (30) は次のように表せる.

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = (1 - i\alpha)\phi = \phi - i\alpha\phi \\ \phi^\dagger &\rightarrow \phi'^\dagger = (1 + i\alpha)\phi^\dagger = \phi + i\alpha\phi^\dagger\end{aligned}\quad (31)$$

つまり,

$$\delta\phi = -i\alpha\phi, \quad \delta\phi^\dagger = +i\alpha\phi. \quad (32)$$

である. これからカレント J^μ は

$$J^\mu = -i[\phi^\dagger(\partial^\mu\phi) - (\partial^\mu\phi^\dagger)\phi] \quad (33)$$

と計算でき、保存量 Q は

$$\begin{aligned}
Q &= \int d^3x J^0 \\
&= -i \int d^3x \left(\phi^\dagger (\partial^0 \phi) - (\partial^0 \phi^\dagger) \phi \right) \\
&= \sum_k \left[\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k - \hat{c}_{-k}^\dagger \hat{c}_{-k} \right] \\
&= \sum_k \left[\hat{N}_k^{(+)} - \hat{N}_k^{(-)} \right] (= N^{(+)} - N^{(-)}) \tag{34}
\end{aligned}$$

となる。 J^μ を 4 元電流とみなせば、 J^0 は電荷密度であり、その全空間積分である Q は電荷に相当する。つまり、(34) は電荷の保存則を表している。 \hat{b} によって生成、消滅される粒子の電荷を + ととると、 \hat{c} によって生成、消滅される粒子の電荷は - となり、複素スカラー場 ϕ は電荷をもつ粒子を記述することができる。なお、変換 (30) を大域的位相変換と呼ぶ。

2.3.2 荷電自由スカラー場の Hamiltonian

荷電スピン 0 ボソンは複素スカラー場と対応することは説明できた。あとは、この荷電自由スカラー場の Hamiltonian を求めれば、準備としては万全である。Lagrangian の表式も既に導いているし、Hamiltonian の計算も実スカラー場のときとほとんど同じようにしてできる (大体 δ 関数の計算) ので、細かな計算は省略させてもらう。Hamiltonian \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} = \sum_k \omega_k \left(\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \hat{c}_{-k}^\dagger \hat{c}_{-k} \right) = \sum_k \omega_k \left(\hat{N}_k^{(+)} + \hat{N}_k^{(-)} \right) \tag{35}$$

となる。これは正負の電荷をもつ粒子を数え上げ、その粒子のエネルギー ω_k を足し上げることを意味している。これは中性スカラー場の粒子の種類を 2 つにしたただけなので、直観的に理解できる。

ネーターの定理

ϕ の変分 $\delta\phi$ を考える。この変分による作用 S の変化 δS は

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right] \\
&= \int d^4x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta\phi) \right] \tag{36} \\
&= \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right]
\end{aligned}$$

となる。これから、変分 $\delta\phi$ に対して作用 S が不変に保たれるならば、

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] = \partial_\mu J^\mu = 0 \tag{37}$$

が成り立つことが分かる。 $J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi$ を 4 元カレントと呼ぶ。

$$Q = \int d^3x J^0 \tag{38}$$

を定義すると、(37) から、

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \frac{\partial J^0}{\partial t} = - \int d^3x \sum_{i=1}^3 \partial_i J^i = - \int dS \cdot \mathbf{J} \quad (\because \text{Gauss の発散定理}) \tag{39}$$

を得る。場が十分速く無限遠方で 0 になるとすると、この表面項は 0 となるから、

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \tag{40}$$

となる。つまり、 Q は時間によらない保存量である。代表的な対称性と保存量の対応を表 2 に示す。

表 2: 対称性と保存量の対応

対称性	保存量
時間の平行移動	エネルギー
空間の平行移動	運動量
空間回転	角運動量
大域的位相変換	電荷

2.4 まとめ

最後に後で使う事項, 式をまとめておく.

スピン 0 ボソンと対応する場

- 中性スピン 0 ボソンは実スカラー場, 荷電スピン 0 ボソンは複素スカラー場と対応する.
- 中性スカラー場は

$$\phi(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \left(\hat{a}_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \hat{a}_k^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right). \quad (14 \text{ 再})$$

- 自由中性スカラー場の Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k = \sum_k \omega_k \hat{N}_k. \quad (23 \text{ 再})$$

- 荷電スカラー場は

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \left(\hat{b}_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \hat{c}_{-k}^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right), \\ \phi^\dagger(x) &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \left(\hat{b}_k^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \hat{c}_{-k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right). \end{aligned} \quad (26 \text{ 再})$$

- 自由荷電スカラー場の Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = \sum_k \omega_k \left(\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \hat{c}_{-k}^\dagger \hat{c}_{-k} \right) = \sum_k \omega_k \left(\hat{N}_k^{(+)} + \hat{N}_k^{(-)} \right). \quad (35 \text{ 再})$$

3 π^0 メソンによる核力

まず, π^0 メソンによる核力について考える. π^0 メソンは

- 中性. 電荷を持たない.
- スピン 0 ボソン.

だから, 2 節で見たように, 実スカラー場と対応する. π^0 メソンの生成, 消滅演算子を $\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k$ とすると, π^0 メソンのスカラー場 ϕ_0 は,

$$\phi_0 = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \left(\hat{a}_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \hat{a}_k^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right) \quad (41)$$

と表せ、メソン場の Hamiltonian \mathcal{H}_0 は

$$\mathcal{H}_0 = \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k = \sum_k \omega_k \hat{N} \quad (42)$$

である。

次に、 π^0 メソンと核子との相互作用 Hamiltonian $\mathcal{H}'_{\pi^0 N}$ を考えていく。メソン場は電磁場のように古典論との対応がないため、次に挙げる手がかりと核子の運動は非相対論的に扱えるという仮定から、 $\mathcal{H}'_{\pi^0 N}$ の候補を考え、吟味することにする。

1. $\mathcal{H}'_{\pi^0 N}$ はエルミートな演算子である。
2. 核子の座標、スピン、運動量の関数である。
3. Lorentz 不変量である。
4. パリティが正である。

これらの制限から $\mathcal{H}'_{\pi^0 N}$ として次の2つの形が考えられる。

$$\mathcal{H}'_{\pi^0 N} \stackrel{?}{=} \mathcal{H}'_{\pi^0 N}^{(1)} = g_0 \sum_n \phi_0(\mathbf{r}_n) \quad (43)$$

$$\mathcal{H}'_{\pi^0 N} \stackrel{?}{=} \mathcal{H}'_{\pi^0 N}^{(2)} = \frac{f_0}{m_\pi} \sum_n \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \nabla \phi_0(\mathbf{r}_n) \quad (44)$$

ここで、 $\mathbf{r}_n, \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_n$ は n 番目の核子の位置、スピンベクトルである。 m_π は π メソンの質量であり、(44) で $1/m_\pi$ を乗じているのは、 g_0 と f_0 の次元を同じにするためである。 $\mathcal{H}'_{\pi^0 N}$ は座標の反転に対して不変でなければならない、つまりパリティは+であるため、(43) と (44) では、 ϕ_0 のパリティが異なる。 $\boldsymbol{\sigma}$ は擬ベクトル (パリティ +)、 ∇ は真性ベクトル (パリティ -) であるため、 ϕ_0 は擬スカラー (パリティ -) である必要がある。

表3: $\mathcal{H}'_{\pi^0 N}$ の候補と ϕ_0 のパリティの関係。

$\mathcal{H}'_{\pi^0 N}$ (の候補)	ϕ_0 のパリティ
$g_0 \sum_n \phi_0(\mathbf{r}_n)$	スカラー (+)
$\frac{f_0}{m_\pi} \sum_n \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \nabla \phi_0(\mathbf{r}_n)$	擬スカラー (-)

今の段階ではどちらの形が正しいのかわからないので、 $\mathcal{H}'_{\pi^0 N}^{(1)}, \mathcal{H}'_{\pi^0 N}^{(2)}$ の両方について計算を進める。(41) を $\mathcal{H}'_{\pi^0 N}^{(1)}, \mathcal{H}'_{\pi^0 N}^{(2)}$ に代入すると、

$$\mathcal{H}'_{\pi^0 N}^{(1)} = g_0 \sum_n \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \left[\hat{a}_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n) + \hat{a}_k^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n) \right] \quad (45)$$

$$\mathcal{H}'_{\pi^0 N}^{(2)} = i \frac{f_0}{m_\pi} \sum_n \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} (\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{k}) \left[\hat{a}_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n) - \hat{a}_k^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n) \right] \quad (46)$$

を得る。2核子が $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ に静止していると仮定して、2核子系のエネルギーを計算する。図3のような π^0 メソンの交換による核力ポテンシャル U_0 は摂動の2次の項 $W^{(2)}$ に表れる。

$$W^{(2)} = \underbrace{\sum_k \frac{\langle \text{vac.} | \mathcal{H}'_2 | k \rangle \langle k | \mathcal{H}'_1 | \text{vac.} \rangle}{-\omega_k}}_{\text{①}} + \underbrace{\sum_k \frac{\langle \text{vac.} | \mathcal{H}'_1 | k \rangle \langle k | \mathcal{H}'_2 | \text{vac.} \rangle}{-\omega_k}}_{\text{②}} + (\text{自己エネルギー}) \quad (47)$$

核力ポテンシャル項 U_0

ここで、 \mathcal{H}'_i は i 番目の核子とメソンとの相互作用演算子であり、今の場合、

$$\mathcal{H}'_i = \left(\mathcal{H}'_{\pi^0 N}^{(1)} \right)_{n=i} = g_0 \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \left[\hat{a}_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) + \hat{a}_k^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) \right] \quad (48)$$

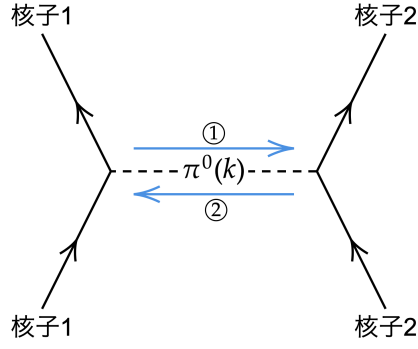


図3: π^0 メソンの交換.

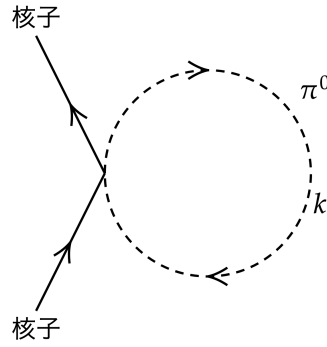


図4: 自己エネルギーのダイアグラム.

あるいは,

$$\mathcal{H}'_i = \left(\mathcal{H}'_{\pi^0 N} \right)_{n=i} = i \frac{f_0}{m_\pi} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} (\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{k}) \left[\hat{a}_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) - \hat{a}_k^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) \right] \quad (49)$$

である. 自己エネルギーは, $\langle \text{vac.} | \mathcal{H}'_i | k \rangle \langle k | \mathcal{H}'_i | \text{vac.} \rangle / (-\omega_k)$ のような, 核子が自分自身の放出したメソンを自分で再び吸収することからくる定数であり, ダイアグラムは図4のようになる. (47) の第1項は, 核子1が \mathbf{k} のメソンを放出して核子2がそのメソンを吸収する過程を表しており, 図3中の矢印①と対応している. 第2項は, 逆に核子2が \mathbf{k} のメソンを放出して核子1がそのメソンを吸収する過程であり, 図3中の矢印②と対応している.

$\mathcal{H}'_{\pi^0 N} = \mathcal{H}'_{\pi^0 N}^{(1)}$ として核力ポテンシャル $U_0^{(1)}$ を計算してみる.

$$\begin{aligned} \langle k | \mathcal{H}'_1 | \text{vac.} \rangle &= \left\langle k \left| g_0 \sum_{k'} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'} V}} \left[\hat{a}_{k'} \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_1) + \hat{a}_{k'}^\dagger \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_1) \right] \right| \text{vac.} \right\rangle \\ &= \langle k | g_0 \sum_{k'} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'} V}} \left[\underbrace{\exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_1) \langle \text{vac.} | \hat{a}_{k'} | \text{vac.} \rangle}_{=0} + \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_1) \underbrace{\langle \text{vac.} | \hat{a}_{k'}^\dagger | \text{vac.} \rangle}_{=|k'} \rangle \right] \\ &= \langle k | g_0 \sum_{k'} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'} V}} \left[\underbrace{\exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_1) |k'\rangle}_{\text{直交性から } k'=k \text{ だけ残る}} \right] \\ &= \frac{g_0}{\sqrt{2\omega_k V}} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1) \end{aligned} \quad (50)$$

を得る。積分項が $U_0^{(1)}$ のときと違って見えるが、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ において、先の積分を使える形に書き直すことができる。

$$\int d^3k \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}) \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))}{k^2 + m_\pi^2} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{1i} \sigma_{2j} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \int d^3k \frac{\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{k^2 + m_\pi^2} \quad (59)$$

このように変形すると、先の積分の結果がそのまま使えて、

$$\int d^3k \frac{\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{k^2 + m_\pi^2} = 2\pi^2 \frac{\exp(-m_\pi r)}{r} \quad (60)$$

である。したがって、 $U_0^{(2)}$ は

$$U_0^{(2)} = -\frac{f_0^2}{4\pi m_\pi^2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{1i} \sigma_{2j} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \frac{\exp(-m_\pi r)}{r} \quad (61)$$

これをさらに計算して、

$$U_0^{(2)} = \frac{1}{3} \frac{f_0^2}{4\pi} \left[(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + \left(1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{(m_\pi r)^2} \right) S_{1,2} \right] \frac{\exp(-m_\pi r)}{r} \quad (62)$$

$$S_{1,2} = 3 \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \quad (\text{テンソル力}) \quad (63)$$

を得る。

$U_0^{(1)}$, $U_0^{(2)}$ を求めたところでこれらと比較して、 $\mathcal{H}'_{\pi^0 N}^{(1)}$, $\mathcal{H}'_{\pi^0 N}^{(2)}$ のどちらが $\mathcal{H}'_{\pi^0 N}$ として正しいかを考える。

$$U_0^{(1)} = -\frac{g_0^2}{4\pi} \frac{\exp(-m_\pi r)}{r} \quad (57 \text{ 再})$$

$$U_0^{(2)} = \frac{1}{3} \frac{f_0^2}{4\pi} \left[(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + \left(1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{(m_\pi r)^2} \right) S_{1,2} \right] \frac{\exp(-m_\pi r)}{r} \quad (62 \text{ 再})$$

$$S_{1,2} = 3 \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \quad (63 \text{ 再})$$

$U_0^{(1)}$ が r のみの関数になっているのに対し、 $U_0^{(2)}$ は $(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$ を含んでおり、スピンの向きに依存している。さらに $U_0^{(2)}$ はテンソル力ポテンシャル $S_{1,2}$ も含んでおり、核力ポテンシャルの特徴が表せている。このことから、 $\mathcal{H}'_{\pi^0 N}$ としては、 $\mathcal{H}'_{\pi^0 N}^{(2)}$ が正しく、 ϕ は擬スカラーであることが分かる。こうして、 $\mathcal{H}'_{\pi^0 N}$ の正しい形が決定でき、

$$\mathcal{H}'_{\pi^0 N} = \frac{f_0}{m_\pi} \sum_n \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \nabla \phi_0(\mathbf{r}_n) \quad (64)$$

$$U_0 = \frac{1}{3} \frac{f_0^2}{4\pi} \left[(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + \left(1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{(m_\pi r)^2} \right) S_{1,2} \right] \frac{\exp(-m_\pi r)}{r} \quad (65)$$

であると分かった。

$U_0^{(1)}$, $U_0^{(2)}$ に共通している $e^{-m_\pi r}/r$ は、核力の作用半径が $m_\pi^{-1} (= \hbar/m_\pi c)$ であることを示している。このポテンシャル $e^{-m_\pi r}/r$ を湯川ポテンシャルと呼ぶ。

4 π^\pm メソンによる核力

π^0 メソンの議論をもとに荷電メソン π^\pm による核力について考えていく。2節で見たように、荷電スピン0ボソンの対応する場は複素スカラー場である。

π^+ メソン、 π^- メソンの生成、消滅演算子を \hat{b}_k^\dagger , \hat{b}_k , \hat{c}_k^\dagger , \hat{c}_k とすると、 π^\pm のスカラー場 ϕ は

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \left(\hat{b}_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \hat{c}_{-k}^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right) \quad (\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{p} \text{ に対応}) \\ \phi^\dagger &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \left(\hat{b}_k^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \hat{c}_{-k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right) \quad (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{n} \text{ に対応}) \end{aligned} \quad (66)$$

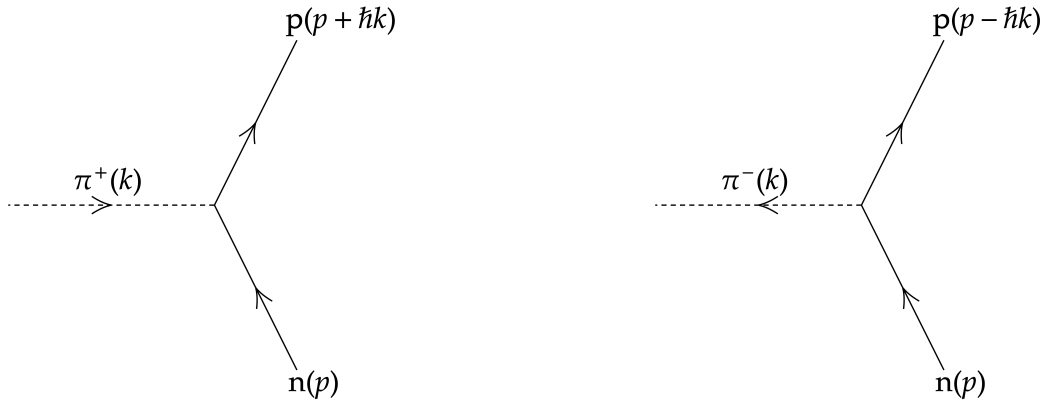


図 5: n による π^+ メソンの吸収. $\hat{b}_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ に対応. 図 6: n による π^- メソンの放出. $\hat{c}_{-k}^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ に対応.

と表せる. 図 5 に示すように, ϕ の第 1 項 $\hat{b}_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ は中性子が π^+ メソンを吸収して, 陽子になることに対応している. $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ は核子の運動量を $\hbar k$ だけ増やすことに対応している. ϕ の第 2 項 $\hat{c}_{-k}^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ は中性子が π^- メソンを放出して陽子になることを表し, $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ は核子の運動量を $\hbar k$ だけ下げることの意味している. 図 6 は第 2 項をダイアグラムに示したものである. ϕ^\dagger は ϕ とは逆に, π^+ メソンの放出と π^- メソンの吸収に対応している. つまり, ϕ は $n \rightarrow p$, ϕ^\dagger は $p \rightarrow n$ の遷移に対応している.

次に, π^0 メソンのときと同じように, 荷電メソン場と核子の相互作用 $\mathcal{H}'_{\pi^\pm N}$ を考える. $\mathcal{H}'_{\pi^\pm N}$ を得るために, まず最初に思いつくのが π^0 メソンの $\mathcal{H}'_{\pi^0 N} = \mathcal{H}'_{\pi^0 N}^{(2)}$ を複素スカラー場に拡張してみることである. (44) を複素スカラー場に拡張してみると,

$$\frac{f}{m_\pi} \sum_n [\sigma_n \cdot \nabla \phi + \sigma_n \cdot \nabla \phi^\dagger] \quad (67)$$

が得られるが, これでは, 全ての核子に対して, π^\pm メソンの吸収, 放出が可能な形になってしまっており,

- 陽子は π^- を放出できない.
- 中性子は π^+ を放出できない.

という電荷の保存則が取り入れられていない. この電荷の保存則を取り入れるために, アイソスピンという力学変数を導入する.

アイソスピン

陽子, 中性子の質量 m_p, m_n は,

$$m_p = 938.3 \text{ MeV}, \quad m_n = 939.6 \text{ MeV}. \quad (68)$$

とほとんど等しい. さらに, p-p, p-n, n-n 間で核力も等しい (荷電独立性). このように陽子, 中性子は電荷以外の性質が非常に似ていることから, 陽子, 中性子を核子の状態と捉えることができる. つまり, 核子が陽子状態にあるとき, 電荷は $+e$, 中性子状態にあるとき, 電荷は 0 と考えるわけである. 核子の電荷の状態は $+e$ か 0 しか存在せず, 力学変量 (演算子) の固有状態と捉えることができる. これはスピン (\uparrow or \downarrow) と非常によく似ている. 実際, スピンの演算子を使って, 陽子, 中性子状態を記述することができて, この物理量をアイソスピンと呼ぶ.

スピンベクトルと同じようにアイソスピン \mathbf{t} を

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \quad (69)$$

と定義する. $\boldsymbol{\tau}$ は, Pauli 行列と同じである.

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

核子の電荷演算子を

$$e \frac{1 - \tau_z}{2} = e \left(\frac{1}{2} - t_z \right) \quad (71)$$

と定義すると, $\tau_z = 1$ を中性子状態, $\tau_z = -1$ を陽子状態と定義できる. つまり, スピンの $|\uparrow\rangle$ を中性子に, $|\downarrow\rangle$ を陽子に対応させるということである. アイソスピンの固有状態を $|n\rangle, |p\rangle$ と書くと,

$$t_z |n\rangle = \frac{1}{2} \tau_z |n\rangle = \frac{1}{2} |n\rangle, \quad t_z |p\rangle = \frac{1}{2} \tau_z |p\rangle = -\frac{1}{2} |p\rangle. \quad (72)$$

となる. スピンのときと同じように昇降演算子 $\tau^{(\pm)}$:

$$\tau^{(\pm)} = \frac{1}{2} (\tau_x \pm i\tau_y) \quad (73)$$

を定義することで, 状態を遷移させることができる. $\tau^{(\pm)}$ の作用は次のようである.

$$\tau^{(+)} |p\rangle = |n\rangle, \quad \tau^{(+)} |n\rangle = 0, \quad \tau^{(-)} |n\rangle = |p\rangle, \quad \tau^{(-)} |p\rangle = 0. \quad (74)$$

アイソスピンを取り込んで, 正しい形の相互作用 $\mathcal{H}'_{\pi^\pm N}$ を考える. 図 5, 6 で表しているように, (66) の ϕ は $n \rightarrow p$, ϕ^\dagger は $p \rightarrow n$ の遷移に対応している. これを考慮に入れて, (67) にアイソスピンの項を加えると,

$$\mathcal{H}'_{\pi^\pm N} = \frac{\sqrt{2}f}{m_\pi} \sum_n \left[\tau_n^{(-)} \sigma_n \cdot \nabla \phi + \tau_n^{(+)} \sigma_n \cdot \nabla \phi^\dagger \right] \quad (75)$$

が得られる. $\tau_n^{(\pm)}$ は n 番目の核子のアイソスピンの昇降演算子 $\tau^{(\pm)}$ であり, $\sqrt{2}$ は結果を簡単にするために乗じた. (66) の ϕ, ϕ^\dagger をこの $\mathcal{H}'_{\pi^\pm N}$ に代入すると, $\mathcal{H}'_{\pi^0 N}$ のときと同じように計算できて,

$$\mathcal{H}'_{\pi^\pm N} = i \frac{\sqrt{2}f}{m_\pi} \sum_n \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} (\sigma_n \cdot \mathbf{k}) \left[\left(\tau_n^{(-)} \hat{b}_k + \tau_n^{(+)} \hat{c}_{-k} \right) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n) - \left(\tau_n^{(+)} \hat{b}_k^\dagger + \tau_n^{(-)} \hat{c}_{-k}^\dagger \right) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n) \right] \quad (76)$$

となる. これを元に, π^0 メソンのときと同じように 2 個の核子間の π^\pm メソンの交換による核力ポテンシャル U_\pm を計算する. π^0 メソンのときと違って, π^\pm の 2 種類のメソンがあることに注意が必要であり, π^+ の状態を $|k\rangle^+$, π^- の状態を $|k\rangle^-$ のように表すことにする. 2 核子間の π^\pm メソンの交換は図 7 に示すパターンが考えられるから, U_\pm は

$$\begin{aligned} U_\pm = & \sum_k \frac{\langle \text{vac.} |^+ \langle \text{vac.} | \mathcal{H}'_2 | k \rangle^+ | \text{vac.} \rangle^- \langle \text{vac.} |^+ \langle k | \mathcal{H}'_1 | \text{vac.} \rangle^+ | \text{vac.} \rangle^-}{-\omega_k} \\ & + \sum_k \frac{\langle \text{vac.} |^+ \langle \text{vac.} | \mathcal{H}'_2 | \text{vac.} \rangle^+ | -k \rangle^- \langle -k |^+ \langle \text{vac.} | \mathcal{H}'_1 | \text{vac.} \rangle^+ | \text{vac.} \rangle^-}{-\omega_k} \\ & + \sum_k \frac{\langle \text{vac.} |^+ \langle \text{vac.} | \mathcal{H}'_1 | k \rangle^+ | \text{vac.} \rangle^- \langle \text{vac.} |^+ \langle k | \mathcal{H}'_2 | \text{vac.} \rangle^+ | \text{vac.} \rangle^-}{-\omega_k} \\ & + \sum_k \frac{\langle \text{vac.} |^+ \langle \text{vac.} | \mathcal{H}'_1 | \text{vac.} \rangle^+ | -k \rangle^- \langle -k |^+ \langle \text{vac.} | \mathcal{H}'_2 | \text{vac.} \rangle^+ | \text{vac.} \rangle^-}{-\omega_k} \end{aligned} \quad (77)$$

と表せる. U_0 のときと同じように, $\mathcal{H}'_i = (\mathcal{H}'_{\pi^\pm N})_{n=i}$ である. (77) の項の下に付けた (a) などのラベルは, 図 7 のダイアグラムと対応している. ここで, 核子 1, 2 が陽子であるか中性子であるかというのを気にしなければならないのではないかと思うかもしれない. しかし, 陽子か中性子か判断し, π^\pm メソンを放出あるいは吸収させて状態を遷移させる役割は $\tau^{(\pm)}$ に任せているので, (安心して) U_0 のときと同じように U_\pm を計算することができる. 行列要素は前と同じよ

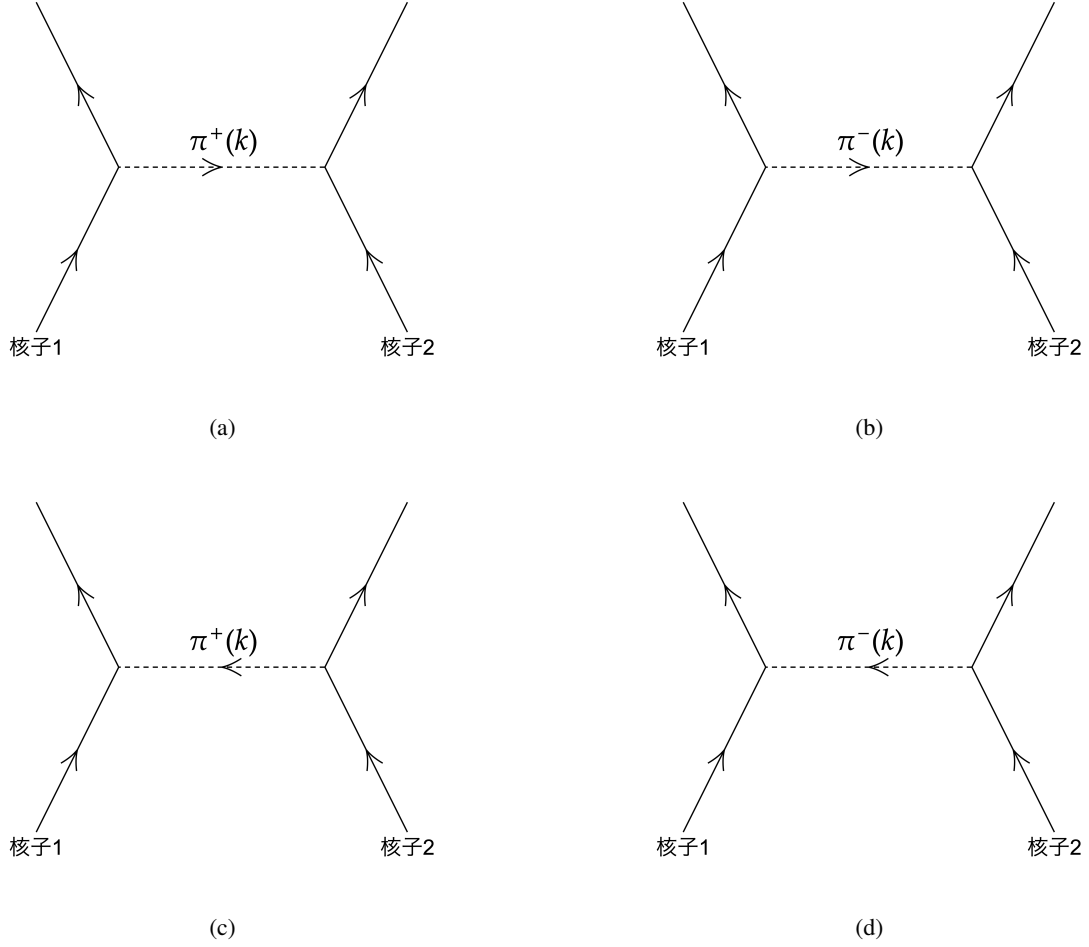


図 7: 2 核子間の π^\pm メソンの交換.

うに,

$$\begin{aligned}
 -\langle \text{vac.} | \langle k | \mathcal{H}'_1 | \text{vac.} \rangle^+ | \text{vac.} \rangle^- &= -\langle \text{vac.} | \langle k | i \frac{f}{m_\pi} \sum_{k'} \frac{1}{\sqrt{\omega_k V}} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k}') \\
 &\quad \left[\left(\tau_1^{(-)} \hat{b}_k + \tau_1^{(+)} \hat{c}_{-k} \right) \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_1) - \left(\tau_1^{(+)} \hat{b}_k + \tau_1^{(-)} \hat{c}_{-k} \right) \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_1) \right] | \text{vac.} \rangle^+ | \text{vac.} \rangle^- \\
 &= -i \frac{f}{m_\pi \sqrt{\omega_k V}} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k}) \tau_1^{(+)} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1) \quad (78)
 \end{aligned}$$

と計算できて,

$$\begin{aligned}
 U_\pm &= -\sum_k \frac{f^2}{m_\pi^2 \omega_k^2 V} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}) \tau_1^{(+)} \tau_2^{(-)} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) - \sum_k \frac{f^2}{m_\pi^2 \omega_k^2 V} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}) \tau_1^{(-)} \tau_2^{(+)} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) \\
 &\quad - \sum_k \frac{f^2}{m_\pi^2 \omega_k^2 V} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}) \tau_1^{(-)} \tau_2^{(+)} \exp(-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) - \sum_k \frac{f^2}{m_\pi^2 \omega_k^2 V} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}) \tau_1^{(+)} \tau_2^{(-)} \exp(-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) \\
 &= -2 \left(\tau_1^{(+)} \tau_2^{(-)} + \tau_1^{(-)} \tau_2^{(+)} \right) \sum_k \frac{f^2}{m_\pi^2 \omega_k^2 V} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}) \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) \\
 &= -2 \left(\tau_1^{(+)} \tau_2^{(-)} + \tau_1^{(-)} \tau_2^{(+)} \right) \frac{f^2}{(2\pi)^3 m_\pi^2} \int d^3 k \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k}) (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}) \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))}{k^2 + m_\pi^2} \quad (79)
 \end{aligned}$$

を得る. これは (58) に

$$2 \left(\tau_1^{(+)} \tau_2^{(-)} + \tau_1^{(-)} \tau_2^{(+)} \right) = \tau_{1x} \tau_{2x} + \tau_{1y} \tau_{2y} \quad (80)$$

を乗じただけのものであるから, U_0 の計算の結果を使うことができ, U_{\pm} は

$$U_{\pm} = (\tau_{1x}\tau_{2x} + \tau_{1y}\tau_{2y}) \frac{1}{3} \frac{f^2}{4\pi} \left[(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + \left(1 + \frac{3}{m_{\pi}r} + \frac{3}{(m_{\pi}r)^2} \right) S_{1,2} \right] \frac{\exp(-m_{\pi}r)}{r} \quad (81)$$

となる.

5 核力の荷電独立性

3, 4 節の内容をまとめると, 擬スカラーメソン場による核力ポテンシャルは,

$$U_0 = f_0^2 F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \quad (\pi^0 \text{メソンのやりとりによる部分}) \quad (82)$$

$$U_{\pm} = (\tau_{1x}\tau_{2x} + \tau_{1y}\tau_{2y}) f^2 F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \quad (\pi^{\pm} \text{メソンのやりとりによる部分}) \quad (83)$$

となる. ここで, $F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2)$ は,

$$F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) = \frac{1}{12\pi} \left[(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + \left(1 + \frac{3}{m_{\pi}r} + \frac{3}{(m_{\pi}r)^2} \right) S_{1,2} \right] \frac{\exp(-m_{\pi}r)}{r} \quad (84)$$

である.

f_0, f は π^0, π^{\pm} メソンの核子との結合定数を意味する. この結合定数の間に次の関係を仮定することで核力の荷電独立性, すなわち, 核力が核子の電荷に無関係であるという性質を説明することができる.

$$f_0 = \begin{cases} f & (\text{中性子の場合}) \\ -f & (\text{陽子の場合}) \end{cases} \quad (85)$$

これはアイソスピン演算子を使って,

$$f_0 = f\tau_z = f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (86)$$

と表すことができる. この関係を使うと U_0 は

$$U_0 = \tau_{1z}\tau_{2z} f^2 F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \quad (87)$$

となり, π^0, π^{\pm} 全てのメソンによる核力ポテンシャル U は,

$$\begin{aligned} U &= U_0 + U_{\pm} \\ &= (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) f^2 F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \\ &= (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \frac{1}{12\pi} \left[(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + \left(1 + \frac{3}{m_{\pi}r} + \frac{3}{(m_{\pi}r)^2} \right) S_{1,2} \right] \frac{\exp(-m_{\pi}r)}{r} \end{aligned} \quad (88)$$

と書ける.

U 中の $(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)$ から, 核力の荷電独立性を説明することができる. 2 核子の合成アイソスピンを \mathbf{T} とする.

$$\mathbf{T} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \quad (89)$$

2 核子の全電荷の演算子は

$$e(1 - T_z) \quad (90)$$

となる. アイソスピン演算子は Pauli 行列そのものである, (スピンのときと同じく) 表 4 に示すような $T = 1$ の荷電 3 重項状態と $T = 0$ の荷電 1 重項状態が存在する. 3 重項状態のとき, $\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = 1$, 1 重項状態のとき, $\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = -3$ である³. 表 4 から, 荷電 3 重項状態では, $\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = 1$ のために核子の組み合わせに依らずに核力が等しいこと (荷電独立性) が分かる. また, 同じ中性子-陽子の場合であっても, $T = 1(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = 1)$ と $T = 0(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = -3)$ では核力が非常に異なることも分かる. この違いの物理的な意味は Pauli の排他律から理解できる.

³ アイソスピン演算子 \mathbf{t} ではなく, Pauli 行列 $\boldsymbol{\tau}$ であることに注意.

表 4: 荷電 3 重項状態と 1 重項状態

T	T_z	全電荷	固有状態	核子の組み合わせ
荷電 3 重項状態 $T = 1$ $\tau_1 \cdot \tau_2 = 1$	1	0	$ n\rangle_1 n\rangle_2$	中性子 - 中性子
	0	e	$\frac{1}{\sqrt{2}}(n\rangle_1 p\rangle_2 + p\rangle_1 n\rangle_2)$	中性子 - 陽子
	-1	$2e$	$ p\rangle_1 p\rangle_2$	陽子 - 陽子
荷電 1 重項状態 $T = 0$ $\tau_1 \cdot \tau_2 = -3$	0	e	$\frac{1}{\sqrt{2}}(n\rangle_1 p\rangle_2 - p\rangle_1 n\rangle_2)$	中性子 - 陽子

Pauli の排他律は, 中性子同士, 陽子同士の間でのみ成り立ち, 中性子と陽子の間では成り立たない. このことは中性子と陽子とを全く別の種類の粒子と見なす立場であれば当然成り立つことである. しかし, 今はアイソスピンを導入し, 中性子, 陽子を核子という 1 つの種類の粒子の状態として扱っている. この場合, 陽子も中性子も同じ種類の粒子であるので, Pauli の排他律は陽子-中性子間でも働いてしまう. これは不都合である. そこで, 「核子の波動関数は核子の全ての座標 (位置座標 r , スピン変数 ζ , アイソスピン変数 η) の交換に対して反対称でなければならない」という要請によって, Pauli の排他律を表現する. この反対称性の要請が, 中性子と陽子を全く別の粒子とみなしたときの Pauli の排他律を再現していることを確認する.

簡単のため, 2 核子系を考える. 系の波動関数を

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \zeta_1, \eta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2, \eta_2) \quad (91)$$

とおく. \mathbf{r} は位置座標, ζ はスピン変数, η はアイソスピン変数である. アイソスピンのことをいったん忘れて, 陽子と中性子が異なる粒子であるという立場に立つと, Ψ から η が消えて, 同種の粒子の間の交換のときだけ反対称となる.

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \zeta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2) = -\Psi(\mathbf{r}_2, \zeta_2; \mathbf{r}_1, \zeta_1) \quad (\text{同種粒子の交換のとき}) \quad (92)$$

この関係をアイソスピンを含めた全ての座標の交換に対する反対称性から導き出すことができれば, それはつまり, 反対称性の要求が Pauli の排他律と同等であることを示している. 全ての座標の交換に対する反対称性は

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \zeta_1, \eta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2, \eta_2) = -\Psi(\mathbf{r}_2, \zeta_2, \eta_2; \mathbf{r}_1, \zeta_1, \eta_1) \quad (93)$$

と表せる. アイソスピンの固有関数を $\alpha(\eta), \beta(\eta)$ とおく. α, β はそれぞれ, 中性子状態, 陽子状態に対応し,

$$\tau_z \alpha(\eta) = +1\alpha(\eta), \quad \tau_z \beta(\eta) = -1\beta(\eta). \quad (94)$$

である. 2 核子とも中性子の場合を考えると, Ψ は,

$$\Psi_{nn}(\mathbf{r}_1, \zeta_1, \eta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2, \eta_2) = \Phi_{nn}(\mathbf{r}_1, \zeta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2) \alpha(\eta_1) \alpha(\eta_2) \quad (95)$$

と書ける. (93) の要請は,

$$\begin{aligned} \Phi_{nn}(\mathbf{r}_1, \zeta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2) \alpha(\eta_1) \alpha(\eta_2) &= -\Phi_{nn}(\mathbf{r}_2, \zeta_2; \mathbf{r}_1, \zeta_1) \alpha(\eta_2) \alpha(\eta_1) \\ \therefore \Phi_{nn}(\mathbf{r}_1, \zeta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2) &= -\Phi_{nn}(\mathbf{r}_2, \zeta_2; \mathbf{r}_1, \zeta_1) \end{aligned} \quad (96)$$

と書け, これはまさに (92) と同じであり, 中性子同士の Pauli の排他律を表している. 2 陽子系の場合も,

$$\Psi_{pp}(\mathbf{r}_1, \zeta_1, \eta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2, \eta_2) = \Phi_{pp}(\mathbf{r}_1, \zeta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2) \beta(\eta_1) \beta(\eta_2) \quad (97)$$

と書けるので, 2 中性子系のときと同じように, 陽子同士の Pauli の排他律を表す式を得ることができる.

$$\Phi_{pp}(\mathbf{r}_1, \zeta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2) = -\Phi_{pp}(\mathbf{r}_2, \zeta_2; \mathbf{r}_1, \zeta_1) \quad (98)$$

次に、一方が中性子, 他方が陽子の場合を考える. $\Phi^{(\pm)}(\mathbf{r}_1, \zeta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2)$ を位置座標, スピン変数の交換に対して対称, 反対称なもの, つまり,

$$\Phi^{(-)}(\mathbf{r}_1, \zeta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2) = -\Phi^{(-)}(\mathbf{r}_2, \zeta_2; \mathbf{r}_1, \zeta_1) \quad (99)$$

$$\Phi^{(+)}(\mathbf{r}_1, \zeta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2) = -\Phi^{(+)}(\mathbf{r}_2, \zeta_2; \mathbf{r}_1, \zeta_1) \quad (100)$$

とすると, (93) をみたすものとして,

$$\Phi^{(-)}(\mathbf{r}_1, \zeta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2) \frac{\alpha(\eta_1)\beta(\eta_2) + \beta(\eta_1)\alpha(\eta_2)}{\sqrt{2}} \quad (101)$$

$$\Phi^{(+)}(\mathbf{r}_1, \zeta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2) \frac{\alpha(\eta_1)\beta(\eta_2) - \beta(\eta_1)\alpha(\eta_2)}{\sqrt{2}} \quad (102)$$

が考えられる. この線形結合も (93) の要請をみたすので, この和をとって,

$$\Psi_{\text{np}}(\mathbf{r}_1, \zeta_1, \eta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2, \eta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Phi^{(-)} + \Phi^{(+)} \right) \alpha(\eta_1)\beta(\eta_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Phi^{(-)} - \Phi^{(+)} \right) \beta(\eta_1)\alpha(\eta_2) \quad (103)$$

とする. 2 中性子系, 2 陽子系のとときと異なり, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi^{(-)} \pm \Phi^{(+)})$ は何の対称性も持たない, つまり, 交換に関して, 対称でも反対称でもない. このことは, 陽子と中性子が別種の粒子のようであり, 中性子-陽子間には Pauli の排他律がはたらかないことを意味している. こうして, 反対称性の要求 (93) がアイソスピンを考えず, 中性子, 陽子を別種の粒子と扱ったときの Pauli の排他律と同等であることが確かめられた.

2 核子の波動関数 Ψ は, 空間部分を $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, スピン関数を $\Sigma(\zeta_1, \zeta_2)$, アイソスピン関数を $\chi(\eta_1, \eta_2)$ として,

$$\Psi = \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\Sigma(\zeta_1, \zeta_2)\chi(\eta_1, \eta_2) \quad (104)$$

とかける. 中性子同士, 陽子同士の間でしか Pauli の排他律がはたらかないようにするための交換に対して反対称でなければならないという要請から, 各部分の対称, 反対称の組み合わせは表 5 に示すものに限られる.

表 5: 2 核子波動関数の空間部分, スピン関数, アイソスピン関数の組み合わせ.

	$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$	$\Sigma(\zeta_1, \zeta_2)$	$\chi(\eta_1, \eta_2)$
(A)	対称 $L = \text{Even}$	対称 $S = 1$	反対称 $T = 0$
(B)	対称 $L = \text{Even}$	反対称 $S = 0$	対称 $T = 1$
(C)	反対称 $L = \text{Odd}$	対称 $S = 1$	対称 $T = 1$
(D)	反対称 $L = \text{Odd}$	反対称 $S = 0$	反対称 $T = 0$

L は 2 核子の相対運動の軌道角運動量の量子数. S は合成スピン量子数. T は合成アイソスピン量子数.

$S = 1$ のとき, $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 1$, $S = 0$ のとき, $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = -3$, $T = 1$ のとき, $\tau_1 \cdot \tau_2 = 1$, $S = 0$ のとき, $\tau_1 \cdot \tau_2 = -3$ に気をつけて, 表 5 の各場合 (A)~(D) について, 核力ポテンシャル U の形を求めると次のようになる.

$$(A) \quad ({}^3S, {}^3D, {}^3G, \dots) \quad -f^2 \left[1 + \left(1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{(m_\pi r)^2} \right) S_{1,2} \right] \frac{\exp(-m_\pi r)}{r} \quad (105)$$

$$(B) \quad ({}^1S, {}^1D, {}^1G, \dots) \quad -f^2 \frac{\exp(-m_\pi r)}{r} \quad (106)$$

$$(C) \quad ({}^3P, {}^3F, {}^3H, \dots) \quad \frac{1}{3} f^2 \left[1 + \left(1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{(m_\pi r)^2} \right) S_{1,2} \right] \frac{\exp(-m_\pi r)}{r} \quad (107)$$

$$(D) \quad ({}^1P, {}^1F, {}^1H, \dots) \quad 3f^2 \frac{\exp(-m_\pi r)}{r} \quad (108)$$

これが, (表 4 で見た) 同じ中性子-陽子の場合でも $T = 0$ と $T = 1$ で核力が違うことの物理的な意味である.

結合定数 f は核子による π メソンの散乱実験から決めることができ,

$$\frac{f^2}{\hbar c} = 0.08 \quad (109)$$

である。これは Coulomb 力の結合定数 e

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} = 0.0073 \quad (110)$$

より 10 倍大きい。

最後に π メソン理論によって説明できた事項をまとめると、次のようになる。

- 核力の作用半径の大きさ $\frac{\hbar}{m_{\pi}c} = 1.41 \text{ fm}$.
- 核力が大きいこと.
- 核力の荷電独立性.
- 交換力の存在.
- スピンによる変化, テンソル力.

π メソン理論は、これらの核力の特徴を説明しただけでなく、核力ポテンシャルの具体的な形 (105)~(108) も与えてくれた。ただし、今導いた具体的な形はすべて 2 次の摂動の結果であり、しかも、核子を静止していると仮定している。この近似は核子間距離 r が十分大きいところ ($r \geq 2 \text{ fm}$) では良い近似になるが、 r の小さいところでは、摂動の高次の項の影響が無視できなくなって精度が悪くなる。さらに、 π メソンより重く、核子と強い相互作用を持つ他の粒子の影響が重要になる可能性もあるので、 $r \rightarrow 0$ の部分に (105)~(108) は適用できない。したがって、 r の小さい部分に存在する斥力 core などは π メソン理論の限界の外にある問題である。

蛇足

前回, Weizsäcker-Bethe の質量公式の第 4 項までをプロットした. これがどの程度実験値と合っているのか確認したいと思い, Weizsäcker-Bethe の質量公式と結合エネルギーの実験値を重ねてプロットしたのでここで供養します.

また, 前回, Weizsäcker-Bethe の質量公式の第 4 項までのプロットを描くのに使ったスクリプトを [GitHub Gist](#) に置いておいたので, 興味があればどうぞ.

$$B(Z, A) = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 \frac{(A - 2Z)^2}{A} - a_4 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \delta(A) \quad (\text{Weizsäcker-Bethe Mass Formula})$$

$$\delta A = \begin{cases} \frac{132}{A} & \text{for } (N, Z) = (\text{Even}, \text{Even}) \\ 0 & \text{for } (N, Z) = (\text{Odd}, \text{Even}) \text{ or } (\text{Even}, \text{Odd}) \\ -\frac{132}{A} & \text{for } (N, Z) = (\text{Odd}, \text{Odd}) \end{cases}$$

Weizsäcker- Bethe vs Experimental Values

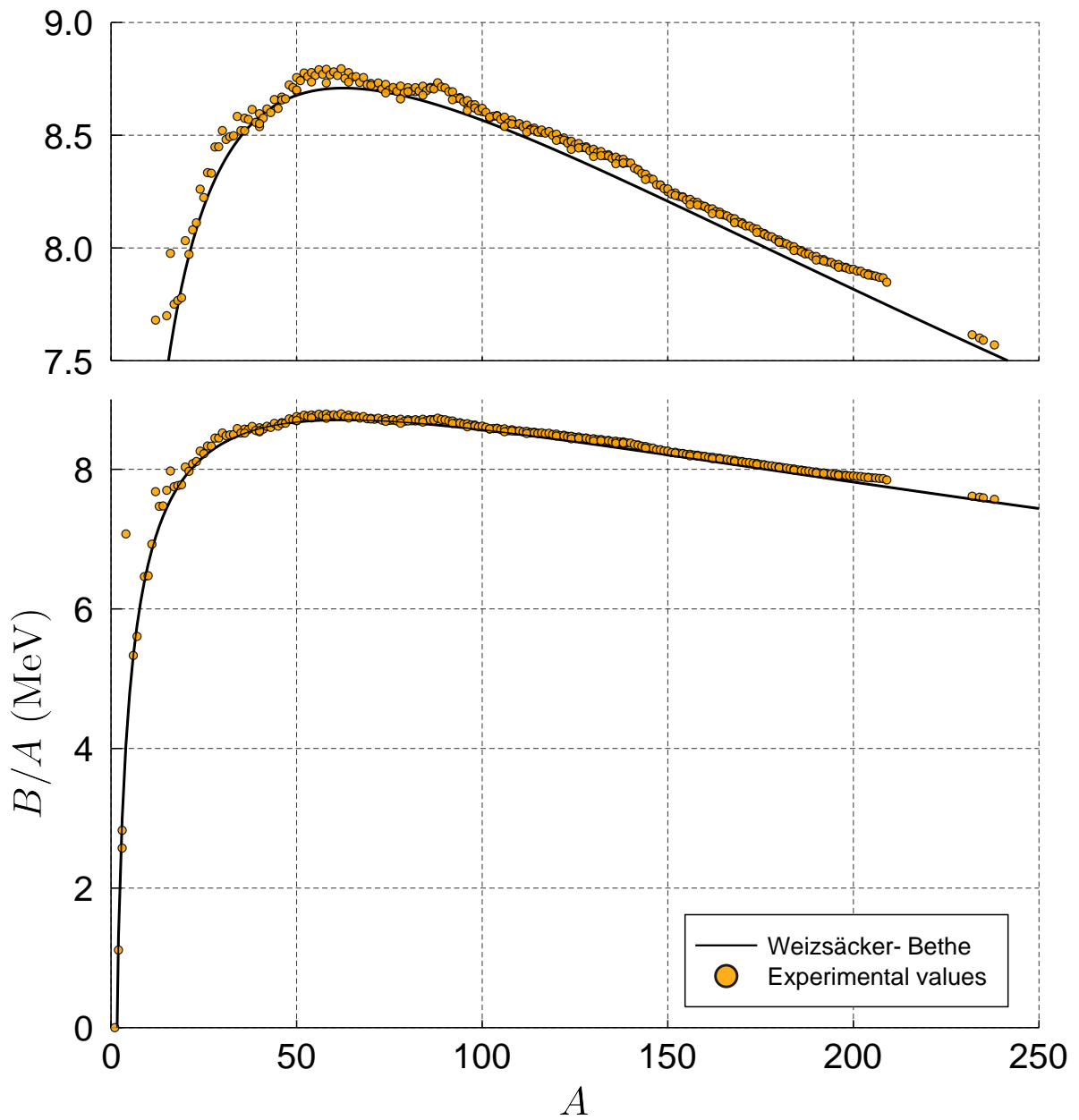


図 8: 結合エネルギーの実験値と Weizsäcker-Bethe の質量公式の比較. 結合エネルギーの実験値は <https://link.springer.com/content/pdf/10.1134/S1547477111020087.pdf> より取得.